

حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب :

١- فى الزوج المرتب (p ، ب) يسمى ا بالمسقط الاول ، ب بالمسقط الثانى .

٢- كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة وواحدة فقط فى المستوى الاحداثى .

٣- إذا كان (p ، ب) = (س ، ص) فإن : p = س ، ب = ص

مثلا: إذا كان (p ، ب) = (٥ ، ٣) فإن p = ٥ ، ب = ٣

٤- إذا كان p ≠ ب فإن (p ، ب) ≠ (ب ، p) مثلا (٣ ، ٥) ≠ (٥ ، ٣)

مثال : أوجد قيمة س ، ص فى كل مما ياتى :

$$(١) \quad (٦ ، ٢ + س) = (٥ ، ص) \quad (٢) \quad (٢ - س^٢ ، ١ - ص^٣) = (٨ ، ١)$$

$$(٣) \quad (١ + ص ، س^٥) = (٣٢ ، \sqrt[٣]{٢٧}) \quad (٤) \quad (٢ ، س^٢) = (١ ، ص^٢)$$

الحل :

$$(١) \quad (٦ ، ٢ + س) = (٥ ، ص) \quad \therefore ٦ = ٢ + س ، ٥ = ص$$

$$\therefore ٦ = ص ، ٣ = ٢ - ٥ = س$$

$$(٢) \quad (٢ - س^٢ ، ١ - ص^٣) = (٨ ، ١)$$

$$\therefore ٢ - س^٢ = ٨ ، ١ - ص^٣ = ١ \Rightarrow ٩ = ١ + ٨ = س^٢ \Rightarrow ٣ = \pm س$$

$$\therefore ١ = ص^٣ \Rightarrow ١ = ص$$

$$(٣) \quad (١ + ص ، س^٥) = (٣٢ ، \sqrt[٣]{٢٧}) \quad \therefore ١ + ص = \sqrt[٣]{٢٧} ، س^٥ = ٣٢ \therefore س = ٢$$

$$\therefore ١ + ص = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣ \therefore ٣ = ١ + ص \therefore ٢ = ٣ - ١ = ص$$

$$(٤) \quad (٢ ، س^٢) = (١ ، ص^٢) \quad \therefore ٢ = س^٢ ، ١ = ص^٢ \therefore ٢ = \pm \sqrt[٢]{٢} ، ١ = \pm \sqrt[٢]{١}$$

$$\therefore ٢ = س^٢ \Rightarrow س = \pm \sqrt[٢]{٢} ، ١ = ص^٢ \Rightarrow ص = \pm ١$$

تدريب : أوجد p ، b فى كل مما يأتى :

$$(أ) (p, b) = (-5, 9) \quad (ب) (p-2, b+1) = (2, -3)$$

$$(ج) (6, b-3) = (2-p, 1) \quad (د) (-2, 7-p) = (b^2-1, 2)$$

حاصل الضرب الديكارتي :

إذا كانت S ، M مجموعتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين $S \times M$ يكتب $S \times M$ ويعرف كالآتي :

$$S \times M = \{ (s, m) : s \in S, m \in M \}$$

أي أن $S \times M$ هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول S ومسقطها الثاني M .

مثال [١]: إذا كانت $S = \{ 3, 6, 9 \}$ ، $M = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ أوجد كل من $S \times M$ ، $M \times S$ ،

$(S \times M) \cap (M \times S)$ ماذا تلاحظ؟

$$\text{الحل: } S \times M = \{ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4), (9, 5), (9, 6) \}$$

عدد عناصر $S \times M =$ عدد عناصر $S \times$ عدد عناصر M

$$\text{أي أن } n(S \times M) = n(S) \times n(M) = 3 \times 6 = 18$$

$$\text{بينما } M \times S = \{ (1, 3), (1, 6), (1, 9), (2, 3), (2, 6), (2, 9), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 6), (4, 9), (5, 3), (5, 6), (5, 9), (6, 3), (6, 6), (6, 9) \}$$

$$\text{وكذلك } n(M \times S) = n(M) \times n(S) = 6 \times 3 = 18$$

ملاحظات :

(١) إذا كانت S ، M مجموعتين منتهيتين و غير خاليتين

$$\text{فإن } S \times M = \{ (a, b) : a \in S, b \in M \}$$

(٢) $S \times M \neq M \times S$ حيث : $S \neq M$

$$n(S \times M) = n(M \times S) = n(S \times M) = n(M \times S)$$

حيث n ترمز الى عدد عناصر المجموعة

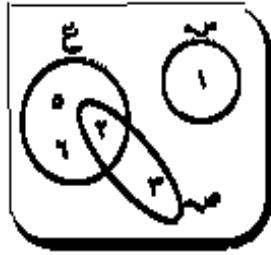
(٣) إذا كان (م ، ك) g s \times s فإن ك g s ، م g s

(٤) إذا كانت s مجموعة غير خالية فإن s \times s = $\{ (ب ، ب) : ب \in g \}$ و تكتب أحيانا s^2 و تقرأ (s اثنين)

مثال ٢ إذا كانت $s = \{1\}$ ، $s = \{2, 3\}$ ، $s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مثل المجموعات s ، s ، s ، ع بشكل فن ثم أوجد:

- أولاً: $s \times s$ ، $s \times s$ ، $s \times s$ ، $s \times s$ ، $s \times s$
- ثانياً: $(s \times s) \cup (s \times s)$ ، $(s \times s) \cap (s \times s)$
- ثالثاً: $(s \times s) \cap (s \times s)$
- رابعاً: $(s \times s) \cap (s \times s)$
- خامساً: $(s - s) \times (s \cup s)$

الحل : أولاً:



$$\begin{aligned} s \times s &= \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\} \\ s \times s &= \{2, 3\} \times \{2, 3\} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ s \times s &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\} \\ (s \times s) \cup (s \times s) &= \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ (s \times s) \cap (s \times s) &= \{(2, 2)\} \\ (s \times s) \cap (s \times s) &= \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ (s \times s) \cap (s \times s) &= \{(2, 2)\} \\ (s - s) \times (s \cup s) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \end{aligned}$$

مثال : إذا كانت $s = \{1, 2\}$ ، $s = \{0, 4\}$ ، $s = \{2, 0, 5, 4\}$ أوجد :

- (أ) $s \times s$
- (ب) $s \times s$
- (ج) s^2
- (د) $(s \times s) \cup (s \times s)$
- (هـ) $(s \times s) \cup (s^2)$
- (و) $(s \times s) \cap (s^2)$

الحل :

