مراجعة نهائية

مسلمات الاحتمال :-

حيث أ ، ب ⊂ ف

١ احتمال أي حدث = عدد عناصره / عدد عناصر "ف"

٢ ل(ف) = ١ ٣ ل(ϕ) = صفر

٤ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٥ ل(أَ) = ١ − ل(أ) ، ل(أ) = ١ − ل(أَ)

، ل(أ ∩ ب)َ = ١ − ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب) ، ل(أ − ب)َ = ١ − ل(أ − ب)

٦ ل(أَ ∩ بَ) = ١ − ل(أ ∪ ب) ، ل(أَ ∪ بَ) = ١ − ل(أ ∩ ب)

٧ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) ، ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٨ ل(أ ∩ بَ) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) ، ل(أَ ∩ ب) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٩ ل(أ ∪ بَ) = ل(بَ) + ل(أ ∩ ب) ، ل(أَ ∪ ب) = ل(أَ) + ل(أ ∩ ب)

١٠ ل(أَ − بَ) = ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) ، ل(بَ − أَ) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

١١ ل(أَ − ب) = ١ − ل(أ ∪ ب) ، ل(بَ − أ) = ١ − ل(أ ∪ ب)

١٢ ل(ب − أَ) = ل(أ ∩ ب) ، ل(أ − بَ) = ل(أ ∩ ب)

** عزيزي الطالب تذكر أن :-

ل(أَ ∩ بَ)′ = ل(أ ∪ ب) ، ل(أَ ∪ بَ)′ = ل(أ ∩ ب)

ل(أَ ∩ ب)′ = ل(أ ∪ بَ) ، ل(أ ∩ بَ)′ = ل(أَ ∪ ب)

ل(أ − ب) = ل(أ ∪ ب) − ل(ب) ؛ ل(ب − أ) = ل(أ ∪ ب) − ل(أ)

ملاحظات هامة :-

① إذا كان أ ∪ ب = ف فإن ل(أ ∪ ب) = ١

② إذا كان ل(أَ) = ل(أ) فإن ل(أ) = ٠.٥ ، ل(أَ) = ٠.٥

③ إذا كان أ ، ب متنافيين فإن ل(أ ∩ ب) = صفر

④ إذا كان أ ⊂ ب فإن ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

⑤ ل[ف − (أ ∪ ب)] = ل(ف) − ل(أ ∪ ب) = ١ − ل(أ ∪ ب) = ل(أ ∪ ب)′

⑥ إذا كان ف = {أ ، ب ، جـ} فإن ل(أ) + ل(ب) + ل(جـ) = ١

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

أ/ عبد اللطيف فؤاد

تابع :-

الألفاظ	ما تدل عليه
① احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = اجابة الوصف = حل المسألة = وقوع الحدث أ أو ب أو كلاهما	$ل(أ \cup ب)$
② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر	$ل(أ \cap ب)'$
③ " " " الحدثين فقط	$ل(أ \cup ب) - ل(أ \cap ب)$
④ احتمال وقوع الحدث أ فقط = احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب	$ل(أ - ب)$
⑤ احتمال وقوع الحدثين أ و ب معاً = كلاهما يحل المسألة	$ل(أ \cap ب)$
⑥ احتمال وقوع الحدث أ أو عدم وقوع ب	$ل(أ \cup ب')$
⑦ " عدم وقوع الحدث أ و عدم وقوع الحدث ب = راسباً في الفلسفة والتاريخ = رسوبه في المادتين معاً = عدم اجابة الوصف = عدم حل المسألة	$ل(أ' \cap ب') = ل(أ \cup ب)'$
⑧ احتمال عدم وقوع الحدث أ أو عدم وقوع الحدث ب = وقوع أحد الحدثين على الأكثر	$ل(أ' \cup ب') = ل(أ \cap ب)'$

س١ : اذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج وكان $ل(ب) = ل(ب')$ ، $ل(أ) = \frac{٣}{٤} ل(ب)$ ، $ل(أ \cap ب) = \frac{١}{٨}$

فأوجد $ل(أ \cap ب')$ ، $ل(أ' \cup ب)$ ، $ل(أ' - ب)$

الحل

$ل(أ) = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$

$ل(ب) = \frac{١}{٢}$

$ل(أ \cap ب) = \frac{١}{٨}$

$ل(أ \cup ب) = ? \quad \frac{٣}{٤}$

$\because ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٨} = \frac{٣}{٤}$

① $\because ل(أ \cap ب') = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

$= \frac{٣}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

② $\because ل(أ' \cup ب) = ل(أ') + ل(أ \cap ب)$

$= \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

③ $ل(أ' - ب) = ١ - ل(أ \cup ب)$

$= ١ - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

أ/ [illegible]

س٢ إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان $\text{ل}(\text{ب}) = \frac{5}{8}$ ، $\text{ل}(\text{أ}-\text{ب}) = \frac{1}{8}$ ، $\text{ل}(\text{أ}) = \frac{3}{2}\,\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})$

أوجد $\text{ل}(\text{أ}'\cap\text{ب}')$ ، $\text{ل}(\text{أ}'\cup\text{ب}')$ ، $\text{ل}(\text{أ}'-\text{ب}')$

الحل

$\text{ل}(\text{ب}) = \frac{5}{8}$

$\text{ل}(\text{أ}) = ?\quad \frac{3}{8}$

$\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) = ?\quad \frac{1}{4}$

$\text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = ?\quad \frac{3}{4}$

$\because \text{ل}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})$

$\therefore \frac{1}{8} = \frac{3}{2}\,\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\,\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) = \frac{1}{4}$

$\because \text{ل}(\text{أ}) = \frac{3}{2}\,\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{أ}) = \frac{3}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$\because \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})$

$\therefore \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

① $\because \text{ل}(\text{أ}'\cap\text{ب}') = 1 - \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{أ}'\cap\text{ب}') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

② $\because \text{ل}(\text{أ}'\cup\text{ب}') = 1 - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{أ}'\cup\text{ب}') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

③ $\because \text{ل}(\text{أ}'-\text{ب}') = \text{ل}(\text{ب}-\text{أ}) = \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{أ}'-\text{ب}') = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

س٣ إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان $\text{أ}\cup\text{ب} = \text{ف}$ ، أ ، ب متنافيين ، $\text{ل}(\text{أ}) = ٠٫٦$

فأوجد $\text{ل}(\text{ب}')$ ، $\text{ل}(\text{أ}'\cap\text{ب})$

الحل

$\text{ل}(\text{أ}) = ٠٫٦$

$\text{ل}(\text{ب}) = ?\quad ٠٫٤$

$\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) = \text{صفر}$

$\text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = 1$

$\because \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})$

$1 = ٠٫٦ + \text{ل}(\text{ب}) - \text{صفر} \Leftarrow \text{ل}(\text{ب}) = ٠٫٤$

① $\because \text{ل}(\text{ب}') = 1 - \text{ل}(\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{ب}') = 1 - ٠٫٤ = ٠٫٦$

② $\because \text{ل}(\text{أ}'\cap\text{ب}) = \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) \Leftarrow \text{ل}(\text{أ}'\cap\text{ب}) = ٠٫٤ - \text{صفر} = ٠٫٤$

س٤ إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان $\text{ل}(\text{أ}) = \text{س}$ ، $\text{ل}(\text{ب}') = \frac{3}{4}$ ، $\text{ل}[\text{ف} - (\text{أ}\cup\text{ب})] = \frac{2}{3}$

فأوجد قيمة س في كل من الحالتين: أولاً إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين ، ثانياً إذا كان $\text{ب}\subset\text{أ}$

الحل

أولاً: $\because \text{ل}[\text{ف} - (\text{أ}\cup\text{ب})] = \frac{2}{3}$

$\therefore \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب})' = \frac{2}{3}$

$1 - \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \frac{2}{3}$

$\therefore \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \frac{1}{3}$

$\text{ل}(\text{أ}) = \text{س}$

$\text{ل}(\text{ب}) = \frac{1}{4}$

$\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب}) = \text{صفر}$

$\text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = ?\ \frac{1}{3}$

$\because \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})$

$\therefore \frac{1}{3} = \text{س} + \frac{1}{4} - \text{صفر}$

$\therefore \text{س} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{س} = \frac{1}{12}}$

ثانياً:

$\text{ل}(\text{أ}) = \text{س}$

$\text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \frac{1}{3}$

$\because \text{ب}\subset\text{أ}$

$\therefore \text{ل}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ل}(\text{أ})$

