ادارة الخليفة والمقطم التعليمية
منتدى توجيه الرياضيات

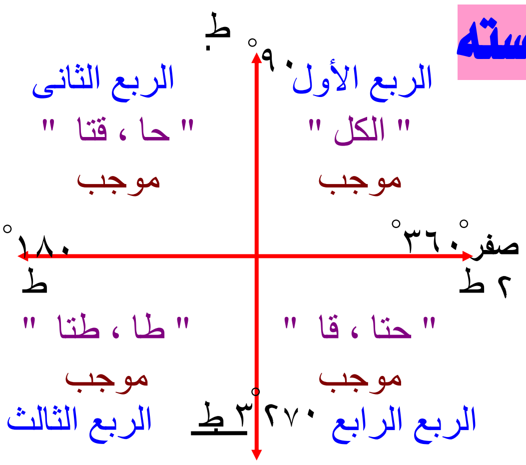
الرياضيات

حساب المثلثات

الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

تقديم
م/عادل إدوار

مـــراجعة لما ســـــبق دراسته



إشارات الدوال المثلثية

كما هو مبين في الشكل
و يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية
ثم تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية

أو كالآتى :

إذا كانت ∠ هـ تقع فى الربع الأول فإن : حا هـ موجبة ، حتا س موجبة ، طا س موجبة

إذا كانت ∠ هـ تقع فى الربع الثانى فإن : حا هـ موجبة ، حتا س سالبة ، طا س سالبة

إذا كانت ∠ هـ تقع فى الربع الثالث فإن : حا هـ سالبة ، حتا س سالبة ، طا س موجبة

إذا كانت ∠ هـ تقع فى الربع الرابع فإن : حا هـ سالبة ، حتا س موجبة ، طا س سالبة

الد وال المثلثية للزاويا لبعض الخاصة.

الزاوية / الدالة	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠° ، صفر°
حــــا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	صفر	ـ ١	صفر
حتــــا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	ـ ١	صفر	١
طــــا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية:

[١] الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين [هـ ، ٩٠ - هـ]

(١) حا هـ = حتا (٩٠° ــ هـ)   (٢) حتا هـ = حا(٩٠° ــ هـ)   (٣) طا هـ = طتا(٩٠° ــ هـ)

بالمثل : قتاهـ = قا(٩٠° ــ هـ) ،، قا هـ = قتا (٩٠° ــ هـ)

ملاحظة : إذا كان حا س = حتا ص فإن س + ص = ٩٠° و بالمثل باقي الدوال

[٢] الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ١٨٠- هـ]

(١) حا (١٨٠° ـ هـ) = حا هـ　(٢) حتا (١٨٠° ـ هـ) = ـ حتا هـ　(٣) طا (١٨٠° ـ هـ) = ـ طا هـ

[٣] الدوال المثلثية للزاويتين [هـ ، ١٨٠+ هـ]

(١) حا (١٨٠° + هـ) = ـ حا هـ　(٢) حتا (١٨٠° + هـ) = ـ حتا هـ　(٣) طا (١٨٠° + هـ) = طا هـ

[٤] الدوال المثلثية للزاويتين [هـ ، ٣٦٠ - هـ]

(١) حا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ حا هـ　(٢) حتا (٣٦٠° ـ هـ) = حتا هـ　(٣) طا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ طا هـ

****

ملاحظات (١) لإيجاد دالة أي زاوية معروف قيمتها لابد من تحديد الربع أولاً ثم إختيار زاوية مناسبة من الزوايا ٣٠° ،، ٤٥° ،، ٦٠°

(٢) زاويا الربع الثاني هي : ١٥٠° = ١٨٠° ـ ٣٠ ، ١٣٥° = ١٨٠ ـ ٤٥° ، ١٢٠° = ١٨٠ ـ ٦٠

(٣) زوايا الربع الثالث هي : ٢١٠° = ١٨٠ + ٣٠ ، ٢٢٥° = ١٨٠ + ٤٥ ، ٢٤٠° = ١٨٠ + ٦٠

(٤) زوايا الربع الرابع هي : ٣٣٠° = ٣٦٠ ـ ٣٠ ، ٣١٥° = ٣٦٠ ـ ٤٥ ، ٣٠٠° = ٣٦٠ ـ ٦٠

(٥) حا (ـ هـ) = ـ حا هـ ، حتا (ـ هـ) = حتا هـ ، طا (ـ هـ) = ـ طا هـ

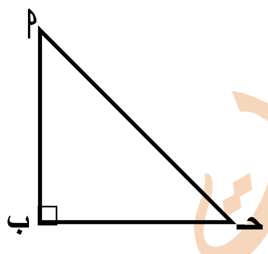
الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

في أي Δ أ ب جـ قائم في ب :

يكون حا جـ = أ ب / أ حـ　(مقابل / وتر)　　قتا جـ = أ حـ / أ ب　(وتر / مقابل)

،، حتا جـ = ب حـ / أ حـ　(مجاور / وتر)　　قا جـ = أ حـ / ب حـ　(وتر / مجاور)

،، طا جـ = أ ب / ب حـ　(مقابل / مجاور)　　ظتا جـ = ب حـ / أ ب　(مجاور / مقابل)



ملاحظة هامة : يجب مراعاة الربع الذى تقع فيه الزاوية وبالتالى تراعى إشارات الدوال المثلثية

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

لأى زاوية هـ يكون :

١– حا هـ قتا هـ = ١ ؛ حا هـ = $\frac{١}{\text{قتا هـ}}$ ؛ قتا هـ = $\frac{١}{\text{حا هـ}}$

٢– حتا هـ قا هـ = ١ ؛ حتا هـ = $\frac{١}{\text{قا هـ}}$ ؛ قا هـ = $\frac{١}{\text{حتا هـ}}$

٣– طا هـ طتا هـ = ١ ؛ طا هـ = $\frac{١}{\text{طتا هـ}}$ ؛ طتا هـ = $\frac{١}{\text{طا هـ}}$

٤– طا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ ، طتا هـ = $\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}$

٥– (أ) حتا^{٢}هـ + حا^{٢}هـ = ١ ، (ب) ١ + طا^٢ هـ = قا^{٢}هـ ، (حـ) ١ + طتا^٢ هـ = قتا^٢ هـ

البرهان :

نعلم أنه من دائرة الوحدة : س = حتا هـ ، ص = حا هـ

، س^٢ + ص^٢ = ١

∴ حتا^٢ هـ + حا^٢ هـ = ١ ⟵ (أ)

بالقسمة على حتا^٢ هـ ينتج :

١ + $\frac{\text{حا}^٢\text{هـ}}{\text{حتا}^٢\text{هـ}}$ = $\frac{١}{\text{حتا}^٢\text{هـ}}$

∴ ١ + طا^٢ هـ = قا^٢ هـ ⟵ (ب)

بالمثل بالقسمة على حا^٢ هـ ينتج : ١ + طتا^٢ هـ = قتا^٢ هـ ⟵ (حـ)

****

تدريب : أكمل ما يلى :

(١) ١ – حا^٢ س = ... (٢) قا^٢ س – طا^٢ س = ...