(أ) $s \times s = \{(0, 1), (0, 2), (4, 1), (4, 2)\}$

$$(ب) ص \times ع = \{ (٤, ٤), (٥, ٤), (٢, ٤) \}$$

$$\{ (٤, ٠), (٥, ٠), (٢, ٠) \}$$

$$(ج) س^٢ = \{ (٢, ٢), (١, ٢), (٢, ١), (١, ١) \}$$

$$(د) ٦ = ٣ \times ٢ = (س \times ع) \text{ ص}$$

$$(هـ) ٤ = ٢ \times ٢ = (ص \times ص) \text{ ص}$$

$$(و) ٩ = ٣ \times ٣ = (ع \times ع) \text{ ص}$$

مثال : إذا كانت $(س - ٧, ٨) = (٨, ص + ٣)$ أوجد قيمة $\sqrt{س + ٣}$

$$\text{الحل : } Z : (س - ٧, ٨) = (٨, ص + ٣)$$

$$\therefore س - ٧ = ٨, ٨ = ص + ٣ \leftarrow س = ١, ص = ٨ - ٣ = ٥$$

$$\sqrt{س + ٣} = \sqrt{١ + ٥} = \sqrt{٦} = ٤$$

مثال : إذا كانت :

$$س \times ص = \{ (٥, ١), (٦, ١), (٥, ٢), (٦, ٢), (٥, ٥), (٦, ٥) \}$$

$$\text{أوجد (أ) } س, ص \text{ (ب) } ن(س \times ص) \text{ (ج) } ص^٢ \text{ (د) } ن(س)$$

$$\text{الحل : (أ) } س = \{ ٥, ٢, ١ \}, ص = \{ ٦, ٥ \}$$

$$\text{(ب) } ن(س \times ص) = ن(س) \times ن(ص) = ٦ = ٢ \times ٣$$

$$\text{(ج) } ص^٢ = \{ (٥, ٥), (٦, ٥), (٥, ٦), (٦, ٦) \}$$

$$\text{(د) } ن(س) = ٩ = ٣ \times ٣$$

تمثيل حاصل الضرب الديكارتي :

أولاً: المخطط السهمي

ترسم سهمًا من كل عنصر يمثل المسقط الأول (وهي عناصر المجموعة س) إلى

إلى كل عنصر يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر المجموعة ص)

أي أن: المخطط السهمي للحاصل الديكارتي يُمثل كل زوج مرتب يسهم يخرج من

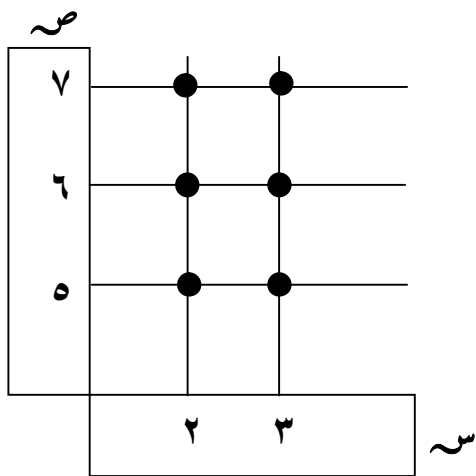
مسقطه الأول وينتهي عند مسقطه الثاني.

ثانيًا: المخطط البياني (الشبكة البيانية المتعامدة)
تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصر المجموعة S أفقيًا، وعناصر
المجموعة S رأسيًا فتكون نقط تقاطع الخطوط الأفقية والرأسيّة
تمثل الأزواج المرتبة لعناصر حاصل الضرب الديكارتي $S \times S$.

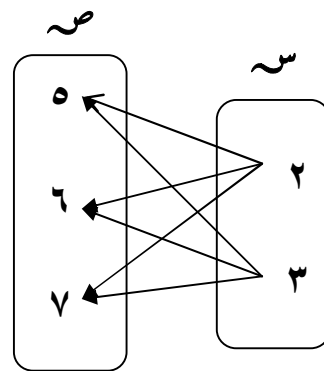
مثال: إذا كانت $S = \{ 2, 3 \}$ ، $S = \{ 5, 6, 7 \}$ أوجد $S \times S$ ومثله
بمخطط سهمى و آخر بياني .

الحل :

$S \times S = \{ (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7) \}$



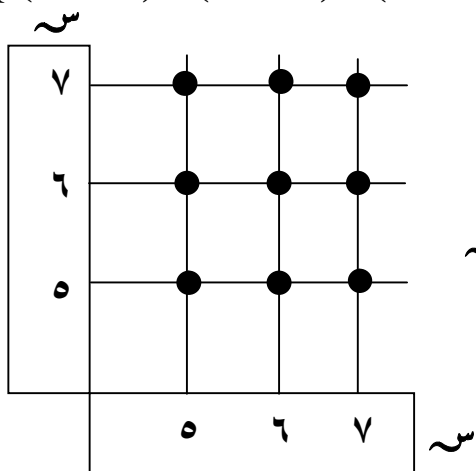
المخطط البياني



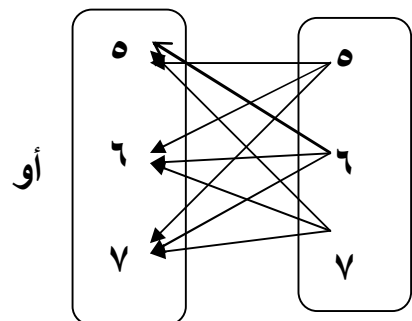
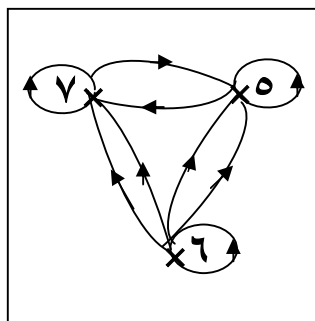
المخطط السهمى

مثال : إذا كانت $S = \{ 5, 6, 7 \}$ أوجد $S \times S$ ومثله بمخطط سهمى و آخر بياني .
الحل :

$S \times S = \{ (5, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7) \}$



$$9 = 3 \times 3 = (S \times S) \quad \text{أو} \quad 9 = (S)^2$$



ملحوظة : إذا كانت S مجموعة غير منتهية (لا يمكن حصر عدد عناصرها)
فإن عدد عناصر $S \times S$ يكون غير منتهى .

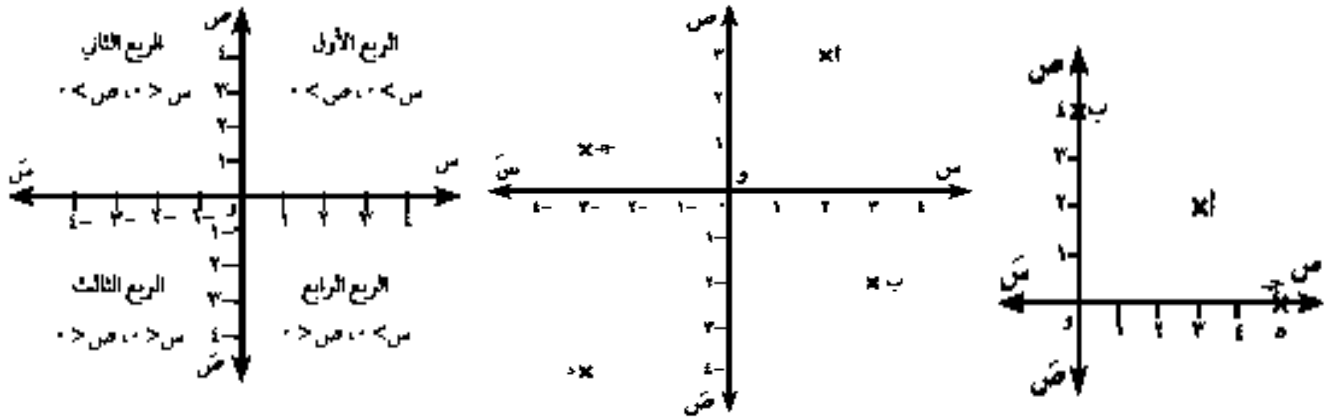
حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية و التمثيل البياني له :

$$S \times T = \{ (s, t) : s \in S, t \in T \}$$

$$S \times S = \{ (s, s) : s \in S \}$$

$$S \times S = \{ (s, s) : s \in S \}$$

$$S \times S = \{ (s, s) : s \in S \}$$



مثال : كون شبكة تربيعية متعامدة للحاصل الديكارتي $S \times T$ ثم اذكر الربع الذى تقع فيه
أو المحور الذى ينتمى إليه كل من النقط الآتية :