$\therefore \boxed{\frac{1}{3} = \text{س}}$

س٥ فصل دراسي به ٣٠ طالبا منهم ١٨ يدرسون الإحصاء ، ١٠ يدرسون الكمبيوتر ، ٦ يدرسون الإحصاء والكمبيوتر اختير طالب من هذا الفصل عشوائيا ما احتمال ان يكون الطالب المختار

(أ) ممن يدرس احدى المادتين على الأقل (ب) ممن يدرس احدى المادتين على الأكثر

(جـ) ممن يدرس مادة واحدة منهما فقط (د) لا يدرس أيا من المادتين

(هـ) ممن يدرس الإحصاء فقط

الحل

ن(ف) = ٣٠

بفرض ان احتمال ان الطالب المختار يدرس الإحصاء ل(أ) = $\frac{١٨}{٣٠}$

، " " " " " " " الكمبيوتر ل(ب) = $\frac{١٠}{٣٠}$

، " " " " " " " الإحصاء والكمبيوتر ل(أ ∩ ب) = $\frac{٦}{٣٠}$

(أ) احتمال ان الطالب المختار ممن يدرس احدى المادتين على الأقل ل(أ ∪ ب) = $\frac{١٨}{٣٠} + \frac{١٠}{٣٠} - \frac{٦}{٣٠} = \frac{٢٢}{٣٠} = \frac{١١}{١٥}$

(ب) " " " " " " " الأكثر ل(أ ∩ ب)′ = ١ − $\frac{٦}{٣٠} = \frac{٢٤}{٣٠} = \frac{٤}{٥}$

(جـ) " " " " " " مادة واحدة منهما فقط ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{٢٢}{٣٠} - \frac{٦}{٣٠} = \frac{١٦}{٣٠} = \frac{٨}{١٥}$

(د) " " " " " لا يدرس أيا من المادتين ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − $\frac{١١}{١٥} = \frac{٤}{١٥}$

(هـ) " " " " ممن يدرس الإحصاء فقط ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١٨}{٣٠} - \frac{٦}{٣٠} = \frac{١٢}{٣٠} = \frac{٢}{٥}$

س٦ يتسابق ثلاث متسابقين أ ، ب ، جـ في سباق وكان احتمال فوز أ ضعف احتمال فوز ب ، واحتمال فوز ب ضعف احتمال فوز جـ بالسباق فأوجد

(أ) ل(فوز أ أو ب) (ب) ل(فوز ب و جـ) (جـ) ل(عدم فوز ب) علماً بأن واحد منهم فقط يفوز بالسباق.

الحل

ل(أ) = ٢ ل(ب)

ل(ب) = ٢ ل(جـ)

بفرض ان ل(ب) = س

⇐ ل(أ) = ٢س

⇐ ل(جـ) = $\frac{١}{٢}$س

∵ ف = {أ ، ب ، جـ} ∴ ل(أ) + ل(ب) + ل(جـ) = ١

∴ ٢س + س + $\frac{١}{٢}$س = ١

∴ $\frac{٧}{٢}$س = ١ ⇐ $\boxed{س = \frac{٢}{٧}}$

∴ ل(جـ) = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٧} = \frac{١}{٧}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٧}$ ، ل(أ) = ٢ × $\frac{٢}{٧} = \frac{٤}{٧}$

∴ (أ) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{٤}{٧} + \frac{٢}{٧}$ − ٠ = $\frac{٦}{٧}$

(ب) ل(ب ∩ جـ) = صفر لأن أ ، ب ، جـ احداث متنافية

(جـ) ل(ب)′ = ١ − ل(ب) = ١ − $\frac{٢}{٧} = \frac{٥}{٧}$

س٧ من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} كون عدد من رقمين مختلفين ما احتمال الحصول على عدد بحيث :-

(أ) رقم آحاده وعشراته زوجيين (ب) رقما الآحاد والعشرات فرديين (جـ) رقما الآحاد والعشرات احدهما فردي والآخر زوجي

الحل

ف = {٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤} ن(ف) = ١٢

(أ) الحدث = {٤٢ ، ٢٤} ∴ الاحتمال = $\frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$

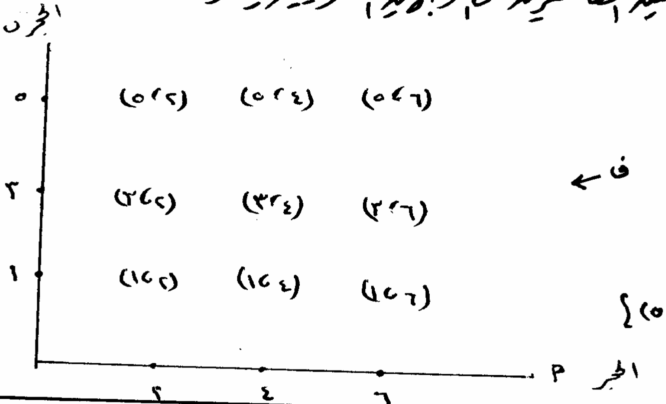
(ب) الحدث = {٣١ ، ١٣} ∴ الاحتمال = $\frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$

(جـ) الحدث = {٢١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٣٤} ∴ الاحتمال = $\frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

٥

س٨: لدى حجران نرد صمم الحجر أ بحيث يكون وجهان يحملان الرقم ٢، وجهان يحملان الرقم ٤، وجهان يحملان الرقم ٦
و " " " ب " " " " " " ١ ، " " " ٣ ، " " " ٥
والقي الحجران معاً احسب احتمال ان:
أولاً: الرقم الظاهر على الوجه العلوي للحجر أ أكبر من الظاهر على الوجه العلوي للحجر ب.
ثانياً: الفرق المطلق (مقياس الفرق) بين الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين يساوي ١

~ الحل ~



ن(ف) = ٩

أولاً: الحدث = {(٢،١)، (٤،١)، (٤،٣)، (٦،١)، (٦،٣)، (٦،٥)}

∴ الاحتمال = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

ثانياً: الحدث = {(٢،١)، (٢،٣)، (٤،٣)، (٤،٥)، (٦،٥)}

الاحتمال = $\frac{٥}{٩}$

س٩: سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ما احتمال ان يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة
أ) مربع كامل ب) يقبل القسمة على ٣ جـ) مربع كامل ويقبل القسمة على ٣

~ الحل ~

∵ ف = {١، ٢، ٣، ...، ١٠٠} ⇐ ن(ف) = ١٠٠

أ) الحدث = {١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ٣٦، ٤٩، ٦٤، ٨١، ١٠٠}

الاحتمال = $\frac{١٠}{١٠٠}$ = $\frac{١}{١٠}$ = ٠٫١

ب) الحدث = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ١٨، ٢١، ٢٤، ٢٧، ٣٠، ٣٣، ٣٦، ٣٩، ٤٢، ٤٥، ٤٨، ٥١، ...، ٩٩}

الاحتمال = $\frac{٣٣}{١٠٠}$ = ٠٫٣٣

جـ) الحدث = {٩، ٣٦، ٨١} ∴ الاحتمال = $\frac{٣}{١٠٠}$ = ٠٫٠٣

س١٠: نسخ الموظف أ سبعين خطاباً على الآلة الكاتبة فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، ونسخ الموظف ب ثلاثين خطاباً آخر فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء. فإذا اختير عشوائياً خطاب واحد مما تم نسخه بواسطة كل من أ، ب فأوجد احتمال أن هذا الخطاب يكون:
أ) بلا أخطاء ب) الموظف أ هو الذي نسخه جـ) الموظف ب قد أخطأ في نسخه د) الموظف أ لم يخطئ في نسخه

~ الحل ~

ن(ف) = ١٠٠

الخطابات \ الموظف	أ	ب	المجموع
بلا أخطاء	٥٦	١٨	٧٤
بها أخطاء	١٤	١٢	٢٦
المجموع	٧٠	٣٠	١٠٠

∵ عدد الخطابات بلا أخطاء من أ = $\frac{٧٠ \times ٨٠}{١٠٠}$ = ٥٦ خطاب

∵ " " " " ب = $\frac{٦٠ \times ٣٠}{١٠٠}$ = ١٨ خطاب

أ) الاحتمال = $\frac{٥٦+١٨}{١٠٠}$ = $\frac{٧٤}{١٠٠}$ = ٠٫٧٤

ب) الاحتمال = $\frac{٧٠}{١٠٠}$ = ٠٫٧

جـ) الاحتمال = $\frac{١٢}{١٠٠}$ = ٠٫١٢

د) الاحتمال = $\frac{٥٦}{١٠٠}$ = ٠٫٥٦

مثال: في احدى المحافظات - إذا افترضنا أن احتمال انجاب ولد يساوي احتمال انجاب بنت اختيرت أسرة من هذه المحافظة عشوائيًا ووجد أن لديها ثلاثة أطفال