(٣) حا هـ ٠ قا هـ = ... (٤) طا س ٠ قتا س = ...

(٥) حا^٢ ٣ س + ... = ١ (٦) حا^٢ ٤٣° + حتا^٢ .... ° = ١

(٧) ١ + طا^٢ ٧٠° = قتا^٢ .... °

(٨) حا^٢ س + حتا^٢ س + طا^٢ س = ...

(٩) (حا^٢ س + حتا^٢ س)^٧ = ...

(١٠) إذا كان : طا^٢ س = ٨ فإن : قا^٢ س = ...

(١١) إذا كان : طتا س = ٢ فإن : قتا^٢ س = ...

****

مثـــ١ـــال إثبت صحة المتطابقة (جاس + جتاس)^{٢} – ٢ جاس جتاس = ١

الحـــــــــل

الطرف الايمن = جا^{٢} س + ٢ جاس جتاس + جتا^{٢} س – ٢ جاس جتاس

= جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ = الطرف الايسر

****

مثـــ٢ـــال إثبت صحة المتطابقة (جاس + جتاس)^{٢} – ١ = ٢جاس جتاس

الحـــــــــل

الطرف الايمن = جا^{٢} س + ٢ جاس جتاس + جتا^{٢} س – ١

= جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢ جاس جتاس – ١

= ١ + ٢ جاس جتاس – ١ = ٢ جاس جتاس = الطرف الايسر

****

مثـــ٣ـــال إثبت صحة المتطابقة ظاس + ظتاس = قاس قتاس

الحـــــــــل

الايمن = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ + $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتاس جاس}}$ = $\frac{١}{\text{جتاس جاس}}$

= $\frac{١}{\text{جتاس}}$ × $\frac{١}{\text{جاس}}$ = قاس قتاس = الايسر

****

مثـــ٤ـــال إثبت صحة المتطابقة قا^{٢} س + قتا^{٢} س = قا^{٢} س قتا^{٢} س

الحـــــــــل

الايمن = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ + $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س جا}^{٢}\text{ س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س جا}^{٢}\text{ س}}$

= $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ × $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$ = قا^{٢}س قتا^{٢}س = الايسر

****

مثـــ٥ـــال إثبت صحة المتطابقة $\frac{\text{٢ظاس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س}}$ = ٢ جاس جتاس

الحـــــــــل

الطرف الايمن = $\frac{\text{٢ ظاس}}{\text{قا}^{٢}\text{ س}}$ = ٢ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ÷ $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ = ٢ × $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ × جتا^{٢} س

= ٢ جاس جتاس = الطرف الايسر

مثـ٦ـال إثبت صحة المتطابقة $\frac{١ + ظا^٢ س}{١ + ظتا^٢ س} = ظا^٢ س$

الحـــــل

الطرف الايمن $= \frac{قا^٢ س}{قتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} \div \frac{١}{جا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} \times جا^٢ س$

$= \frac{جا^٢ س}{جتا^٢ س} = ظا^٢ س =$ الطرف الايسر

****

مثـ٧ـال إثبت صحة المتطابقة $جا^٢ س + جا^٢ س ظا^٢ س = ظا^٢ س$

الحـــــل

الطرف الايمن $= جا^٢ س (١ + ظا^٢ س) = جا^٢ س \times قا^٢ س = جا^٢ س \times \frac{١}{جتا^٢ س}$

$= \frac{جا^٢ س}{جتا^٢ س} = ظا^٢ س =$ الطرف الايسر

****

مثـ٨ـال إثبت صحة المتطابقة $١ + \frac{١ - جتا^٢ س}{١ - جا^٢ س} = قا^٢ س$

الحـــــل

الطرف الايمن $= ١ + \frac{جا^٢ س}{جتا^٢ س} = ١ + ظا^٢ س = قا^٢ س =$ الطرف الايسر

****

مثـ٩ـال إثبت صحة المتطابقة $\frac{جا^٢ س}{١ - جا^٢ س} = ظا^٢ س$

الحـــــل

الطرف الايمن $= \frac{جا^٢ س}{جتا^٢ س} = ظا^٢ س =$ الطرف الايسر

****

مثـ١٠ـال إثبت صحة المتطابقة $جتا^٤ س - جا^٤ س = ١ - ٢ جا^٢ س$

الحـــــل

الطرف الايمن $= (جتا^٢ س + جا^٢ س)(جتا^٢ س - جا^٢ س)$

$= ١ \times جتا^٢ س - جا^٢ س = جتا^٢ س - جا^٢ س$

$= (١ - جا^٢ س) - جا^٢ س = ١ - ٢ جا^٢ س =$ الطرف الايسر

****

مثـــ١١ـــال إثبت صحة المتطابقة جتا^{٤} س – جا^{٤} س = ٢ جتا^{٢} س – ١

الحـــــــــل

الطرف الايمن = (جتا^{٢} س + جا^{٢} س) (جتا^{٢} س – جا^{٢} س)

= ١ × جتا^{٢} س – جا^{٢} س = جتا^{٢} س – جا^{٢} س

= جتا^{٢} س – (١ – جتا^{٢} س) = جتا^{٢} س – ١ + جتا^{٢} س

= ٢ جتا^{٢} س – ١

****

تمــــــــــارين

إثبت صحة المتطابقات الآتية :