- م (٢ ، ٢) ، ب (٢ - ، ٢ -) ، ج (٢ - ، ٣ -) ، د (٣ ، ١ -) ، هـ (٣ - ، ٠)
ز (٠ ، ٣) ، ط (٢ ، ٠)

الحل :

م (٢ ، ٢) تقع فى الربع الاول ، ب (٢ - ، ٢ -) تقع فى الربع الرابع

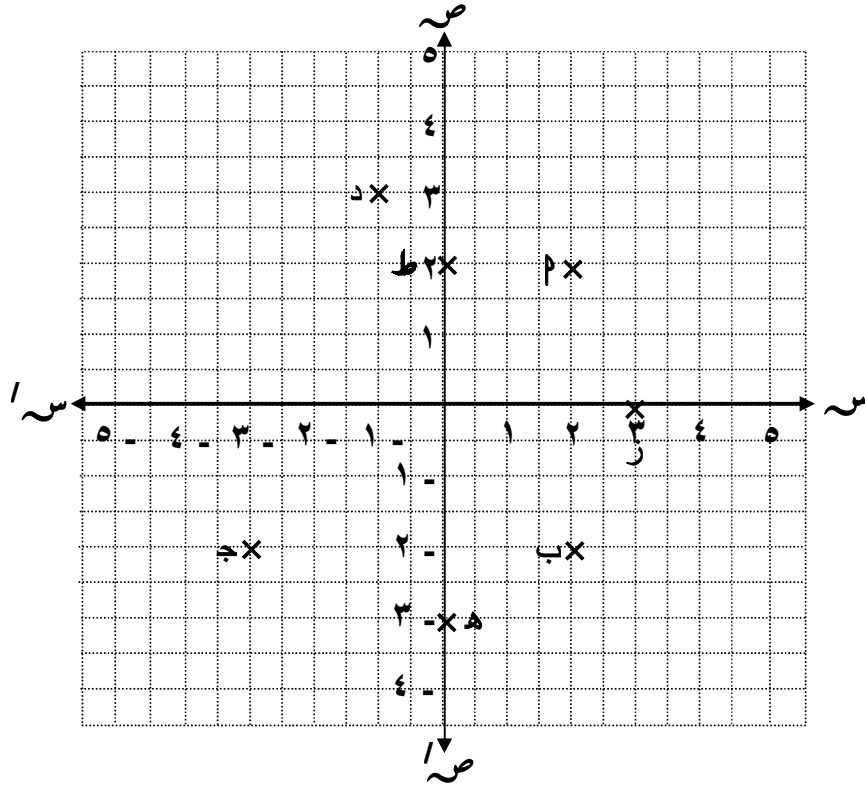
ج (٢ - ، ٣ -) تقع فى الربع الثالث ، د (٣ ، ١ -) تقع فى الربع الثانى

هـ (٣ - ، ٠) تقع على محور الصادات ، ز (٠ ، ٣) تقع على محور السينات

ط (٢ ، ٠) تقع على محور الصادات

تابع الحل :

تابع الحل :



تمارين على حاصل الضرب الديكارتي و تمثيله

أولا اكمل ما يأتى :

$$(١) \text{ إذا كان } (٣, ٥ + پ) = (٨, ١ - ب) \text{ فإن } پ = \dots, ب = \dots$$

$$(٢) \text{ إذا كان } (س, ص) = (١ + ص, ٣٢) \text{ فإن } س = \dots, ص = \dots$$

$$(٣) \text{ إذا كانت } (س, ١) = (٨, ٣ + ص) \text{ فإن } س = \dots, ص = \dots$$

$$(٤) \text{ إذا كانت } (س, ٩) = (٩, س) \text{ فإن } س = \dots$$

$$(٥) \text{ إذا كانت } س \times ص = \{(٩, ٣), (٦, ٣), (٩, ٢), (٦, ٢)\}$$

$$\{(٩, ٥), (٦, ٥),$$

$$\text{فإن : } س = \dots, ص = \dots$$

$$(٦) \text{ إذا كانت } (س \times ص) = ١٢, (س) = ٣ \text{ فإن } (ص) = \dots$$

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- (١) إذا كان $h = (s)$ ، $h = 3$ ، $h = (s \times v)$ ، $12 = h$ فإن h تساوي
 ط ٤ ط ٩ ط ١٥ ط ٣٦
- (٢) إذا كان $(0, 3) \in \{6, 2\} \times \{8, s\}$ فإن $s =$
 ط ٨ ط ٦ ط ٥ ط ٣
- (٣) إذا كانت النقطة $(5, b - 7)$ تقع على محور السينات فإن $b =$
 ط ٢ ط ٥ ط ٧ ط ١٢
- (٤) إذا كانت النقطة $(s - 2, 4 - s)$ حيث $s \in \mathbb{R}$ تقع في الربع الثالث فإن s تساوي:
 ط ٢ ط ٣ ط ٤ ط ٦

ثالثاً:

- (١) إذا كانت $s = \{2, 3\}$ ، $v = \{2, 4, 5\}$ أوجد:
 $h = s \times v$ ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.
 $h = (v^2)$
- (٢) إذا كان $s = v = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1)\}$ أوجد:
 $h = s, v, s \times v, v^2$
- (٣) إذا كان: $s = \{2, 4\}$ ، $v = \{5, 4\}$ ، $h = \{5, 6\}$ أوجد:
 $h = s \times (v \cap h)$ $h = (s - v) \times h$ $h = (s - v) \times (v - h)$
- (٤) على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتي $h \times h$ عين النقط الآتية:
 أ $(5, 4)$ ، ب $(3, 6)$ ، ج $(-2, 7)$ ، د $(-1, 6)$ ، هـ $(-4, -5)$ ، م $(6, 0)$ ، ك $(9, -0)$
 ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط.

العلاقات

مثال : إذا كانت $S = \{ -1, 1, 2 \}$ ، $T = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ و كانت E علاقة من S إلى T

حيث $E = \{ (-1, 2), (1, 4), (2, 8) \}$ لكل $p \in S$ ، $b \in T$

اكتب بيان E و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى .

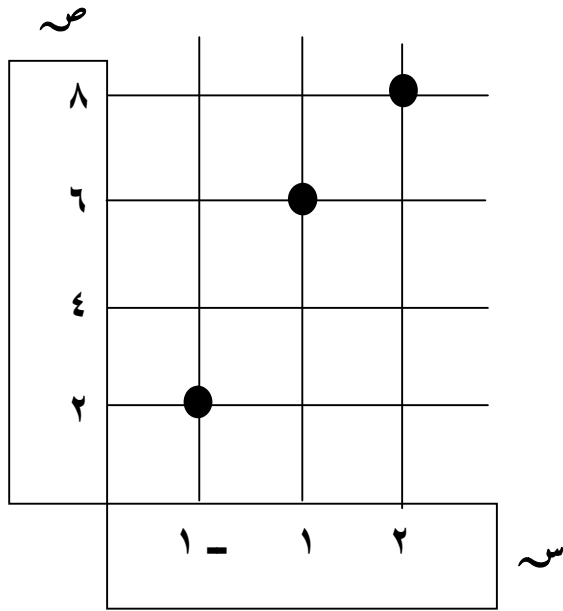
الحل :

$$\text{عندما } p = -1 \text{ : } b = 2 = 4 + (-1) \times 2$$

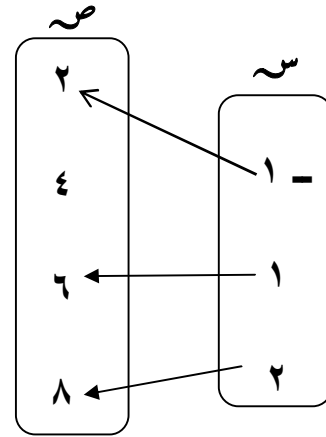
$$\text{عندما } p = 1 \text{ : } b = 4 = 4 + 1 \times 2$$

$$\text{عندما } p = 2 \text{ : } b = 8 = 4 + 2 \times 2$$

$$\therefore E = \{ (-1, 2), (1, 4), (2, 8) \}$$



المخطط البيانى



المخطط السهمى

تعريفات

(١) العلاقة من مجموعة S إلى مجموعة T حيث S ، T مجموعتان غير خاليتين هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر S ببعض أو كل عناصر T

(٢) بيان العلاقة من مجموعة S إلى مجموعة S هي مجموعة الأزواج المرتبة حيث المسقط الأول في كل منها ينتمى إلى المجموعة S ، و المسقط الثانى ينتمى إلى المجموعة S و نرسم له بالرمز E

(٣) إذا كانت E علاقة من مجموعة S إلى مجموعة S فإن $E \subseteq S \times S$

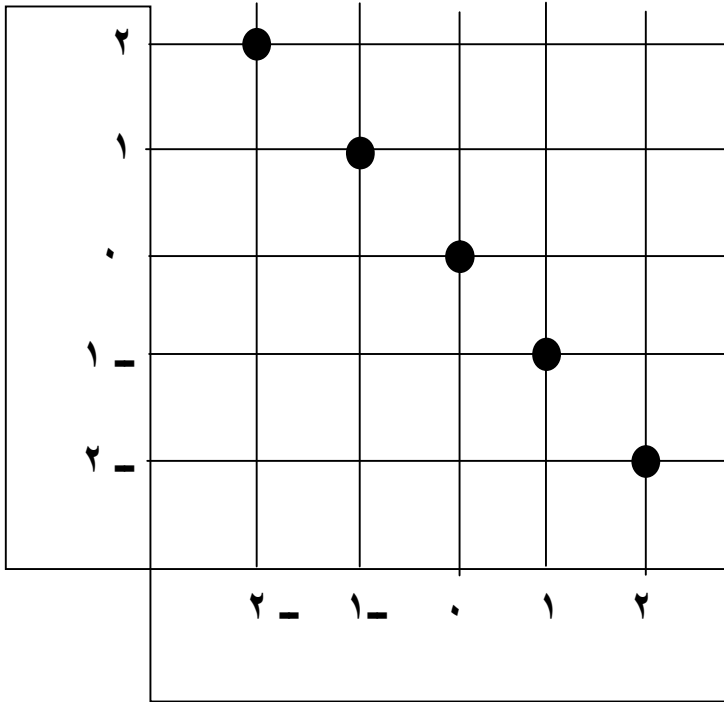
(٤) العلاقة من مجموعة إلى نفسها : إذا كان E علاقة من S إلى S فإن E تسمى علاقة على المجموعة S و تكون $E \subseteq S \times S$

مثال : إذا كانت $S = \{ -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ \}$ و كانت E علاقة على S

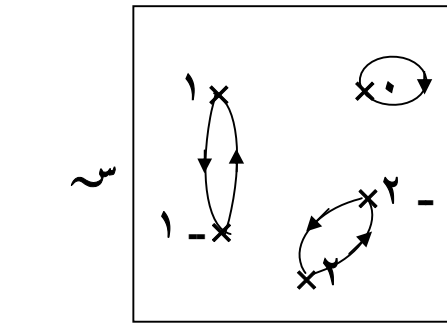
حيث $m \in E$ ب تعنى ((العدد m معكوس جمعى للعدد ب)) لكل m ، ب $\in S \times S$

اكتب بيان E و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى (ديكارتى) .

الحل : $E = \{ (-١ ، ١) ، (١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) \}$



المخطط الديكارتى



المخطط السهمى

تمارين على العلاقات

(١) إذا كانت $S = \{2, 6, 9\}$ ، $V = \{3, 7\}$ وكانت علاقة من

S إلى V حيث $a \in S$ تعنى $b \in V$ لكل $a \in S$ ، $b \in V$ ،

اكتب بيان العلاقة E ومثلها بمخطط سهمى وإذا كانت E فأوجد قيمة a .

(٢) إذا كانت $S = \{4, 5, 6, 8\}$ ، $V = \{1, 2, 3, 4\}$ وكانت E

علاقة من S إلى V حيث $a \in S$ تعنى $b \in V$ لكل $a \in S$ ، $b \in V$ ،

أولاً : اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمى .

ثانياً : إذا كان E S فأوجد قيمة S .

(٣) إذا كانت $S = \{1, 2, 3\}$ ، $V = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ وكانت E علاقة

من S إلى V حيث $a \in S$ تعنى $b \in V$ لكل $a \in S$ ، $b \in V$ ،

اكتب بيان العلاقة E ومثلها بمخطط سهمى .

(٤) إذا كانت $S = \{2, 0, 2\}$ وكانت E علاقة على S حيث $a \in S$ تعنى :

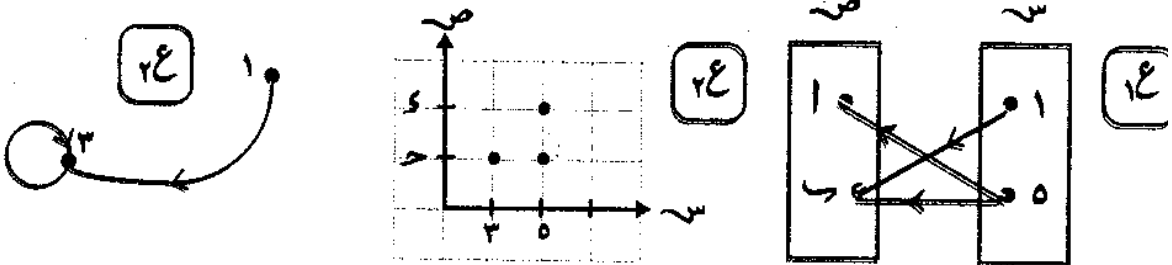
انعكوس جمعى للعدد b لكل $a \in S$ ، اكتب بيان E ومثلها .

(٥) إذا كانت $S = \{3, 5, 8\}$ ، $V = \{ \}$ وكانت E علاقة معرفة على S

حيث $a \in S$ تعنى $b + 1 =$ عدد زوجى لكل $a \in S$ ، $b \in S$ ،

اكتب بيان العلاقة E ومثلها بمخطط سهمى .