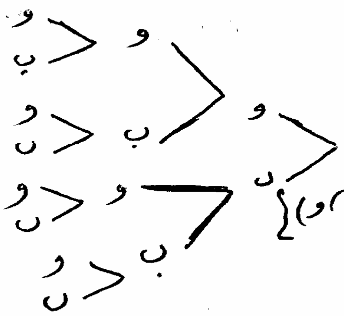
(أ) اكتب فضاء العينة لهذه التجربة المرتبط بالنوع (ولد أو بنت) والترتيب في العمر بفرض عدم وجود توائم

(ب) احسب احتمال أن يكون الاطفال الثلاثة بتلك الاسرة بنتين وولد

— الحل —

ف

(و ، و ، و)
(و ، و ، ب)
(و ، ب ، و)
(و ، ب ، ب)
(ب ، و ، و)
(ب ، و ، ب)
(ب ، ب ، و)
(ب ، ب ، ب)



(أ) ن (ف) = ٨

(ب) الحدث = {(و ، ب ، ب) ، (ب ، و ، ب) ، (ب ، ب ، و)}

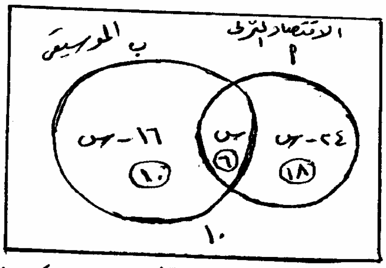
الاحتمال = $\frac{٣}{٨}$

س١٢ من بين ٤٤ طالبة بأحد فصول مدرسة ثانوية للبنات وجد أن ٢٤ منهن اخترن مجال الاقتصاد المنزلي ، وأن ١٦ طالبة اخترن مجال الموسيقى وأن ١٠ منهن اخترن مجالات أخرى . أوجد عدد الطالبات اللاتي اخترن مجالي الاقتصاد المنزلي والموسيقى معًا . وإذا اخترت احدى طالبات هذا الفصل عشوائيًا فما احتمال أن تكون ممن اخترن .

(أ) المجالين معًا ل(أ ∩ ب) (ب) احد المجالين على الاقل ل(أ ∪ ب) (جـ) الاقتصاد المنزلي فقط ل(أ − ب)

(د) احد المجالين فقط ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

ف



— الحل —

بفرض أن عدد الطالبات اللاتي اخترن مجالي الاقتصاد المنزلي والموسيقى هو س ن (ف) = ٤٤

∴ ٢٤ − س + س + ١٦ − س + ١٠ = ٤٤ ⟸ س = ٦

ومن الرسم نجد أن (أ) الاحتمال = $\frac{٦}{٤٤}$ = $\frac{٣}{٢٢}$

(ب) الاحتمال = $\frac{١٨ + ٦ + ١٠}{٤٤}$ = $\frac{٣٤}{٤٤}$ = $\frac{١٧}{٢٢}$

(جـ) الاحتمال = $\frac{١٨}{٤٤}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

(د) الاحتمال = $\frac{١٨ + ١٠}{٤٤}$ = $\frac{٢٨}{٤٤}$ = $\frac{٧}{١١}$

ملاحظة: يمكن حلها بطريقة اخرى

ل(أ) = $\frac{٢٤}{٤٤}$ ، ل(ب) = $\frac{١٦}{٤٤}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{١٠}{٤٤}$ ثم نوجد ل(أ ∪ ب) ، ل(أ ∩ ب) ومن التقاطع نوجد العدد س أكمل ----

---

س١٣ صندوق به ٢٠ بطاقة ومرقمة من ١ الى ٢٠ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى مع اعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل السحبة الثانية ما احتمال أن يكون :-

(أ) مجموع العددين يساوي ١٢

(ب) حاصل ضرب العددين ١٢

— الحل —

ن (ف) = ٤٠٠

(أ) الحدث = {(١ ، ١١) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧) ، (٦ ، ٦) ، (٧ ، ٥) ، (٨ ، ٤) ، (٩ ، ٣) ، (١٠ ، ٢) ، (١١ ، ١)}

∴ الاحتمال = $\frac{١١}{٤٠٠}$

(ب) الحدث = {(١ ، ١٢) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ٢) ، (١٢ ، ١)}

الاحتمال = $\frac{٦}{٤٠٠}$ = $\frac{٣}{٢٠٠}$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق بالنجاح

م/ عبد اللطيف قران

س١٤ جنديان يصوب كل منهما نحو هدف ما فإذا كان احتمال اصابة الهدف من الأول بمفرده هو ٢و٠ ومن الثاني بمفرده هو ٣و٠ واحتمال اصابة الهدف من كل منهما هو ٢و٠ .

احسب احتمال اصابة الهدف ① من الأول ③ من أحدهما على الأكثر

② من أحدهما على الأقل .

الحل

بفرض أن احتمال اصابة الهدف من الأول هو ل(أ) ومن الثاني هو ل(ب)

، ، ، ، ، ، بمفرده ل(أ−ب) ∴ ل(أ−ب) = ٢و٠

، ، ، ، ، الثاني ، ، ل(ب−أ) ∴ ل(ب−أ) = ٣و٠

، ، ، ، من كل منهما هو ل(أ∩ب) ، ل(أ∩ب) = ٢و٠

، ل(أ) = ؟ ، ل(ب) = ؟ ، ل(أ∪ب) = ؟

① ∵ ل(أ−ب) = ل(أ) − ل(أ∩ب)

∴ ٢و٠ = ل(أ) − ٢و٠ ⟸ ل(أ) = ٢و٠ + ٢و٠ = ٤و٠

② ∵ ل(ب−أ) = ل(ب) − ل(أ∩ب)

∴ ٣و٠ = ل(ب) − ٢و٠ ⟸ ل(ب) = ٣و٠ + ٢و٠ = ٥و٠

∴ احتمال اصابة الهدف من أحدهما على الأقل ل(أ∪ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ∩ب)

= ٤و٠ + ٥و٠ − ٢و٠ = ٧و٠

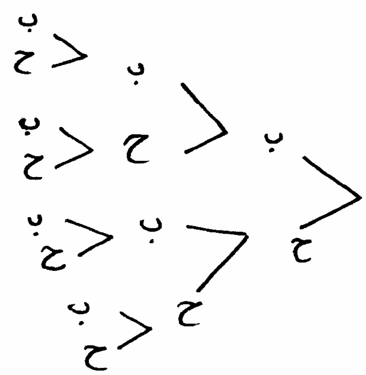
③ احتمال اصابة الهدف من أحدهما على الأكثر ل(أ∩ب)' = ١ − ل(أ∩ب) = ١ − ٢و٠ = ٨و٠

س١٥ حقيبة بها كرتان احداهما بيضاء والأخرى حمراء سحبت منها كرة ثلاث مرات الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال

أوجد احتمال ① حدث الحصول على كرتين بيضاوين على الأقل

② ، ، ، ، بالضبط بيضاوين متتاليتين

الحل



∴ ف = {(ب،ب،ب)، (ب،ب،ح)، (ب،ح،ب)، (ب،ح،ح)، (ح،ب،ب)، (ح،ب،ح)، (ح،ح،ب)، (ح،ح،ح)}

∴ ن(ف) = ٨

الحدث = {(ب،ب،ب)، (ب،ب،ح)، (ب،ح،ب)، (ح،ب،ب)}

① احتمال الحدث = ٤/٨ = ١/٢

② الحدث = {(ب،ب،ح)، (ح،ب،ب)}

∴ احتمال الحدث = ٢/٨ = ١/٤

** الباب الثاني :-

المتغير العشوائي (المتقطع – المتصل)

س١ صندوق به ٢ كرات حمراء وكرات بيضاء عددها متساوٍ سحبت منه كرتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة أولاً قبل السحب الثاني وعرف المتغير العشوائي س بأنه (عدد الكرات الحمراء)
اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س . ثم أوجد توقعه وتباينه .