(١) قا^{٢} س + قتا^{٢} س = قا^{٢} س قتا^{٢} س

(٢) طا^{٢} س حا^{٢} س + حتا^{٢} س + ٢ حا^{٢} س = قا^{٢} س

(٣) حا^{٤} س – حتا^{٤} س = ٢ حا^{٢} س – ١

(٤) حا س حا (٩٠° – س) طتا س = ١ – حا^{٢} س

(٥) ٢ حتا^{٢} س – ٣ حا س قتا س + ٢ حا^{٢} س = – ١

(٦) $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{ س}}$ = طا^{٢} س

(٦) $\frac{\text{١ – حتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ – حا}^{٢}\text{ س}}$ + ١ = قا^{٢} س

(٨) $\frac{\text{٢ طا س}}{\text{١ + طا}^{٢}\text{ س}}$ = ٢ حا س حتا س

(٩) $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ – حا}^{٢}\text{ س}}$ = طا^{٢} س

(١٠) $\frac{\text{حتا س طا س}}{\text{قتا س}}$ = ١ – حتا^{٢} س

(١١) $\frac{\text{١ – طا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + طا}^{٢}\text{ س}}$ = ٢ حتا^{٢} س – ١

(١٢) $\frac{\text{قا س – حتا س}}{\text{قتا}^{٢}\text{ س – طتا}^{٢}}$ = حا س طا س

(١٣) $\frac{\text{حا س – ٢ حا}^{٣}\text{ س}}{\text{٢ حتا}^{٣}\text{ س – حتا س}}$ = طا س

(١٤) $\frac{\text{حا}^{٣}\text{ س + حتا}^{٣}\text{ س}}{\text{حا س + حتا س}}$ = ١ – حا س حتا س

(١٥) $\frac{\text{١ + حا س}}{\text{١ – حا س}}$ = (قا س – طا س)^{٢}

****

حل المعادلات المثلثية

حل المعادلة المثلثية يعنى إيجاد قيم قياسات الزوايا التى تحقق هذه المعادلة

ملاحظة هامة :

* حا هـ ∋ [–١ ، ١] ، حتا هـ ∋ [–١ ، ١] لجميع قيم هـ الحقيقية

خطوات حل المعادلة المثلثية :

(١) نحدد إشارة الدالة المثلثية ، بالتالى الربع الذى تقع فيه الزاوية ولتكن " هـ " كالآتى "

الدالة المثلثية	إشارة الدالة المثلثية	الربع الذى تقع فيه الزاوية	بداية ونهاية الربع	ملاحظات
حا هـ	موجبة	الأول	[٠ ، ٩٠°] ، أ ٠ < هـ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الثانى	[٩٠° ، ١٨٠°] ، أ ٩٠° < هـ < ١٨٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثالث	[١٨٠° ، ٢٧٠°] ، أ ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°	أصغر زاوية سالبة
		الرابع	[٢٧٠° ، ٣٦٠°] ، أ ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°	أكبر زاوية سالبة
حتا هـ	موجبة	الأول	[٠ ، ٩٠°] ، أ ٠° < هـ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الرابع	[٢٧٠° ، ٣٦٠°] ، أ ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثانى	[٩٠° ، ١٨٠°] ، أ ٩٠° < هـ < ١٨٠°	أصغر زاوية سالبة
		الثالث	[١٨٠° ، ٢٧٠°] ، أ ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°	أكبر زاوية سالبة
ظا هـ	موجبة	الأول	[٠° ، ٩٠°] ، أ ٠° < هـ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الثالث	[١٨٠° ، ٢٧٠°] ، أ ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثانى	[٩٠° ، ١٨٠°] ، أ ٩٠° < هـ < ١٨٠°	أصغر زاوية سالبة
		الرابع	[٢٧٠° ، ٣٦٠°] ، أ ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°	أكبر زاوية سالبة

لاحظ أن : ٩٠° = $\frac{ط}{٢}$ ، ١٨٠° = ط ، ٢٧٠° = $\frac{٣ط}{٢}$ ، ٣٦٠° = ٢ ط

(٢) نوجد : ق (∠ هـ)

(٣) نوجد : ق (∠ س) كالآتى :

(١) زاوية س تقع فى الربع الأول : ق (∠ س) = ق (∠ هـ)

(٢) زاوية س تقع فى الربع الثانى : ق (∠ س) = ١٨٠° – ق (∠ هـ)

(٣) زاوية س تقع فى الربع الثالث : ق (∠ س) = ٢٧٠° – ق (∠ هـ)

(٤) زاوية س تقع فى الربع الرابع : ق (∠ س) = ٣٦٠° – ق (∠ هـ)

مثـ١ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا θ – ١ = ٠ حيث: ٠° < θ < ٣٦٠°

الحـــــــل

٢جا θ = ١ ∴ جاس = $\frac{١}{٢}$ موجبة ∴ هـ = ٣٠°

θ فى الربع الاول = هـ = θ =٣٠°

θ فى الربع الثانى = ١٨٠° – هـ = ١٨٠° – ٣٠° = ١٥٠°

م ٠ ح = { ٣٠° ، ١٥٠° }

****

مثـ٢ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث: θ ∋ [٠° ، ٢π]

الحـــــــل

٢جا θ = – $\sqrt{٣}$ جا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ سالبة ∴ هـ = ٣٠°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠ + هـ = ١٨٠° + ٦٠° =٢٤٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠ – هـ = ٣٦٠° – ٦٠° = ٣٠٠°

م ٠ ح = { ٢٤٠° ، ٣٠٠° }

****

مثـ٣ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا θ – ١ = ٠ حيث: θ ∋ [٠° ، ٢π]

الحـــــــل

$\sqrt{٢}$جتا θ = ١ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ =٤٥°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° – هـ = ٣٦٠° – ٤٥° = ٣١٥°

م ٠ ح = { ٤٥° ، ٣١٥° }

****

مثـ٤ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{٣}$ ظا θ +١ = ٠ : ٠° < θ < ٣٦٠°

الحـــــــل

$\sqrt{٣}$ ظا θ = -١ ظا θ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٣٠°

θ فى الربع الثانى ∴ θ = ١٨٠° – هـ = ١٨٠° – ٣٠° = ١٥٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠ – هـ =٣٦٠° – ٣٠° = ٣٣٠°

م ٠ ح = {١٥٠ ، ٣٣٠}

مثـ٥ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢جا^٢ θ − ١ = ٠ حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