(٦) فى كل من المخططات الآتية اكتب E ، V ، S كمجموعة أزواج مرتبة .



الدالة (التطبيق)**تعريف الدالة :**

إذا كانت S ، M مجموعتين غير خاليتين فالدالة هي العلاقة من S إلى M والتي يرتبط فيها كل عنصر من عناصر S بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر M

يرمز للدالة من S إلى M بأحد الرموز f أو g أو h أو

وتكتب الدالة كالاتي :

$f: S \rightarrow M$ (وتقرأ f دالة من S إلى M) أما تكتب $f(S) = M$ ويسمي M بصورة

العنصر s بالدالة f

شروط الدالة :

يبين التعريف أنه لكي تكون العلاقة f دالة من S إلى M يجب توفر الشرطين الآتيين معاً:

١١) ظهور جميع عناصر S كمساقط أولي في بيان العلاقة.

١٢) عدم تكرار ظهور أي عنصر من عناصر S كمسقط أول في بيان العلاقة.

ومن ذلك نستنتج أن كل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.

المجال و المجال المقابل و المدى :

إذا كانت العلاقة f دالة من S إلى M فإن:

المجموعة S تسمى مجال الدالة.

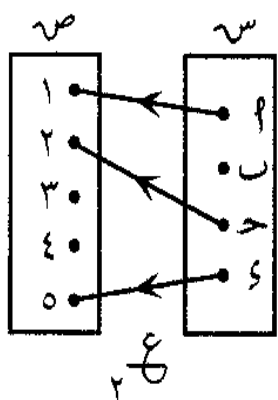
المجموعة M تسمى المجال المقابل للدالة.

مجموعة الصور المناظرة لعناصر S تسمى مدى الدالة. والمدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

و يلاحظ أنه إذا كانت العلاقة دالة يكون هناك مدى و إذا كانت ليست دالة لا يوجد مدى

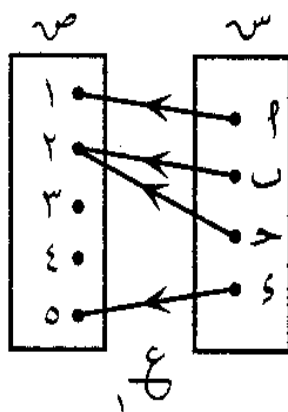
مثال: فى كل من الأشكال الآتية حدد أى العلاقات الآتية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وأوجد المدى إذا كان يمثل دالة

حيث $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



بيان $f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

$\therefore f$ ليست دالة لأن العنصر $3 \in S$ ليس له صورة فى V
(لم يخرج منه سهم)

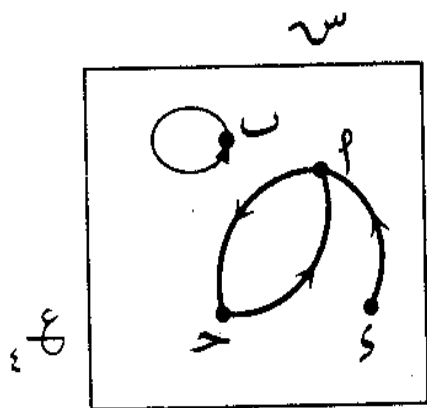


بيان $f = \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,3), (5,5)\}$

الحل:

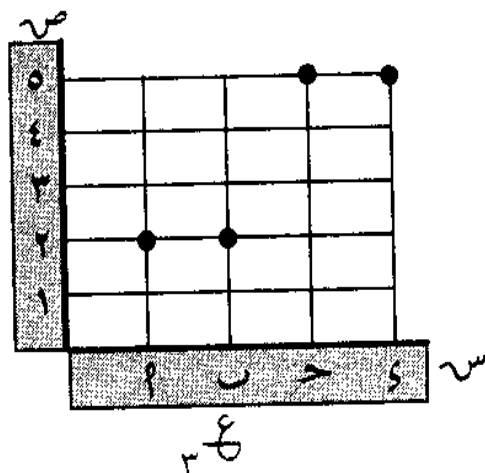
$\therefore f$ دالة

المدى = $\{1, 2, 3, 5\}$



بيان $f = \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,3), (5,3)\}$

$\therefore f$ دالة على S
المدى = $\{1, 2, 3\}$



بيان $f = \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2)\}$

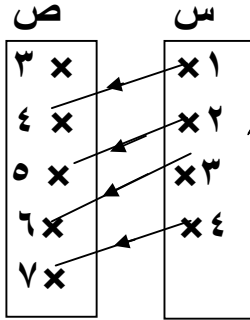
$\therefore f$ دالة من S إلى V
المدى = $\{1, 2\}$

مثال : إذا كانت $S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ ، $V = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$

و كانت f علاقة من S إلي V حيث $f = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6) \}$

لكل $x \in S$ ، $f(x) \in V$ ، اكتب بيان f ومثلها بمخطط سهمي و هل العلاقة دالة أم لا مع ذكر المدى إن وجد .

الحل :



$f = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6) \}$

ع دالة لأن كل عنصر في S يخرج منه سهم واحد فقط إلي V

المدى = $\{ 3, 4, 5, 6 \}$

مثال : إذا كانت $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ و كانت f علاقة معرفة علي S

حيث $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1) \}$ ، اكتب بيان f

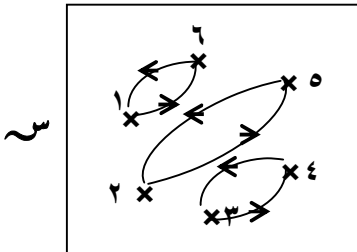
و مثلها بمخطط سهمي و بين مع ذكر السبب هل f دالة أم لا ؟

الحل : بيان $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1) \}$

ع دالة لأن كل عنصر $x \in S$ يخرج منه سهم واحد

إلي S أو لأن كل عنصر $y \in S$ ظهر كمسقط

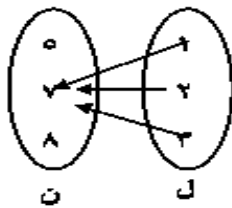
أول مرة واحدة في f



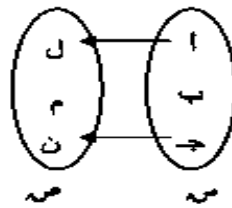
أي من العلاقات التالية يمثل دالة ؟

مثال :

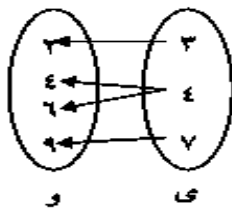
(ب)



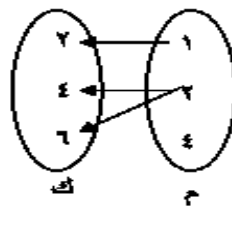
(١)



(د)



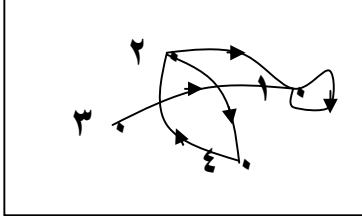
(ج)