الحل

ف = {(ح، ح)، (ح، ب)، (ب، ح)، (ب، ب)}   ∴ ن(ف) = ٤

التوزيع الاحتمالي للمتغير س

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

∵ التوقع م = مجـ س × د(س)
$= 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$

∴ التباين σ^2 = مجـ $س^2$ × د(س) − $م^2$
$= 0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} - (1)^2$
$= \frac{1}{2}$

س٢ س متغير عشوائي متقطع مداه {٢، ٣} فإذا كان الوسط الحسابي م = $\frac{11}{4}$ فأوجد كلاً من ل(س = ٢)، ل(س = ٣) والانحراف المعياري للمتغير س .

الحل

س	٢	٣
د(س)	أ	ب
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

نفرض أن ل(س = ٢) = أ
، ، ل(س = ٣) = ب

∵ مجموع الاحتمالات = ١
∴ أ + ب = ١ ⟵ (I)

∵ م = مجـ س × د(س)
∴ $\frac{11}{4}$ = ٢أ + ٣ب ⟵ (II)   بحل المعادلتين جبرياً I، II بضرب I × −٢

−٢أ − ٢ب = −٢ ⟵ (I)
٢أ + ٣ب = $\frac{11}{4}$ ⟵ (II)

ب = $\frac{3}{4}$ ⟸ $\boxed{أ = \frac{1}{4}}$

∵ التباين σ^2 = مجـ $س^2$ × د(س) − $م^2$ ⟸ $\sigma^2 = \frac{4}{4} + \frac{27}{4} - (\frac{11}{4})^2$ ⟸ $\sigma^2 = \frac{3}{16}$

∴ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{3}{16}}$ = [illegible] = ... بدون تقريب

س٣ إذا كان الوسط الحسابي لمتغير ما يساوي ١٥٠ وكان معامل الاختلاف له يساوي ٢٪ فأوجد تباين المتغير .

— الحل —

م = ١٥٠
معامل الاختلاف = ٢
σ = ؟
σ^2 = ؟

∵ معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{م} \times 100$

∴ ٢ = $\frac{\sigma}{150} \times \cancel{100}$

٦ = ٢σ ⟸ σ = ٣ $\boxed{∴ \text{التباين } \sigma^2 = 9}$

س٤ اذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي يتحدد بالدالة د حيث $د(س) = \frac{س}{15}$ ، س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

أوجد ① التوزيع الاحتمالي للمتغير س ② ل(س = ١ أو س = ٢) ③ الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س.

~ الحل ~

① التوزيع الاحتمالي للمتغير س

$س_ر$	١	٢	٣	٤	٥
$د(س_ر)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

② ل(س = ١ أو س = ٢) $= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

③ ∵ الوسط الحسابي = مجـ $س_ر \times د(س_ر)$

$= \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{9}{15} + \frac{16}{15} + \frac{25}{15}$

$= \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$

∵ $\sigma^2 =$ مجـ $س_ر^2 \times د(س_ر) - \mu^2$ بإكمال الحل

$= \frac{1}{15} + \frac{8}{15} + \frac{27}{15} + \frac{64}{15} + \frac{125}{15} - (\frac{11}{3})^2 =$

⇐ σ الانحراف المعياري $= \sqrt{\sigma^2} \approx 1,247$

س٥ اذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه {−١ ، ٠ ، ١ ، ٢} وكان ل(س = ر) $= \frac{س + ر}{18}$ لكل ر تنتمي الى مدى س فأوجد قيمة س ثم أوجد التوقع والتباين للمتغير س.

~ الحل ~

التوزيع الاحتمالي للمتغير س

$س_ر$	−١	٠	١	٢
$د(س_ر)$	$\frac{س-1}{18}$	$\frac{س}{18}$	$\frac{س+1}{18}$	$\frac{س+2}{18}$

ولإيجاد قيمة س ∵ مجموع الاحتمالات = ١

∴ $\frac{س-1}{18} + \frac{س}{18} + \frac{س+1}{18} + \frac{س+2}{18} = 1$

$\frac{4س + 2}{18} = 1 \Leftarrow 4س + 2 = 18$

∴ $4س = 16 \Leftarrow \boxed{س = 4}$ بالتعويض في الجدول عن قيمة س

ثم أكمل

س٦ اذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي يتحدد بالدالة د حيث ٢د(٠) = د(٣) = ٢د(١) = د(٢)

فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير س ثم أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س.

الحل

التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

$س_ر$	٠	١	٢	٣
$د(س_ر)$	$\frac{1}{2}م$	$\frac{1}{2}م$	م	م
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

بفرض أن ٢د(٠) = د(٣) = ٢د(١) = د(٢) = م

ولإيجاد قيمة م ∵ مجموع الاحتمالات = ١

∴ $\frac{1}{2}م + \frac{1}{2}م + م + م = 1$ ∴ $3م = 1 \Leftarrow \boxed{م = \frac{1}{3}}$

أكمل

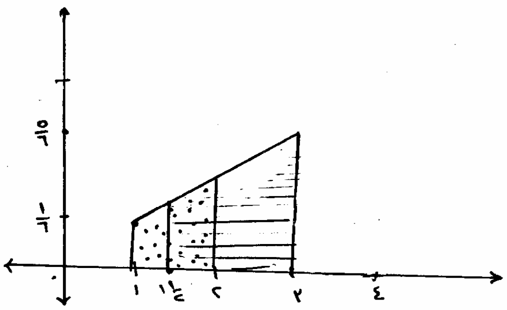
س٧) اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ويحدد بالدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2س-1) & 1 \le س \le 3 \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

(أ) اثبت ان الدالة دالة كثافة احتمال

أوجد (ب) $ل(س \le 2)$ (جـ) $ل(س \ge 1.5)$

الحل



$\because د(1) = \frac{1}{6}$ ، $د(3) = \frac{5}{6}$

(أ) $\because ل(1 \le س \le 3) =$ مساحة سطح شبه المنحرف

$= \frac{1}{2}[د(1) + د(3)] \times 2$

$= \frac{2}{2}[\frac{1}{6} + \frac{5}{6}] = 1 \times \frac{6}{6} = 1$

$\because ل(1 \le س \le 3) = 1$ $\therefore$ الدالة دالة كثافة احتمال

(ب) $\because ل(س \le 2) = ل(1 \le س \le 2) =$ مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}[د(1) + د(2)] \times 1 = \frac{1}{2}[\frac{1}{6} + \frac{3}{6}] = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$

(جـ) $\because ل(س \ge 1.5) = ل(1.5 \le س \le 3) =$ مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}[د(1.5) + د(3)] \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}[\frac{2}{6} + \frac{5}{6}] = \frac{3}{4} \times \frac{7}{6} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

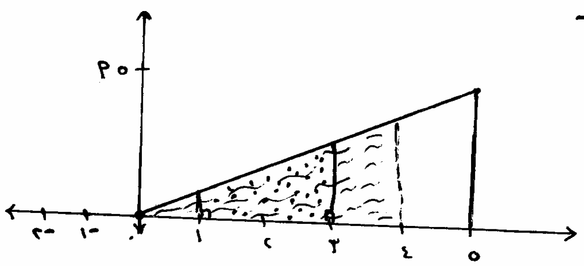
س٨) اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي

$$د(س) = \begin{cases} أ\,س & 0 \le س \le 5 \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أوجد قيمة أ ثم أوجد (١) $ل(س \le 3)$

(٢) $ل(-2 \le س \le 4)$

الحل



$د(0) = 0$

$د(5) = 5أ$

$\because$ الدالة كثافة احتمال

$\therefore ل(0 \le س \le 5) = 1$

مساحة سطح $\Delta = 1$

$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times 5أ = 1$ $\therefore \boxed{أ = \frac{2}{25}}$ $\therefore د(س) = \begin{cases} \frac{2}{25}س & 0 \le س \le 5 \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$

(١) $\because ل(1 \le س \le 3) =$ مساحة سطح شبه المنحرف $= \frac{1}{2}[د(1) + د(3)] \times 2$

$= \frac{2}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{25}$

(٢) $ل(-2 \le س \le 4) =$ مساحة سطح Δ

$= ل(0 \le س \le 4)$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times د(4) = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{25} = \frac{16}{25}$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق

والنجاح

م/ سيد عبد الغني فؤاد

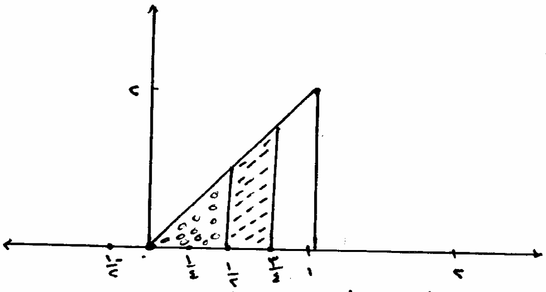
س٩ اذا كان س متغيراً عشوائياً ودالة كثافة الاحتمال له هي د(س) = { ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ صفر فيما عدا ذلك