الحـــــــل

٢ جا θ = ١ جا θ = ± ١/√٢ ∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الأول ∴ θ = هـ = θ =٤٥° ، θ فى الربع الثانى= ١٨٠°ـ هـ = ١٨٠°ـ٤٥°=١٣٥°

θ فى الربع الثالث= ١٨٠°+ هـ = ١٨٠°+ ٤٥°=٢٢٥° ، θ فى الربع الرابع=٣٦٠°ـ٤٥°=٣١٥°

م . ح = { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

****

مثـ٦ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا^٢ θ +٥جتا θ + ٢= ٠ حيث: θ ∋ [٠° ، ٢π]

الحـــــــل

(جتا θ +٢) (٢ جتا θ + ١) = ٠ ∴ جتا θ =−١/٢ ∴ هـ = ٦٠° أ، جتا θ = −٢مرفوض

θ فى الربع الثانى = ١٨٠° ــ هـ =١٨٠° ـ ٦٠° = ١٢٠°

θ فى الربع الثالث = ١٨٠° + هـ = ١٨٠°+ ٦٠° = ٢٤٠°

م . ح = { ١٢٠° ، ٢٤٠° }

****

مثـ٧ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا^٢ θ − √٣ جتا θ= ٠ حيث: θ ∋ [٠° ، ٢π]

الحـــــــل

جتا θ (٢جتا θ ـ √٣) = ٠ ⟸ جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° أ، ٢٧٠°

أ، جتا θ = √٣/٢ موجبة ∴ هـ = ٣٠° θ فى الربع الاول = هـ = θ =٣٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ــ هـ = ٣٦٠° ــ ٣٠° = ٣٣٠°

م . ح = { ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٣٠° ، ٣٣٠° }

****

مثـ٨ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ظا θ − √٣ = ٠ حيث: θ ∋ [٠° ، ٢π]

الحـــــــل

ظا θ = √٣ موجبة ∴ هـ =٦٠°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ =٦٠°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + هـ =١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

م . ح = {٦٠° ، ٢٤٠° }

مثـ٩ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جا (٩٠ ـ θ) = ـ ٠.٢٥٣٧ حيث: θ ∋ [π ، ٢π]

الحـــــــــل

جتا θ = ـ ٠.٢٥٣٧ سالبة ∴ هـ = ١٨ َ ٧٥ ْ

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠ + هـ = ١٨٠ ْ + ١٨ َ ٧٥ ْ = ١٨ َ ٢٥٥ ْ

θ ~~فى الربع الثانى~~ م٠ح θ = { ١٨ َ ٢٥٥ ْ }

****

مثـ١٠ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢جا^{2} θ + ٣ جا θ = ٠ حيث: θ ∋ [٠ ْ ، ٢π]

الحـــــــــل

جاθ (٢ جا θ + ٣) = ٠

جا θ = ٠ θ = ٠ ْ ، ١٨٠ ْ

جا θ = $\frac{-٣}{٢}$ = ـ ١.٥ مرفوض

م٠ح θ = { ٠ ْ ، ١٨٠ ْ }

****

مثـ١١ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جتا^{2} θ + ٢ جتا θ = ٠ حيث: θ ∋ [٠ ْ ، ٢π]

الحـــــــــل

جتاθ (جتا θ + ٢) = ٠

جتا θ = ٠ θ = ٩٠ ْ ، ٢٧٠ ْ

جتا θ = ـ٢ مرفوض

م٠ح = { ٩٠ ْ ، ٢٧٠ ْ }

****

مثـ١٢ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جا θ ـ جتا θ = ٠ حيث: θ ∋ [٠ ْ ، ٢π]

الحـــــــــل

جا θ = جتا θ بالقسمة على (جتا θ) ظا θ = ١ ∴ هـ = ٤٥ ْ

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٤٥ ْ

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠ ْ + هـ = ١٨٠ ْ + ٤٥ ْ = ٢٢٥ ْ

م٠ح = { ٤٥ ْ ، ٢٢٥ ْ }

****

مثـ١٣ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ظا^{٢} θ ـ ٢ ظا θ ـ ٣ = ٠ حيث: θ ∈] π ، ٢π [

الحـــــــل

ظا^{٢} θ ـ ٢ ظا θ ـ ٣ = (ظا θ + ١) (ظا θ ـ ٣) = ٠

ظا θ ـ ٣ = ٠ ⟸ ظا θ = ٣ موجبة ∴ هـ = ٣٤' ٧١° θ فى الربع الأول (مرفوض)

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + هـ = ١٨٠° + ٣٤' ٧١° = ٣٤' ٢٥١°

٢ ظا θ + ١ = ٠ ⟸ ظا θ = ـ ١ سالب ∴ هـ = ٤٥° θ فى الربع الثانى (مرفوض)

θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ـ هـ = ٣٦٠° ـ ٤٥° = ٣١٥°

م ٠ ح ∴ θ = { ٣٤' ٢٥١° ، ٣١٥° }

****

مثـ١٤ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جتا^{٢} θ – ٣ جتا θ + ١ = ٠ حيث: θ ∈] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

٢ جتا^{٢} س – ٣ جتاس + ١ = (٢ جتا س – ١)(جاس – ١) = ٠

جتاس – ١ = ٠	جتاس = ١	∴ س = ٠°

٢ جتاس – ١ = ٠	٢جتا س = ١	جتاس = $\frac{١}{٢}$ موجبة

∴ هـ = ٦٠°	θ فى الربع الاول	∴ θ = هـ = ٦٠°

θ فى الربع الرابع ∴ θ =٣٦٠° ـ هـ = ٣٦٠° ـ ٦٠° = ٣٠٠°

م ٠ ح ∴ θ = { ٦٠° ، ٣٠٠° ، ٠° }

****

مثـ٢٠ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ جا^{٢} θ – ١ = ٠ حيث: θ ∈] ٠° ، ٢π [

الحـــــــل

٢جا^{٢} θ = ١	جا^{٢} θ = $\frac{١}{٢}$	جا θ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ موجبة	هـ = ٤٥°