تمارين على الحالة

(١) إذا كانت $s = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

\sim

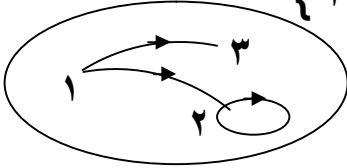


و كانت العلاقة ع معرفة علي s بالمخطط السهمي المقابل

. فأكتب بيان العلاقة ع وبين هل ع دالة أم لا ؟

إذا كانت العلاقة دالة فما مدى الدالة

(٢) الشكل المقابل مخطط سهمي لعلاقة ع علي $s = \{ 1, 2, 3 \}$



أولا : اكتب بيان ع

ثانيا: بين أن ع دالة وأوجد مداها

(٣) إذا كانت $s = \{ 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \}$ و كانت ع معرفة علي s حيث $M \in E B$

تعني (العدد معكوس ضربي للعدد ب) لكل $M, B \in s$

أولا : اكتب بيان ع و مثله بمخطط سهمي

ثانيا : اذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة ؟

(٤) إذا كانت $s = \{ 3, 4, 5 \}$ ، $v = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$ و كانت

ع علاقة من s إلي v حيث $M \in E B$ تعني $(M + B = 10)$ لكل $M \in s, B \in v$

فأكتب بيان ع و مثله بمخطط سهمي . هل العلاقة دالة أم لا ؟

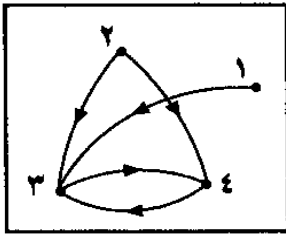
(٥) إذا كانت $S = \{2, 5, 8\}$ ، $S = \{10, 16, 24, 30\}$ وكانت E علاقة من S إلى S حيث $A \in B$ تعني « A عامل من عوامل B » لكل $A \in S$ ، $B \in S$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل E دالة؟ ولماذا؟

(٦) إذا كانت $S = \{1, 4, 7, 10\}$ ، $S = \{1, 3, 5, 6\}$ ، E علاقة من S إلى S حيث $A \in B$ تعني: « $A > B$ » لكل $A \in S$ ، $B \in S$ اكتب بيان E ، ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل E دالة ولماذا؟

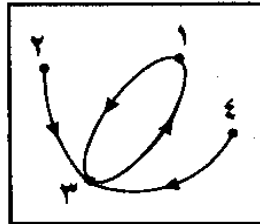
(٧) إذا كانت $S = \{1, 2, 4, 6, 10\}$ وكانت E علاقة على S حيث $A \in B$ تعني: « A مضاعف B » لكل $A, B \in S$ اكتب بيان E ، ومثلها لمخطط سهمي وآخر بياني. هل E دالة ولماذا؟

(٨) إذا كانت $S = \{1, 2, 3, 6, 11\}$ وكانت E علاقة على S حيث $A \in B$ تعني: « $A + 2 = B$ عدد فردي» لكل $A, B \in S$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي. هل E دالة؟ ولماذا؟

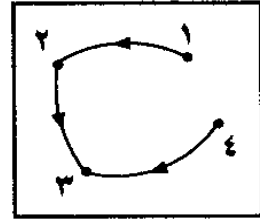
(٩) المخططات السهمية التالية تمثل ثلاث علاقات على المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$



١-ع



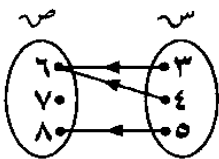
٢-ع



٣-ع

(أ) اكتب بيان كل علاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة.

(ب) أي من هذه العلاقات تعبر عن دالة؟ وما هو مدى الدالة؟



مخطط سهمي للعلاقة ع

(١٠) الشكل المقابل يمثل مخطط سهمي لعلاقة E من S إلى S بين مع ذكر السبب أن E دالة وأوجد مداها.

الدوال كثيرات الحدود

* تعريف

إذا كانت D دالة حيث $D : C \rightarrow C$

فإن D تسمى دالة كثيرة حدود فى متغير واحد s حيث $s \in C$ إذا كان :

(١) مجالها C مجالها المقابل هو C

(٢) الأس للمتغير s فى أى حد من حدودها يكون عدد طبيعى

* درجة الدالة : هى أكبر أس للمتغير s فى القاعدة التى تعين صورة s

فمثلاً : $D : (s) = 3$ دالة من الدرجة صفر

$D : (s) = 3s + 4$ ، دالة من الدرجة الأولى

$D : (s) = s^2 + 3s + 5$ ، دالة من الدرجة الثانية

أولاً : الدالة الثابتة

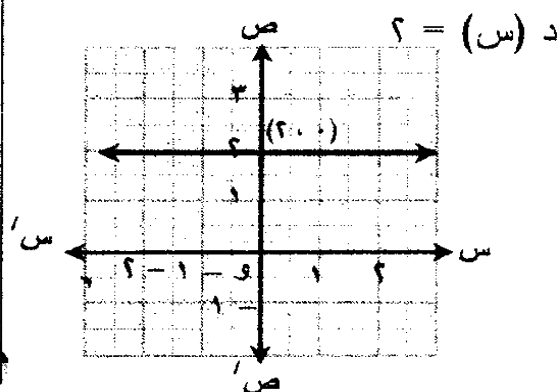
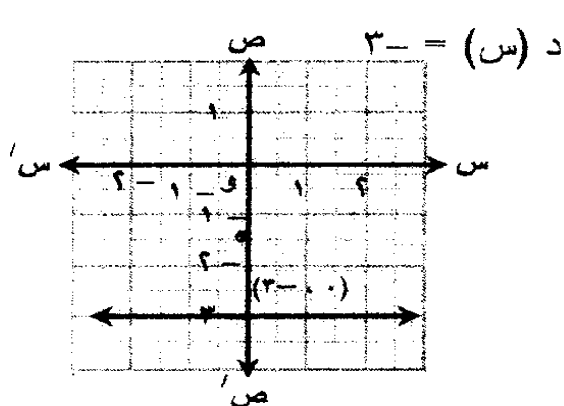
إذا كانت $D : C \rightarrow C$ حيث $D = a$ حيث $a \in C$

فإن D تسمى دالة ثابتة وهى دالة درجتها صفر

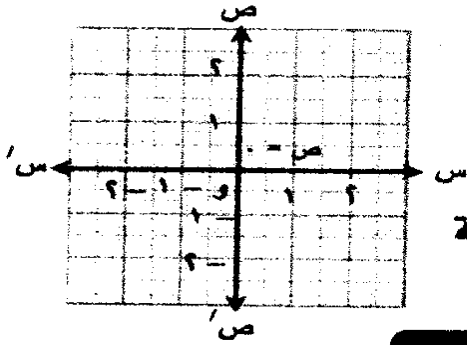
وتمثل بيانياً بخط مستقيم أفقى على بعد a من محور السينات (أى يوازي محور السينات)

ويقطع محور الصادات فى النقطة $(0, a)$

فمثلاً :



الدوال كثيرات الحدود



ملاحظة : إذا كانت د (س) = صفر

فإن الشكل البياني لهذه الدالة هو محور السينات

أى أن المستقيم الذى يمثل الدالة د (س) = ٠

ينطبق على محور السينات وتكون د (س) = صفر ليس لها درجة

وتسمى المعادلة ص = ٠ هي معادلة محور السينات

ثانياً : الدالة الخطية

إذا كانت الدالة د حيث د : ح ← ح حيث

١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠

$$د (س) = ا س + ب$$

تسمى الدالة د دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

ومن أمثلتها : د (س) = ٢ س + ١ ، د (س) = ٥ - ٢ س

وهي تمثل بيانياً بخط مستقيم .