أوجد ① ل(½ < س < ¾) ، ② ل(-½ < س < ½)

— الحل —

د(٠) = ٠ ، د(١) = ٢

د(½) = ٢ × ½ = ١ ، د(¾) = ٢ × ¾ = $\frac{٣}{٢}$



① ∴ ل(½ < س < ¾) = مساحة شبه المنحرف

= ½ [د(½) + د(¾)] × ¼

= ⅛ [١ + $\frac{٣}{٢}$] = ⅛ × $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$

② ل(-½ < س < ½) = ل(٠ < س < ½) = مساحة المثلث = ½ × ½ × د(½) = ¼ × ١ = ¼

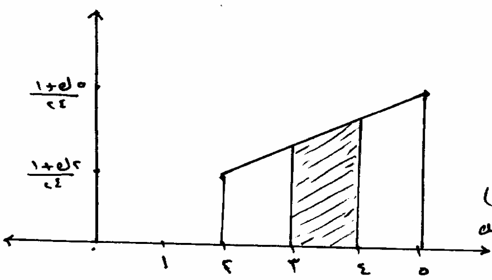
س١٠ اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال هي د(س) = { $\frac{١}{٢٤}$(ك س + ١) ، ٢ ≤ س ≤ ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك

فأوجد ك ثم أوجد ل(٣ < س < ٤)

— الحل —

د(٢) = $\frac{٢ك + ١}{٢٤}$

د(٥) = $\frac{٥ك + ١}{٢٤}$



∴ د(س) = { $\frac{١}{٢٤}$(ك س + ١) ، ٢ ≤ س ≤ ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك

∵ الدالة دالة كثافة احتمال

∴ ل(٢ ≤ س ≤ ٥) = ١

∴ ½ [د(٢) + د(٥)] × ٣ = ١

أولاً

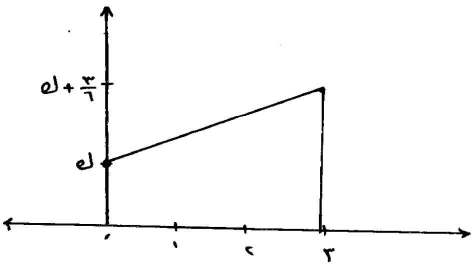
∴ $\frac{٣}{٢}$ [$\frac{٢ك + ١}{٢٤}$ + $\frac{٥ك + ١}{٢٤}$] = ١ ∴ $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٧ك + ٢}{٢٤}$ = ١ ∴ ٧ك + ٢ = ١٦ ∴ ٧ك = ١٤ ∴ $\boxed{ك = ٢}$

ثانياً ∴ ل(٣ < س < ٤) = مساحة شبه المنحرف = ½ [د(٣) + د(٤)] × ١ = ½ [$\frac{٧}{٢٤}$ + $\frac{٩}{٢٤}$] = ½ × $\frac{١٦}{٢٤}$ = $\frac{١}{٣}$

س١١ اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال هي د(س) = { $\frac{١}{٦}$ س + ك ، ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك

فأوجد ك

— الحل —



د(٠) = ك

د(٣) = $\frac{٣}{٦}$ + ك

∵ الدالة دالة كثافة احتمال

∴ ل(٠ ≤ س ≤ ٣) = ١

∴ ½ [د(٠) + د(٣)] × ٣ = ١

∴ $\frac{٣}{٢}$ [ك + $\frac{٣}{٦}$ + ك] = ١

$\frac{٣}{٢}$ [٢ك + $\frac{٣}{٦}$] = ١

∴ ٣ك + $\frac{٩}{١٢}$ = ١ ∴ (×١٢) ٣٦ك + ٩ = ١٢ ∴ ٣٦ك = ٣ ∴ $\boxed{ك = \frac{١}{١٢}}$

∴ د(س) = { $\frac{١}{٦}$ س + $\frac{١}{١٢}$ ، ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك

ثم أوجد ل(١ ≤ س ≤ ٣) الحل ←

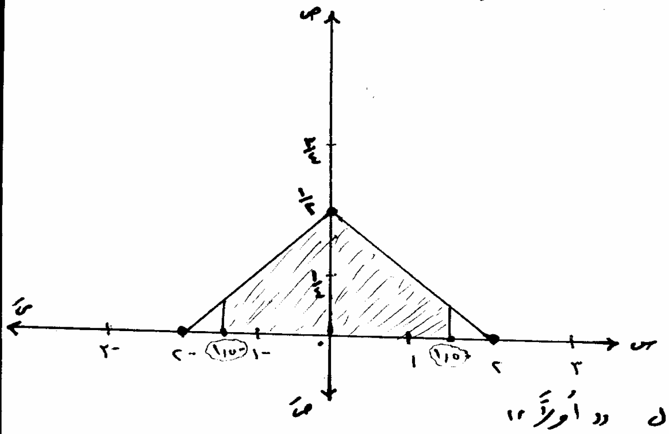
مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

[illegible]

س ١٢ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{1}{4}(س+٢) & -٢ \le س \le ٠ \\ \frac{1}{4}(٢-س) & ٠ < س \le ٢ \end{cases}$ حيث س متغير عشوائي متصل

ابحث أن د تصلح أن تكون دالة كثافة احتمال للمتغير العشوائي س ثم أوجد ل(-١,٥ ≤ س ≤ ١,٥)

الحل



نرسم الدالة

∵ د(-٢) = ٠

د(٠) = $\frac{1}{2}$

د(٢) = ٠

∵ ل(-٢ ≤ س ≤ ٢) = مساحة المثلث

= $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × د(٠)

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × $\frac{1}{2}$ = ١

∵ ل(-٢ ≤ س ≤ ٢) = ١ ∴ الدالة د دالة كثافة احتمال "د أولاً"

∵ ل(-١,٥ ≤ س ≤ ١,٥) = ٢ × ل(٠ ≤ س ≤ ١,٥) = ٢ × مساحة شبه منحرف = ٢ × $\frac{1}{2}$ [د(٠) + د(١,٥)] × ١,٥

= ٢ × $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$] × $\frac{3}{2}$

= $\frac{3}{2}$ × $\frac{5}{8}$ = $\frac{15}{16}$

∵ د(١,٥) = $\frac{1}{4}$(٢ - ١,٥) = $\frac{1}{4}$ × $\frac{1}{2}$

∴ د(١,٥) = $\frac{1}{8}$

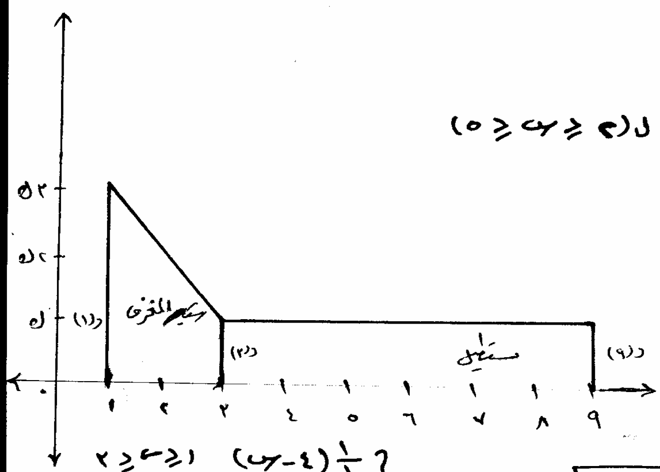
س ١٣ إذا كان س متغير عشوائي متصل مداه [١ ، ٩] ودالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) = $\begin{cases} ل(٤-س) & حيث ١ \le س \le ٣ \\ ل & حيث ٣ < س \le ٩ \end{cases}$

أوجد قيمة ل ثم أوجد ل(س ≤ ٢) ، ل(٢ ≤ س ≤ ٥)