θ فى الربع الاول ∴ θ = هـ = ٤٥° ، أ θ فى الربع الثانى ∴ θ = ١٨٠° ـ ٤٥° = ١٣٥°

جا θ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ سالبة	هـ = ٤٥°

θ فى الربع الثالث ∴ θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

أ θ فى الربع الرابع ∴ θ = ٣٦٠° ـ ٤٥° = ٣١٥°

م ٠ ح ∴ θ = { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

الحل العام للمعادلة المثلثية : (١) نوجد قياس الزاوية الحادة هـ التى تحقق المعادلة

(٢) نعين قيمة θ حسب الربع التى تقع فيه

(٣) نضيف عدد من الدورات (٢ ن π) : ن ∈ ص إلى قيم θ لنحصل على الحل العام للمعادلة

مثـ٢١ـال أوجد مجموعة الحل العام للمعادلة ظا θ + ١ = ٠

الحـــــــل

ظا θ = ـ١ سالبة　　فى الربع [الثانى – الرابع]　　∴ هـ = ٤٥°

θ فى الربع الثانى = ١٨٠° ـ هـ　　θ = ١٨٠° ـ ٤٥° = ١٣٥°

θ فى الربع الرابع = ٣٦٠° ـ هـ　　θ = ٣٦٠ ـ ٤٥ = ٣١٥°

وبإضافة (ن π) حيث ن ∈ ص إلى أصغر قياس زاوية موجبة (١٣٥°)

م . ح　　θ = ١٣٥° + ن π = $\frac{٣}{٤}$ π + ن π : ن ∈ ص

****

مثـ٢٢ـال أوجد الحل العام للمعادلة جتا² θ ـ جتا θ = ٠

الحـــــــل

جتا θ (جتا θ ـ ١) = ٠

∴ جتا θ = ٠°	أ، جتا θ = ١
θ = ٩٠° أ، ٢٧٠° وهى تكافئ ـ ٩٠°	أ، θ = ٠°
وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص	وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص
θ = ± ٩٠ + ٢ ن π	θ = ٠ + ٢ ن π

∴ الحل العام هو θ = ± ٩٠ + ٢ ن π أ، ٢ ن π : ن ∈ ص

****

مثـ٢٣ـال أوجد مجموعة الحل العام للمعادلة جا θ جتا θ ـ $\frac{١}{٢}$ جا θ = ٠

الحـــــــل

جا θ (جتاس ـ $\frac{١}{٢}$) = ٠

∴ جا θ = ٠	أ، جتا θ = $\frac{١}{٢}$ موجبة
θ = ٠° ، ١٨٠°	θ = ٦٠° أ، ٣٠٠° وهى تكافئ ـ ٦٠°
وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص	وبإضافة (٢ ن π) حيث ن ∈ ص
θ = ٢ ن π أ، π + ٢ ن π	θ = $\frac{١}{٣}$ π + ٢ ن π

∴ الحل العام هو θ = ٢ ن π أ، π + ٢ ن π أ، ± $\frac{١}{٣}$ π + ٢ ن π : ن ∈ ص

مثـ٢٤ـال أوجد مجموعة الحل للمعادلة جا θ جتا θ = ٠ حيث: θ∈ [٠° ، ٢π]

الحـــــــل

جا θ = ٠ ∴ θ = ٠° ، ١٨٠°

جتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠° ، ٢٧٠°

م ٠ ح = {٠° ، ١٨٠° ، ٩٠° ، ٢٧٠° }

****

تدريب : أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان س ∈ [٠ ، $\frac{١}{٢}$π] ، ٢جا θ – ١ = ٠ فإن θ = ... °

(٢) إذا كان س ∈ [٠ ، π] ، ٢جا θ = $\sqrt{٣}$ فإن θ = ... ° أ، .... °

(٣) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، ٢جتا θ + ١ = ٠ فإن θ = ... ° أ، .... °

(٤) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، ظا θ + ١ = ٠ فإن θ = ... ° أ، .... °

(٥) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، جتا θ = ٠ فإن θ = ... ° أ، .... °

(٦) إذا كان س ∈ [٠ ، ٢π] ، ٢جتا θ + $\sqrt{٢}$ = ٠ فإن θ = ... ° أ، .... °

****

تمـــــــــــارين

إوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(١) ٢ جا θ + جا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، π]

(٢) جتا² θ – جتا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢٧٠°]

(٣) جا θ – جتا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٤) جا² θ – جتا² θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٥) جتا θ + ٢ جا θ جتا θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٦) جا² θ – ٣جتا² θ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٧) ٢ جا² θ + ٣جا θ – ٢ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٨) ٣جتا² θ – جتا θ – ٢ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(٩) ٢ظا² θ + ظا θ – ١ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

(١٠) ٣ قا² θ – ٤ قا θ – ٤ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

حل المثلث القائم الزاوية

حل المثلث يعنى : إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة عناصر من عناصره الستة (إحداها على الأقل ضلع)

حالات حل المثلث :

الحالة الأولى : إذا علم طول ضلع وقياس زاوية :

نحسب قياس الزاوية الثالثة كالآتى :

قياس الزاوية الثالثة = ٩٠° ـ قياس الزاوية الحادة المعلومة

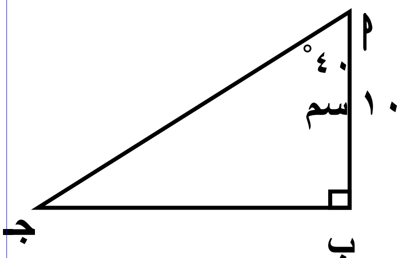
ثم نوجد طول الضلعين الآخرين بإستخدام الطريقة :

$$\frac{\text{طول الضلع المطلوب}}{\text{طول الضلع المعلوم}} = \text{نسبة مثلثية لإحدى الزاويتين الحادتين}$$

****

مثـ١ـال : حل Δ ﺃ ب جـ القائم فى ب والذى فيه ق(∠ﺃ) = ٤٠° ، ﺃ ب = ١٠سم

الحــــــل



ق(∠جـ) = ٩٠° ـ ٤٠° = ٥٠°

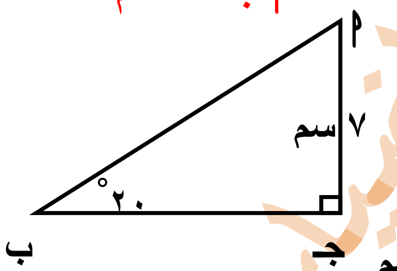
$\text{جا جـ} = \text{جا}٥٠° = \frac{١٠}{\text{ﺃ جـ}}$ ∴ $\text{ﺃ جـ} = \frac{١٠}{\text{جا}٥٠°} = ١٣$ سم