*** ملاحظة** : إذا كانت د (س) = ا س + ب ، ا ≠ صفر أى ب = صفر

فإنها تمثل بيانياً بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

مثال : إذا كانت د دالة كثيرة حدود فأوجد درجة د ثم أوجد د (١-) ، د (٠) ، د (١/٣)

$$(١) \quad د (س) = ٧$$

$$(٢) \quad د (س) = ٢ س + ٣$$

الحل

$$(١) \quad د (س) = ٧ \quad \text{دالة درجتها صفر}$$

$$د (١-) = ٧ ، \quad د (٠) = ٧ ، \quad د (١/٣) = ٧$$

$$(٢) \quad د (س) = ٢ س + ٣ \quad \text{دالة من الدرجة الأولى}$$

$$د (١-) = (١-) \times ٢ + ٣ = ٢ - ٢ + ٣ = ٣$$

$$د (٠) = ٠ \times ٢ + ٣ = ٠ + ٣ = ٣$$

$$د (١/٣) = (١/٣) \times ٢ + ٣ = ٢/٣ + ٣ = ١١/٣$$

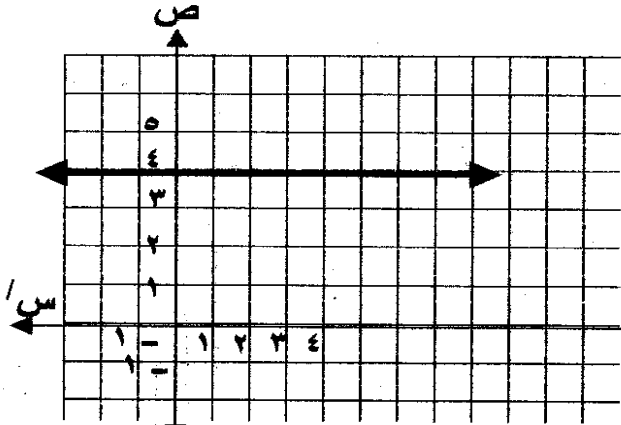
الدوال كثيرات الحدود

مثال: مثل بيانياً كلا من الدوال الآتية :

$$(أ) د(س) = ٤ \quad (ب) د(س) = \frac{1}{٤} س - ٢$$

الحل: (أ) د(س) = ٤

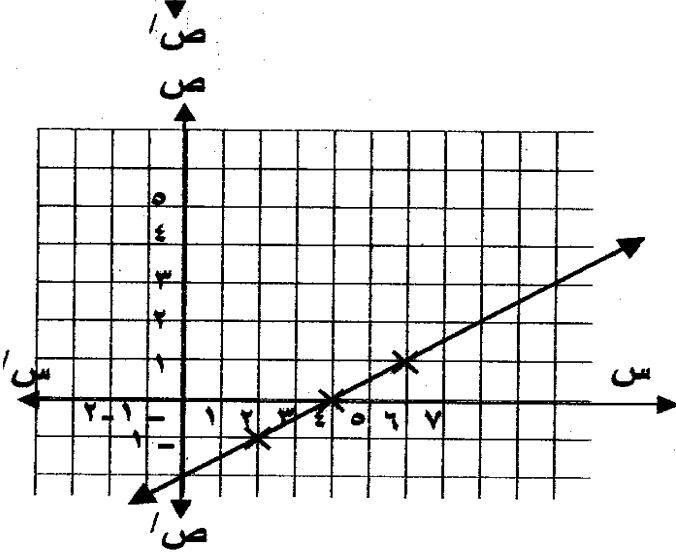
٣	٢	١	س
٤	٤	٤	ص = د(س)



تمثل الدالة بخط مستقيم يوازي محور س
السينات و يقطع محور الصادات في
النقطة (٤, ٠)

$$(ب) د(س) = \frac{1}{٤} س - ٢$$

٦	٤	٢	س
١	٠	١-	ص = د(س)



* اختبر نفسك:

(١) إذا كانت د دالة كثيرة الحدود فأوجد :

أولاً : درجة الدالة د

ثانياً : قيمة كل من د(٠) ، د(-١) ، د(٢) ، د(٢) حيث :

$$[١] د(س) = ١ + س$$

$$[٢] د(س) = ١ + س - س^٣$$

$$[٣] د(س) = ٥$$

(٢) إذا كانت د(س) = ٢ - ٢س + ٥س - ٢س

$$[١] اذكر درجة د \quad [٢] أثبت أن : د(٢) = د\left(\frac{1}{٤}\right)$$

الدوال كثيرات الحدود

ثالثاً : الدالة التربيعية

* تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث

$$د (س) = اس^٢ + بس + ح$$

تسمى دالة تربيعية وهى دالة من الدرجة الثانية

* ملاحظة

تمثل الدالة التربيعية بمنحنى يكون مفتوحاً لأعلى إذا كان $ا < ٠$ ويكون مفتوحاً لأسفل إذا كان $ا > ٠$

* نقطة الرأس لمنحنى الدالة د (س) = اس^٢ + بس + ح

* عندما تكون $ا < ٠$ (معامل س موجب)

تكون نقطة رأس المنحنى (س١ ، ص١) نقطة نهاية

صغرى وتكون القيمة الصغرى للدالة هي ص١

* عندما تكون $ا > ٠$ (معامل س سالب)

تكون نقطة رأس المنحنى (س٢ ، ص٢) نقطة نهاية

عظمى وتكون القيمة العظمى للدالة هي ص٢

* خط التماثل لمنحنى الدالة د (س) = اس^٢ + بس + ح

هو المستقيم الموازى لمحور الصادات والمار بنقطة رأس المنحنى

فمثلاً فى الشكل المقابل :

خط التماثل هو المستقيم المار برأس المنحنى عند س = ٢

موازياً محور الصادات

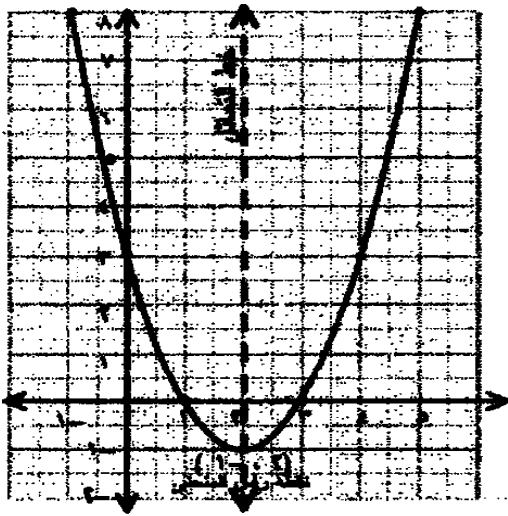
* ملاحظة

الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى للدالة د (س) = اس^٢ + بس + ح ، $ا \neq ٠$ يعطى بالعلاقة $س = \frac{-ب}{٢ا}$ حيث ا معامل س ، ب معامل س

الدوال كثيرات الحدود

- مثال (٣)** ارسم منحنى الدالة : $d = (س) = س^2 - ٤س + ٣$ على الفترة $[-١, ٥]$
 ومن الرسم (١) عين نقطة رأس المنحنى ثم عين القيمة الصغرى أو العظمى للدالة .
 (٢) أوجد خط تماثل منحنى الدالة