الحل

نرسم الدالة ∵ د(١) = ٣ل ، د(٣) = ل ، د(٩) = ل



أولاً ∵ ل(١ ≤ س ≤ ٩) = ١ لأن الدالة دالة كثافة احتمال

∴ ل(١ ≤ س ≤ ٣) + ل(٣ < س ≤ ٩) = ١

مساحة شبه المنحرف + مساحة المستطيل = ١

∴ $\frac{1}{2}$[د(١) + د(٣)] × ٢ + د(٣) × ٦ = ١

∴ ٣ل + ل + ٦ل = ١ ∴ ١٠ل = ١ ⟸ $\boxed{ل = \frac{1}{10}}$ ∴ د(س) = $\begin{cases} \frac{1}{10}(٤-س) & ١ \le س \le ٣ \\ \frac{1}{10} & ٣ < س \le ٩ \end{cases}$

ثانياً ل(س ≤ ٢) = مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$[د(١) + د(٢)] × ١

= $\frac{1}{2}$ [$\frac{3}{10}$ + $\frac{2}{10}$] = $\frac{1}{2}$ × $\frac{5}{10}$ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{4}$

ثالثاً ل(٢ ≤ س ≤ ٥) = ل(٢ ≤ س ≤ ٣) + ل(٣ < س ≤ ٥) = مساحة شبه المنحرف + مساحة المستطيل

= $\frac{1}{2}$[د(٢) + د(٣)] × ١ + د(٣) × ٢ = $\frac{1}{2}$[$\frac{2}{10}$ + $\frac{1}{10}$] + $\frac{1}{10}$ × ٢

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{10}$ + $\frac{2}{10}$ = $\frac{3}{20}$ + $\frac{4}{20}$ = $\frac{7}{20}$

مع أطيب التمنيات أ/ سيد لطيف غزال

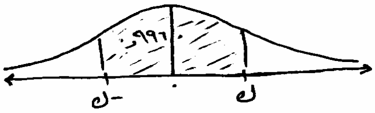
" المتغير العشوائي الطبيعي "

معياري (ص) ـ غير معياري (س)

س١ اذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب ل الذي يحقق ان

ل(-ل ≤ ص ≤ ل) = ٠,٩٩٦٠

ــ الحل ــ



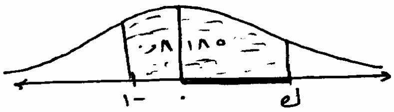
∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ل) = $\frac{٠,٩٩٦٠}{٢}$

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ل) = ٠,٤٩٨٠ بالكشف في الجدول عن العدد المناظر للجزء المساحي نجد ان $\boxed{ل = ٢,٨٨}$

س٢ اذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً فأوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب ل الذي يحقق ان

ل(-١ < ص < ل) = ٠,٨١٨٥

ــ الحل ــ



∵ ل(٠ < ص < ل) = ٠,٨١٨٥ - ل(٠ < ص < ١)

= ٠,٨١٨٥ - ٠,٣٤١٢

ل(٠ < ص < ل) = ٠,٤٧٧٢ بالكشف في الجدول عن العدد المناظر للجزء المساحي نجد ان $\boxed{ل = ٢}$

س٣ اذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ فأوجد قيمة

(أ) ل(س < μ) (ب) ل($\mu - \sigma$ < س < $\mu + \frac{1}{4}\sigma$) (ج) ل($\mu + \frac{1}{2}\sigma$ ≤ س ≤ $\mu + \frac{3}{4}\sigma$)

(د) ل(س ≥ $\mu + 2\sigma$)

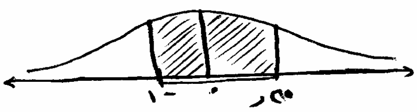
ــ الحل ــ

(أ) ∵ ل(س < μ) = ل(ص < $\frac{\mu - \mu}{\sigma}$) = ل(ص < $\frac{0}{\sigma}$) = ل(ص < ٠) = ٠,٥

(ب) ∵ ل($\mu - \sigma$ < س < $\mu + \frac{1}{4}\sigma$) = ل($\frac{\cancel{\mu} - \sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}$ < ص < $\frac{\cancel{\mu} + \frac{1}{4}\sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}$) = ل(-١ < ص < ٠,٢٥)

= ل(٠ < ص < ٠,٢٥) + ل(٠ < ص < ١)

= ٠,٠٩٨٧ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٤٤٠٠



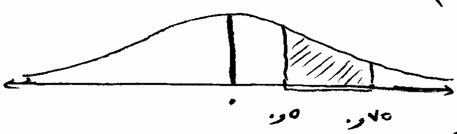
(ج) ∵ ل($\mu + \frac{1}{2}\sigma$ ≤ س ≤ $\mu + \frac{3}{4}\sigma$) = ل($\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma - \mu}{\sigma}$ ≤ ص ≤ $\frac{\mu + \frac{3}{4}\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل($\frac{1}{2}$ ≤ ص ≤ $\frac{3}{4}$) = ل(٠,٥ ≤ ص ≤ ٠,٧٥)

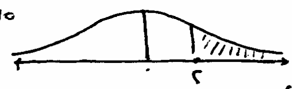
= ل(٠ < ص < ٠,٧٥) - ل(٠ < ص < ٠,٥)

= ٠,٢٧٣٤ - ٠,١٩١٥

= ٠,٠٨١٩



(د) ل(س ≥ $\mu + 2\sigma$) = ل(ص ≥ $\frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}$) = ل(ص ≥ ٢)



= ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ٢) = ٠,٥ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

س٤ إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي μ = ١٧٠ جـ وتباينه σ^2 = ٤٠٠ جـ
فإذا اخترت أسرة عشوائيا من هذه الأسر فأوجد
(أ) عدد الأسر التي ينحصر دخلها بين ١٦٠ جـ ، ٢٠٠ جـ
(ب) النسبة المئوية للأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠

~ الحل ~

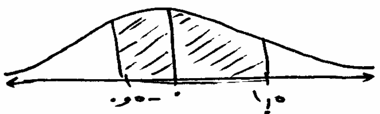
μ = ١٧٠ ، σ^2 = ٤٠٠
$\Leftarrow$ σ = ٢٠

(أ) ∵ ل(١٦٠ ≤ س ≤ ٢٠٠) = ل($\frac{١٦٠-\mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{٢٠٠-\mu}{\sigma}$)

= ل($\frac{١٦٠-١٧٠}{٢٠}$ < ص < $\frac{٢٠٠-١٧٠}{٢٠}$) = ل(−٠,٥ < ص < ١,٥)

= ل(٠ < ص < ١,٥) + ل(٠ < ص < ٠,٥)

= ٠,٣٤٣٢ + ٠,١٩١٥ = ٠,٥٣٤٧



∵ العدد = الاحتمال × العدد الكلي

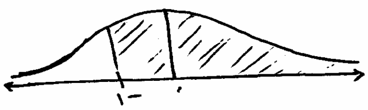
= ٠,٥٣٤٧ × ١٠٠٠ ≃

٥٣٥ أسرة

(ب) ∵ ل(س > ١٥٠) = ل(ص > $\frac{١٥٠-١٧٠}{٢٠}$) = ل(ص > −١)

= ٠,٥ + ل(٠ < ص < ١)

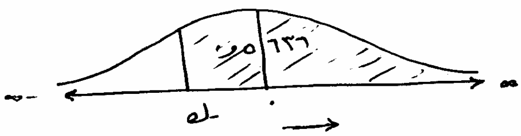
= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣



∵ النسبة المئوية = الاحتمال × ١٠٠ = ٨٤,١٣ ٪

س٥ إذا كان س متغير عشوائي طبيعي متوسطه الحسابي μ = ١٠٠ ، انحرافه المعياري σ = ٤ وكان
ل(س > أ) = ٠,٥٦٣٦ فأوجد أ

~ الحل ~



∵ ل(س > أ) = ٠,٥٦٣٦

∴ ل(ص > $\boxed{\frac{أ-١٠٠}{٤}}$) = ٠,٥٦٣٦

∴ ل(ص > ك) = ٠,٥٦٣٦ > ٠,٥ ∴ ك سالبة

∵ ل(ك < ص < ٠) = ٠,٥٦٣٦ − ٠,٥ = ٠,٠٦٣٦

بالكشف نجد أن ك = −٠,١٦

∵ $\frac{أ-١٠٠}{٤}$ = ك

∴ $\frac{أ-١٠٠}{٤}$ = −٠,١٦ $\Leftarrow$ أ − ١٠٠ = −٠,٦٤

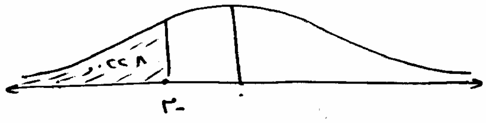
$\Leftarrow$ أ = ١٠٠ − ٠,٦٤

$\boxed{أ = ٩٩,٣٦}$

س٦) اذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ والانحراف المعياري $\sigma = ٥$ فأوجد μ التي تجعل ان