$\text{ظا جـ} = \text{ظا }٥٠° = \frac{١٠}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\text{ب جـ} = \frac{١٠}{\text{ظا}٥٠°} = ٨{,}٤$ سم

****

مثـ٢ـال : حل Δ ﺃ ب جـ القائم الزاوية فى جـ والذى فيه ق(∠ ب) = ٢٠° ، ﺃ جـ = ٧سم

الحــــــل



ق(∠ﺃ) = ٩٠° ـ ٢٠° = ٧٠°

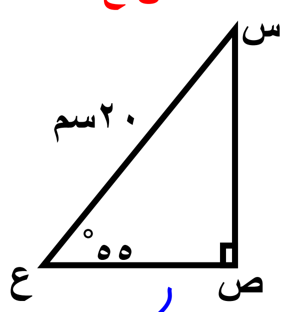
$\text{جا}٢٠° = \frac{٧}{\text{ﺃ ب}}$ ∴ $\text{ﺃ ب} = \frac{٧}{\text{جا}٢٠°} = ٢٠{,}٤$ سم

$\text{ظا }٧٠° = \frac{\text{جـ ب}}{٧}$ ∴ جـ ب = ٧ ظا٧٠ = ١٩٫٣ سم

****

مثـ٣ـال : حل Δس ص ع القائم الزاوية فى ص والذى فيه ق(∠ ع) = ٥٥° ، س ع = ٢٠سم

الحــــــل



ق(∠س) = ٩٠° ـ ٥٥° = ٣٥°

$\text{جا }٥٥° = \frac{\text{س ص}}{٢٠}$ س ص= ٢٠ جا٥٥° = ١٦٫٤ سم

$\text{جتا }٥٥° = \frac{\text{ص ع}}{٢٠}$ ب جـ = ٢٠ جتا٥٥° = ١١٫٥ سم

الحالة الثانية : حل المثلث القائم الزاوية بمعلومية ضلعين

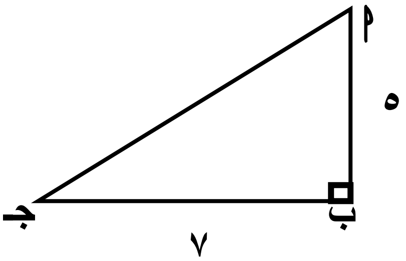
إذا علم طولا ضلعين: نحسب قياس أحدى الزاويتين الحادتين كالآتى :

(طول أحد الضلعين المعلومين ÷ طول الضلع الآخر المعلوم) = نسبة مثلثية لإحدى الزاويتين الحادتين

ثم نحسب قياس الزاوية الأخرى ، طول الضلع الثالث بفس الطريقة فى الحالة الأولى

****

مثـ٤ـال : حل Δ ٩ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه ٩ ب = ٥سم ، ب جـ = ٧ سم



الحـــــــل

(٩ جـ)^٢ = (٩ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤

٩ جـ = √٧٤ = ٨٫٦ سم

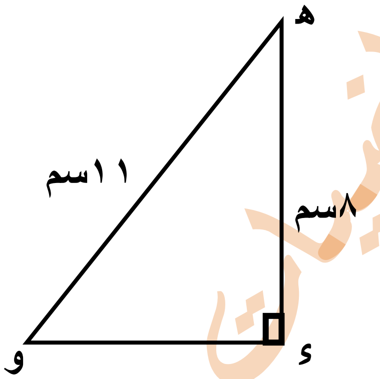
ظاجـ = ٥/٧ ، ق(∠جـ) = ٣٥° ٣٢/

5 ÷ 7 = sh tan = ,,,, $\boxed{}$

ق(∠ ٩) = ٩٠° - ق (∠ جـ) = ٩٠° - ٣٥° ٣٢/ = ٥٤° ٢٨/

****

مثـ٥ـال : حل المثلث Δ هـ ء و القائم الزاوية فى ء والذى فيه: هـ ء = ٨ سم ، هـ و = ١١ سم



الحـــــــل

(ء و)^٢ = (هـ و)^٢ ـ (هـ ء)^٢ = ١٢١ ـ ٦٤ = ٥٧

٩ جـ = √٥٧ = ٧٫٥٥ سم

جا و = ٨/١١ ، ق(∠ و) = ٤٦° ٣٩/

8 ÷ 11 = sh sin = ,,, $\boxed{}$

ق(∠ هـ) = ٩٠° ـ ق (∠ و) = ٩٠° ـ ٤٦° ٣٩/ = ٤٣° ٢١/

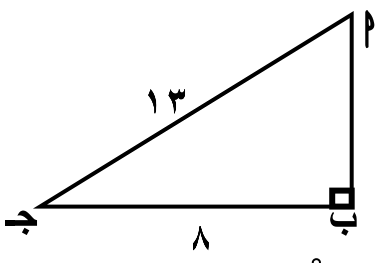
****

مثـ٦ـال : حل المثلث Δ ٩ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه ب جـ = ٨سم ، ٩ جـ = ١٣ سم

الحـــــــل

(٩ ب)^٢ = (٩ جـ)^٢ ـ (ب جـ)^٢ = ١٦٩ ـ ٦٤ = ١٠٥

أ جـ = $\sqrt{١٠٥}$ = ١٠٫٢٤ سم



جتاجـ = $\frac{٨}{١٣}$ ق(∠جـ) = ١َ ٥٢°

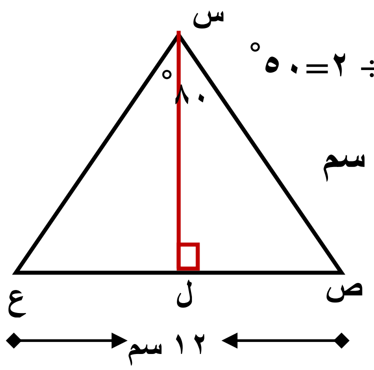
8 ÷ 13 = sh cos = ,,, $\boxed{}$

ق(∠ أ) = ٩٠° ـ ق (∠جـ) = ٩٠° ـ ١َ ٥٢° = ٥٩َ ٣٧°

****

مثـــ٧ـــال: حل المثلث س ص ع الذى فيه: س ص = س ع ، ص ع = ١٢ سم ، ق (∠ س) =٨٠°

الحـــــــــــل



Δ متساوى الساقين ∴ ق (∠ ع) =ق (∠ ص) = (١٨٠° ـ ٨٠°) ÷ ٢ =٥٠°

$\overline{\text{س ل}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ ⟸ ل منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ ص ل = ل ع = ١٢ ÷ ٢ =٦ سم