الحل



ارسم تكوين جدول الدالة التربيعية :

$$d = (س) = س^2 - ٤س + ٣$$

$$d = (١-) = (١-) - ٤(١-) + ٣ = ١ - ٤ + ٣ = ٠$$

$$d = ٠ = ٣ + ٤ - ١ = ٠$$

$$d = ١- = ٣ + ٨ - ٤ = ١-$$

$$d = (٣) = ٣ + ١٢ - ٩ = ٠$$

$$d = (٤) = ٣ + ١٦ - ١٦ = ٣$$

$$d = (٥) = ٣ + ٢٥ - ٢٥ = ٨$$

٥	٤	٣	٢	١	٠	١-	س
٨	٣	٠	١-	٠	٣	٨	د

* من الرسم : معامل س^٢ فى الدالة موجب ∴ منحنى الدالة مفتوحاً لأعلى

∴ الدالة لها نقطة نهاية صغرى

- (١) نقطة رأس المنحنى (نقطة نهاية صغرى) هي (٢ ، ١-) ∴ القيمة الصغرى للدالة = -١
 (٢) خط التماثل هو المستقيم المار برأس المنحنى عند س = ٢ موازياً لمحور الصادات

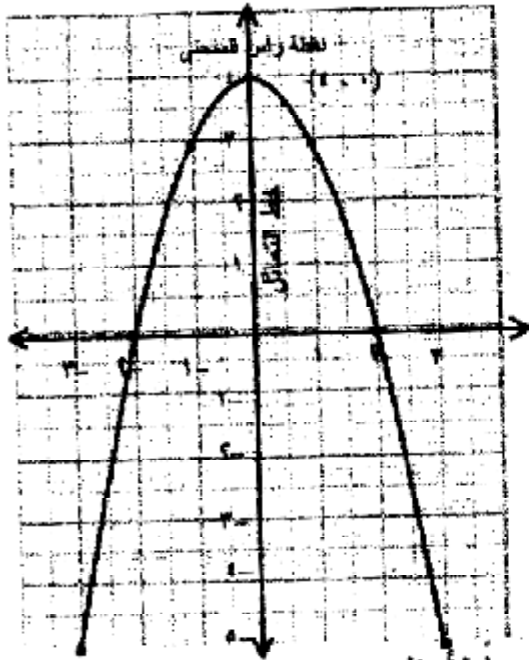
مثال (٤) ارسم منحنى الدالة : $d = (س) = س^2 - ٤س + ٣$ على الفترة $[-٣, ٣]$

ومن الرسم أوجد

- (١) عين نقطة رأس المنحنى ثم أوجد القيمة الصغرى أو العظمى للدالة .
 (٢) خط تماثل منحنى الدالة

الحل

يمكن تكوين الجدول بالطريقة الآتية :



د (س)	٤ - س ^٢	س
٥ -	٩ - ٤	٣ -
صفر	٤ - ٤	٢ -
٣	١ - ٤	١ -
٤	٠ - ٤	٠
٣	١ - ٤	١
صفر	٤ - ٤	٢
٥ -	٩ - ٤	٣

معامل س^٢ فى الدالة سالب .∴ منحنى الدالة مفتوحاً لأسفل

∴ الدالة لها نقطة نهاية عظمى

أولاً : نقطة رأس المنحنى (نقطة نهاية عظمى) هي (٤ ، ٠)

∴ القيمة العظمى للدالة = ٤

ثانياً : خط تماثل المنحنى هو محور الصادات .

مثال : مثل بيانيا الدالة د(س) = س^٢ - ٢ متخذاً س ∈ [- ٣ ، ٣] و من الرسم استنتج :

(١) إحداثي رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

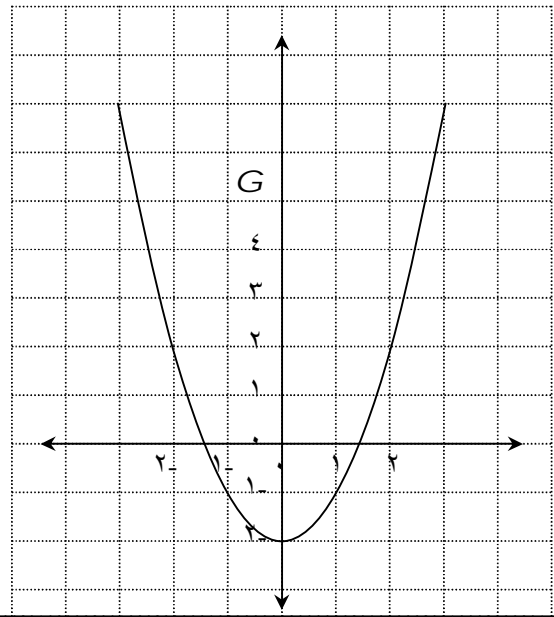
الحل :

(١) إحداثي رأس المنحنى هي (٠ ، - ٢)

(٢) معادلة محور التماثل هي س = ٠ (أى محور الصادات)

(٣) القيمة الصغرى للدالة = - ٢

س	س ^٢	٢ -	ص	(س ، ص)
٣ -	٩	٢ -	٧	(٧ ، ٣ -)
٢ -	٤	٢ -	٢	(٢ ، ٢ -)
١ -	١	٢ -	١ -	(١ - ، ١ -)
٠	٠	٢ -	٢ -	(٢ - ، ٠)
١	١	٢ -	١ -	(١ - ، ١)
٢	٤	٢ -	٢	(٢ ، ٢)
٣	٩	٢ -	٧	(٧ ، ٣)



تمارين على الدوال كغيره الحدود

أولاً: أكمل ما يأتي :

- ١ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة $ص = ٢س - ١$ يمثلها بيانياً خطٌ مستقيمٌ يقطع محور الصادات في النقطة
 ٢ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة $ص = ٣س + ٦$ يمثلها بيانياً خطٌ مستقيمٌ يقطع محور السينات في النقطة
 ٣ إذا كانت النقطة (٣، أ) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة $د : ع ← ع$ حيث $د(س) = ٤س - ٥$ فإن تساوي

ثانياً: ٤ إذا كان $د : ع ← ع$ ، اذكر درجة $د$ ثم أوجد $د(٢-)$ ، $د(٠)$ ، $د(\frac{1}{٢})$ حيث:

$$أ د(س) = ٣ \quad ب د(س) = ٢ - ٣س \quad ج د(س) = ٤ - ٢س$$

- ٥ مثل بيانياً الدوال الخطية الآتية، وأوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محوري الإحداثيات:

$$أ د(س) = ٢س \quad ب د(س) = -\frac{1}{٢}س \quad ج د(س) = ٢س + ١$$

$$د د(س) = ٢ - س \quad هـ د(س) = ٣س - ١ \quad و د(س) = ٢س + ٣$$

- ٦ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

$$أ د(س) = ٢ - ٢س متخذاً $س \in [٣، ٣-]$ \quad ب د(س) = (س - ٢) متخذاً $س \in [٥، ١-]$$$

$$ج د(س) = ٢س + ٢س + ١ متخذاً $س \in [٢، ٤-]$ \quad د د(س) = ٢ - ٢س متخذاً $س \in [٣، ٣-]$$$