ل(س < ٣٥) = ٠٫٠٢٢٨

~ الحل ~



∴ ل(ص < $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$) = ٠٫٠٢٢٨

∴ ل(ص < م) = ٠٫٠٢٢٨ < ٠٫٥ ∴ م سالبة

∴ ل(٠ > ص > م) = ٠٫٥٠٠٠ − ٠٫٠٢٢٨ ∴ ل(٠ > ص > م) = ٠٫٤٧٧٢

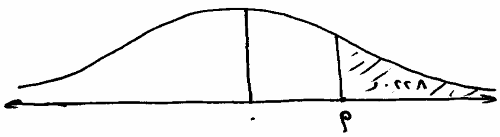
بالكشف نجد أن م = −٢ ∴ $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$ = −٢ ∴ ٣٥ − μ = −١٠

$\boxed{∴ \mu = ٤٥}$

س٧) اذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي $\mu = ٥٥$ والانحراف المعياري σ فأوجد تباينه

اذا كان ل(س ≥ ٦٥) = ٠٫٠٢٢٨

~ الحل ~



∴ ل(ص ≥ $\frac{٦٥ - ٥٥}{\sigma}$) = ٠٫٠٢٢٨

∴ ل(ص ≥ $\frac{١٠}{\sigma}$) = ٠٫٠٢٢٨

ل(ص ≥ م) = ٠٫٠٢٢٨ < ٠٫٥ ∴ م موجب

∴ ل(٠ ≥ ص ≥ م) = ٠٫٥ − ٠٫٠٢٢٨

ل(٠ ≥ ص ≥ م) = ٠٫٤٧٧٢ $\xrightarrow[\text{في الجدول}]{\text{بالكشف}}$ ∴ م = ٢ ∴ $\frac{١٠}{\sigma}$ = ٢ ⟸ ٢σ = ١٠

σ = ٥

∴ σ^2 التباين = ٢٥

س٨) اذا كان المتوسط الحسابي لدرجات امتحان ما هو ٧٢ وتباينه ٨١ فاذا علم ان ١٠٪ من الطلاب الاوائل بالترتيب يحصلون على تقدير ممتاز فما هي أقل درجة (أدنى درجة) يجب ان يحصل عليها الطالب ليحصل على تقدير ممتاز

~ الحل ~

نفرض ان الدرجة هي ك لتكوين المعادلة

$\mu = ٧٢$

$\sigma^2 = ٨١ \Leftarrow \sigma = ٩$

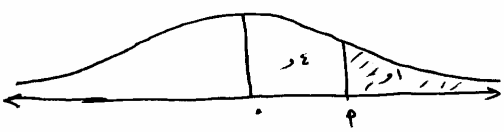
ل(س > ك) = ١٠٪

∴ ل(ص > $\frac{ك - ٧٢}{٩}$) = ٠٫١

∴ ل(ص > م) = ٠٫١ < ٠٫٥ ∴ م موجب

∴ ل(٠ < ص < م) = ٠٫٥ − ٠٫١

∴ ل(٠ < ص < م) = ٠٫٤٠٠٠ بالكشف في الجدول نجد أن م = ١٫٢٨



∴ $\frac{ك - ٧٢}{٩}$ = ١٫٢٨ ⟸ ك = ٩ × ١٫٢٨ + ٧٢

⟸ $\boxed{ك = ٨٣٫٥٢}$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

س٩) أخذت عينة من طلاب مدارس محافظة ما عددها ٥٠٠٠ طالب وكان عدد الطلاب الذين تزيد أعمارهم عن ١٦ سنة (علماً بأن الحد الأقصى للسن في هذه المرحلة ١٩ سنة) مساوياً ٣٠٤٣ طالباً وكانت أعمارهم تتبع توزيعاً طبيعياً بتباين = ١,٤٤

أوجد الوسط الحسابي μ.

الحل

∵ $\sigma^2 = ١,٤٤$

∴ $\sigma = ١,٢$

$\mu = ?$

ل$(س > ١٦) = ٣٠٤٢$

∵ عدد عناصر أي حدث = احتماله × عدد عناصر ف

∴ $٣٠٤٣ =$ ل$\left(ص > \frac{١٦ - \mu}{\sigma}\right) \times ٥٠٠٠$

ل$\left(ص > \frac{١٦ - \mu}{١,٢}\right) = \frac{٣٠٤٣}{٥٠٠٠}$

∴ ل$(ص > م) = ٠,٦٠٨٦$ $> ٠,٥$ ∴ م سالب

ل$(٠ < ص < م) = ٠,٦٠٨٦ - ٠,٥ = ٠,١٠٨٦$ ∴ $\boxed{م = -٠,٢٨}$

∴ $\frac{١٦ - \mu}{١,٢} = -٠,٢٨ \Longrightarrow \mu = ١٦ + ١,٢ \times ٠,٢٨$ ∴ $\boxed{\mu = ١٦,٣٣٦}$

س١٠) في اختبار مادة التي يحصل عليها طلبة إحدى الكليات وكانت موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٧٥ درجة وتباين ١٠٠ (علماً بأن الدرجة النهائية للمادة ١٠٠ درجة) أوجد

١) الدرجات المعيارية للطالبين أ، ب حصلا على ٦٠، ٩٦ درجة على الترتيب

٢) الدرجات التي حصل عليها طالبان جـ، د إذا كانت درجاتهما المعيارية $-٠,٦$ ، $١,٢$

الحل

١) ∵ الدرجة المعيارية للطالب أ $= \frac{٦٠ - \mu}{\sigma}$

$= \frac{٦٠ - ٧٥}{١٠} = -١,٥$

بالمثل الدرجة المعيارية للطالب ب $= \frac{٩٦ - ٧٥}{١٠} = ٢,١$

٢) ∵ الدرجة المعيارية التي حصل عليها طالب جـ $= \frac{الدرجة\ س_١ - \mu}{\sigma}$

∴ $-٠,٦ = \frac{س_١ - ٧٥}{١٠}$

∴ $س_١ - ٧٥ = -٠,٦ \times ١٠$

∴ $س_١ = -٠,٦ \times ١٠ + ٧٥$

∴ $س_١ = ٦٩$ درجة

بالمثل ∵ الدرجة المعيارية للطالب د $= \frac{الدرجة\ س_٢ - \mu}{\sigma}$

∴ $١,٢ = \frac{س_٢ - ٧٥}{١٠}$

∴ $س_٢ = ٨٧$

(س ١١) إذا كانت أوزان مجموعة من الأشخاص هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي ١٦٥ = μ رطلاً وانحراف معياري ١٠ = σ رطلاً فأوجد احتمال أن يختلف وزن أي شخص عن μ بما لا يزيد عن ٢٠ رطلاً

~ الحل ~

بفرض أن س وزن الأشخاص

μ = ١٦٥
σ = ١٠

∴ ل (μ − ٢٠ ≤ س ≤ μ + ٢٠)

= ل (١٦٥ − ٢٠ ≤ س ≤ ١٦٥ + ٢٠)

= ل (١٤٥ ≤ س ≤ ١٨٥) يحول إلى طبيعي معياري (ص)

= ل ((١٤٥ − ١٦٥)/١٠ ≤ ص ≤ (١٨٥ − ١٦٥)/١٠)

= ل (−١,٢٢ ≤ ص ≤ ١,٢٢)

وهنا نلاحظ يتم التقريب إجباري لرقمين عشريين تقرأ للجدول (الأعداد مقربة لرقمين عشريين)

= ٢ × ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٢) = ٢ × ٠,٤٠٨٢ = ٠,٨١٦٤

(س ١٢) بفرض أن أنصاف الأقطار للحلزونات التي تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي ٢٥ م وانحراف معياري σ = ٢٠ يعتبر الحلزون معيباً إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ أو يكبر عن ٢٨ أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيباً.