$\overline{\text{س ل}}$ ينصف ∠ص س ع ∴ ق (∠ ص ل س) = ق (∠ ع ل س) =٤٠°

جا ٤٠° = $\frac{٦}{\text{س ص}}$ س ص= $\frac{٦}{\text{جا ٤٠°}}$ = ٩٫٣ سم

∴ حل Δ س ص ع

س ص = ٩٫٣ سم	س ع =٩٫٣ سم	ص ع = ١٢ سم
ق (∠ ع) =٥٠°	ق (∠ص) =٥٠°	ق (∠ س) =٨٠°

****

تمـــــــارين

حل المثلث س ص ع القائم الزاوية فى ص فى الحالات الآتية :

(١) ق (∠ ع) = ٣٢° ، س ع = ٢٥ سم

(٢) ق (∠ ع) = ١٥َ ٥٤° ، ص ع = ٢٠ سم

(٣) ق (∠ س) = ٤٢° ، س ع = ٢٤ سم

(٤) س ص = ٢٧ سم ، ص ع = ٢٠ سم

(٥) س ص = ١١٫٦ سم ، س ع = ١٨٫٦ سم

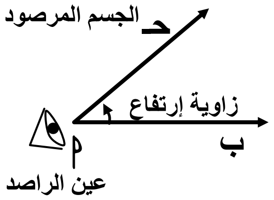
(٦) س ص = ١٦٫٣ سم ، ص ع = ٢٥ سم

(٧) أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٥٨° ، ب جـ = ١٥ سم ، رسم أ ء ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه فى ء حيث أ ء = ١٠ سم أوجد : ق (∠ جـ)

(٨) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ جـ = ٢٥ سم ، ق (∠ جـ أ ب) = ٢٣° أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

(٩) أ ب جـ ء معين فيه أ جـ = ١٨٫٨ سم ، ب ء = ٢٥ سم أوجد : ق (∠ أ ء جـ) ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$

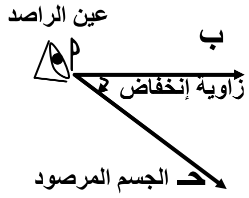
تطبيقات على حل المثلث
زوايا الإرتفاع و الإنخفاض



زاوية الإرتفاع :

إذا فرض أن الراصد عند م ، الجسم المرصود عند حـ م على مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين م ب الأفقى ، م حـ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود تسمى :

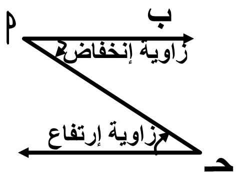
زاوية إرتفاع الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة م



زاوية الإنخفاض :

إذا فرض أن الراصد عند م ، الجسم المرصود عند حـ أسفل مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين م ب الأفقى ، م حـ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود تسمى :

زاوية إنخفاض الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة م

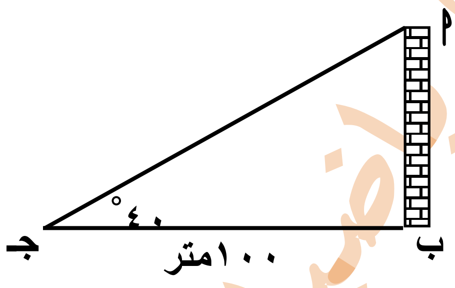


ملاحظة :

قياس زاوية إنخفاض حـ بالنسبة لنقطة م يساوى قياس زاوية إرتفاع م بالنسبة لنقطة حـ

لأن : ق (∠ م) = ق (∠ حـ) بالتبادل

مثـ١ـال : من نقطة على بُعد ١٠٠ متر . من قاعدة برج قيست زاوية أرتفاع قمة البرج فكانت ٤٠° أوجد أرتفاع البرج لاقرب متر



الحـــــــل

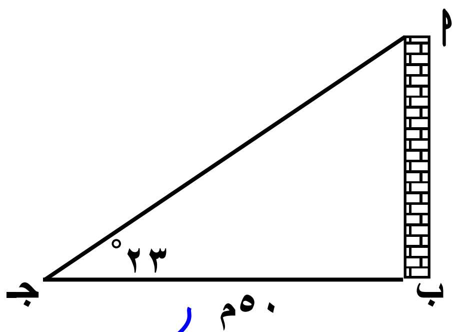
ظا ٤٠° = $\frac{\text{م ب}}{١٠٠}$

الأرتفاع = البعد × ظل زاوية الأرتفاع

أرتفاع البرج م ب = ١٠٠ ظا ٤٠° = ٨٣٫٩ ≃ ٨٤ متر

****

مثـ٢ـال : من نقطة على بُعد ٥٠ متر من قاعدة منزل قيست زاوية أرتفاع قمة المنزل فكانت ٢٣° أوجد أرتفاع المنزل لاقرب متر



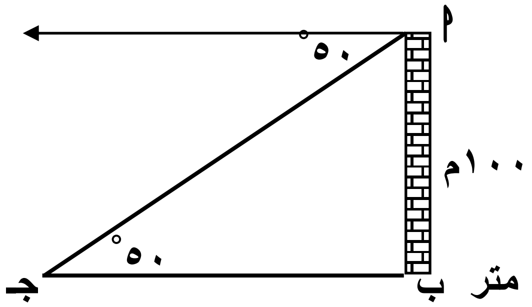
الحـــــــل

∵ ظا٢٣° = $\frac{\text{م ب}}{٥٠}$

الأرتفاع = البعد × ظل زاوية الأرتفاع

أرتفاع المنزل م ب = ٥٠ ظا ٢٣° = ٢١٫٢٢ ≃ ٢١ متر

مثـ٣ـال : من قمة برج أرتفاعه ١٠٠ متر قيست زاوية أنخفاض سيارة واقفة فى الشارع فكانت ٥٠° . أوجد بُعد السيارة عن قاعدة البرج