~ الحل ~

∵ ل (س < ٢٠) = ل (ص < (٢٠ − ٢٥)/٢٠) = ل (ص < −٠,٢٥) = ٠,٥ − ل (٠ < ص < ٠,٢٥)

= ٠,٥٠٠٠ − ٠,٠٩٨٧ = ٠,٤٠١٣ ⟵ (I)

∵ ل (س > ٢٨) = ل (ص > (٢٨ − ٢٥)/٢٠) = ل (ص > ٠,١٥) = ٠,٥ − ل (٠ < ص < ٠,١٥)

= ٠,٥٠٠٠ − ٠,٠٥٩٦ = ٠,٤٤٠٤ ⟵ (II)

من (I)، (II) بجمع (بالجمع)

احتمال أن يكون الحلزون معيباً = ل (س < ٢٠) + ل (س > ٢٨)

= ٠,٤٠١٢ + ٠,٤٤٠٤ = ٠,٨٤١٧

ملاحظة هناك حل آخر

∴ احتمال أن يكون الحلزون غير معيب (سليم) = ل (٢٠ < س < ٢٨)

= ل ((٢٠ − ٢٥)/٢٠ < ص < (٢٨ − ٢٥)/٢٠) = ل (−٠,٢٥ < ص < ٠,١٥)

= ناتج

∴ احتمال أن يكون الحلزون معيباً = ١ − الناتج

أكمل

مع أطيب التمنيات
د/ عبد اللطيف غزال

الباب (الرابع - الخامس)

«معامل الارتباط - معادلات خط الانحدار»

واليك عزيزي الطالب وعزيزتي الطالبة :-

← قوانين ايجاد معامل الارتباط (ر) بين متغيرين س، ص

① $$\text{ر} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن} \times \text{مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}\ \sqrt{\text{ن} \times \text{مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}}$$ قانون بيرسون

② $$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \times \text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - ١)}$$ قانون سبيرمان (ارتباط الرتب)

حيث ن عدد القيم

③ $$\text{ر}^2 = \text{أ جـ}$$ العلاقة بين معامل الارتباط ومعاملي الانحدار

«ملاحظة اشارة ر هي نفس اشارتي أ ، جـ»

← قوانين الانحدار :-

⇐ **أولاً** معادلة خط انحدار ص على س

$$\boxed{\text{ص} = \text{أ س} + \text{ب}}$$

$$\text{أ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$ (معامل انحدار ص على س)

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ} \times \text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

⇐ **ثانياً** معادلة خط انحدار س على ص

$$\boxed{\text{س} = \text{جـ ص} + \text{د}}$$

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}$$ (معامل انحدار س على ص)

$$\text{د} = \frac{\text{مجـ س} - \text{جـ} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

ملاحظة / نوع معامل الارتباط يتوقف على قيمته

القيمة	النوع
① ر = ١	طردي تام
② ر = −١	عكسي تام
③ ر = ٠	منعدم
④ ٠ < ر < ١	طردي
⑤ −١ < ر < ٠	عكسي

ملاحظة : "جميع النواتج تكتب كاملة وبدون تقريب" «ونرجو الدقة في استخدام الحاسبة ومراجعة نقل النواتج»

س١ إذا كان مجـ س = ٥٠ ، مجـ ص = ٦٠ ، مجـ س ص = ٣٦١ ، مجـ س² = ٣١٠ ، مجـ ص² = ٤٩٨ ، ن = ١٠

فأوجد
(أ) معامل الارتباط الخطي بين س ، ص لبيرسون ثم حدد نوعه .
(ب) معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ٦

— الحل —

(أ) ∵ ر = $\dfrac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن} \times \text{مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}\sqrt{\text{ن} \times \text{مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}}$ = $\dfrac{١٠ \times ٣٦١ - ٥٠ \times ٦٠}{\sqrt{١٠ \times ٣١٠ - ٥٠ \times ٥٠}\sqrt{١٠ \times ٤٩٨ - ٦٠ \times ٦٠}}$

= $\dfrac{٦١٠}{\sqrt{٦٠٠}\sqrt{١٣٨٠}}$ = $\dfrac{٦١٠}{\sqrt{٨٢٨٠٠٠}}$ = ٠,٦٧٠٣٧٠١٤٨

نوعه طردي

(ب) بفرض أن معادلة خط انحدار ص على س هي

ص = أ س + ب ← (I)

∵ أ = $\dfrac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$ = $\dfrac{١٠ \times ٣٦١ - ٥٠ \times ٦٠}{١٠ \times ٣١٠ - ٥٠ \times ٥٠}$ = $\dfrac{٦١}{٦٠}$ ∴ أ = $\dfrac{٦١}{٦٠}$ ← (١)

∵ ب = $\dfrac{\text{مجـ ص} - \text{أ} \times \text{مجـ س}}{\text{ن}}$ = $\dfrac{٦٠ - ١,٠١٦٦٦٦ \times ٥٠}{١٠}$ = $\dfrac{١١}{١٢}$ ∴ ب = $\dfrac{١١}{١٢}$ ← (٢)

بالتعويض من (١) ، (٢) في (I) نحصل على

ص = $\dfrac{٦١}{٦٠}$ س + $\dfrac{١١}{١٢}$ وهي معادلة خط انحدار ص على س

ولإيجاد قيمة ص عندما س = ٦
بالتعويض في المعادلة الناتجة نحصل على ص = $\dfrac{٤٢١}{٦٠}$

س٤ إذا كان معامل انحدار ص على س هو −٠,٢٥ ، ومعامل انحدار س على ص هو −٠,١٨ فأوجد معامل الارتباط الخطي بين س ، ص ثم حدد نوعه .

— الحل —

أ = −٠,٢٥
جـ = −٠,١٨
ر = ؟

∵ ر² = أ جـ
∴ ر² = −٠,٢٥ × −٠,١٨
ر² = ٠,٢٥ × ٠,١٨
∴ ر = − $\sqrt{٠,٢٥ \times ٠,١٨}$
ر = −٠,٢١٢١٣٢٠٣٤
نوعه عكسي

إشارة ر مثل إشارة أ ، جـ
لتحديد نوع معامل الارتباط بدقة

ملاحظة: يستخدم هذا القانون إذا أعطى اثنين منها والمطلوب الثالث سواء كان ر أو أ أو جـ

« ضعيف جداً ← ضعيف ← مقبول ← جيد ← جيد جداً ← ممتاز »

س٣: من بيانات الجدول الآتي :-

س	مقبول	مقبول	جيد جداً	ممتاز	جيد جداً	مقبول
ص	ضعيف	جيد	ممتاز	جيد جداً	جيد	جيد

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص ثم حدد نوعه .

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف (فرق الرتب)	ف² (مربع فرق الرتب)
مقبول ٢	ضعيف ١	٢	١	١	١
مقبول ٢	جيد ٢	٢	٣	-١	١
جيد جداً ٥	ممتاز ٦	٤,٥	٦	-١,٥	٢,٢٥
ممتاز ٦	جيد جداً ٥	٦	٥	١	١
جيد جداً ٤	جيد ٢	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
مقبول ١	جيد ٤	٢	٣	-١	١
					مج ف² = ٨,٥٠

∵ ر = ١ - $\frac{٦ \times مج ف^٢}{ن(ن^٢-١)}$

∴ ر = ١ - $\frac{٨,٥ \times \cancel{٦}}{٣٥ \times \cancel{٦}}$

= ١ - $\left[\frac{٨,٥}{٣٥}\right]$

∴ ر = ٠,٧٥٧١٤٢٨٥٧

∴ نوعه طردي

ملحوظة: إذا كان مج ف² = صفر فإن ر = ١ وهذا الناتج يظهر عندما يكون ف لجميع رتب المتغيرين = صفر وتلك هي الحل

س٤: من بيانات الجدول الآتي :- أوجد معامل ارتباط لسبيرمان بين س، ص ثم حدد نوعه .

س	٨	٧	٦	٥	٩	٧	٥
ص	٦	٥	٨	٤	٨	٤	٨

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
٨ ٦	٦ ٤	٦	٤	٢	٤
٧ ٤	٥ ٣	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
٦ ٢	٨ ٥	٣	٦	-٣	٩
٥ ٢	٤ ١	١,٥	١,٥	—	—
٩ ٧	٨ ٦	٧	٦	١	١
٧ ٤	٤ ١	٤,٥	١,٥	٣	٩
٥ ١	٨ ٧	١,٥	٦	-٤,٥	٢٠,٢٥
					مج ف² = ٤٥,٥٠

∵ ر = ١ - $\frac{٦ \times مج ف^٢}{ن(ن^٢-١)}$

∴ ر = ١ - $\frac{٤٥,٥ \times \cancel{٦}}{٨ \times ٤٨ \times ٧}$

ر = ١ - $\left[\frac{٤٥,٥}{٥٦}\right]$

ر = ٠,١٨٧٥

نوعه هو طردي

ملحوظة: يستخدم الترتيب المتعادل للتكرار والتنازلي

مع أطيب تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

أ/ [illegible]