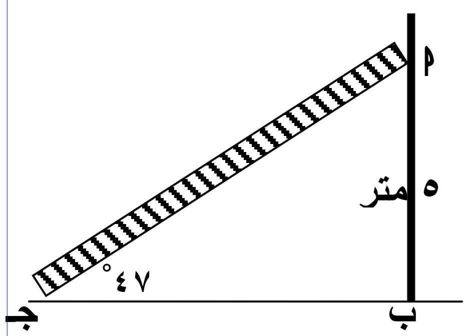
الحـــــــل

ظا ٥٠° = ١٠٠ / ب جـ

البعد = الأرتفاع / ظل زاوية الأنخفاض　∴ ب جـ = ١٠٠ / ظا ٥٠ ≃ ٨٤ متر

****

مثـ٤ـال سلم يستد بطرفه العلوى على حائط رأسى أرتفاعه ٥ متر فإذا كان السلم يصنع مع الأرض زاوية قياسها ٤٧° أوجد طول السلم



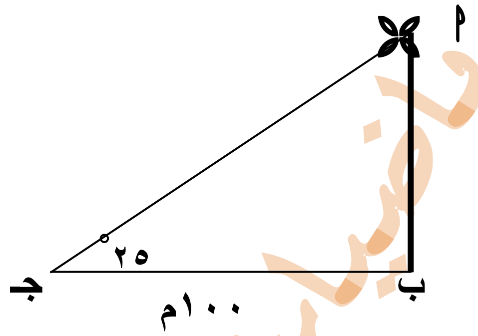
الحـــــــل

جا جـ = ﻫ ب / ﻫ جـ　　جا٤٧° = ٥ / ﻫ جـ

طول السلم ﻫ جـ = ٥ / جا ٤٧° = ٦٫٨٣٧ متر

****

مثـ٤ـال : طفل يمسك بيده بخيط مربوط فى طرفه الاخر طائرة ورقية فإذا كان طول الخيط ١٠٠متر أوجد أرتفاع الطائرة عن سطح الارض (مع أهمال طول الطفل) علماً بأن الخيط يصنع مع الافقى زاوية قياسها ٢٥°



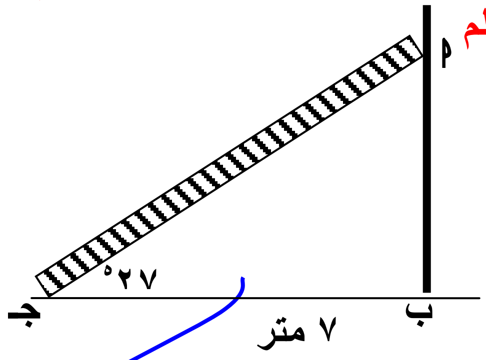
الحـــــــل

جا ٢٥° = ﻫ ب / ﻫجـ　　جا ٢٥° = ﻫ ب / ١٠٠

ﻫ ب = ١٠٠ جا ٢٥ =٤٢٫٢٦ ≃ ٤٢متر

****

مثـ٥ـال:سلم يستد بطرفه العلوى على حائط رأسى فإذا كان الطرف السفلى يبعد عن الحائط بمقدار٧م والسلم يصنع مع الأرض زاوية قياسها ٢٧° أوجد طول السلم



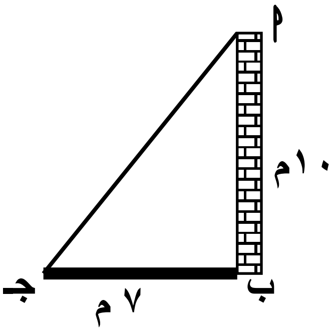
الحـــــــل

جتا جـ = ب جـ / ﻫ جـ　　جتا٢٧° = ٧ / ﻫ جـ

7 ÷ cos 27 = ▭

طول السلم ﻫ جـ = ٧ / جتا ٢٧° = ٧٫٨٦ ≃ ٨ متر

مثـ٦ـال : عمود من أعمدة الأنارة أرتفاعه ١٠م يلقى ظلاً على الارض طوله ٧م أوجد زاوية ارتفاع الشمس عند هذه اللحظة



الحـــــــل

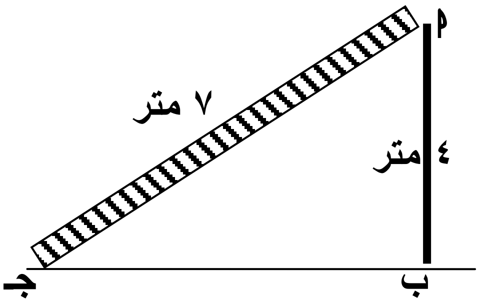
ظاجـ = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{١٠}{٧}$

10 ÷ 7 = sh tan = ,,,

∴ زاوية أرتفاع الشمس عن الأرض ق(∠جـ) = ٥٥°

****

مثـ٧ـال : سلم طوله ٧ متر يستند بطرفه العلوى على حائط أرتفاعه ٤ متر أوجد قياس زاوية ميل السلم على الارض



الحـــــــل

جاجـ = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = \frac{٤}{٧}$

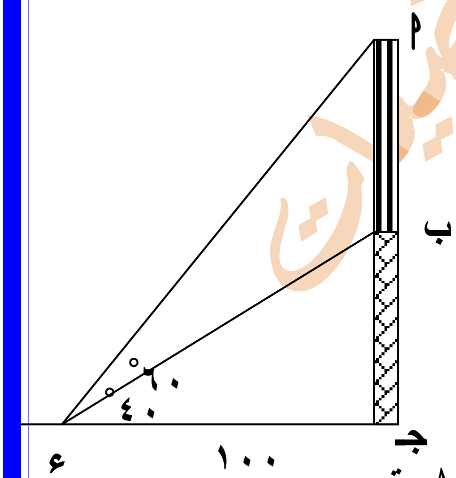
4 ÷ 7 = sh sin = ,,,

∴ زاوية ميل السلم على الارض ق(جـ) = ٣٤° ٥٠/

****

مثـ٨ـال : سارية علم مثبتة فوق سطح مبنى أرتفاعه ومن نقطة على سطح تبعد ١٠٠ مترعن المبنى وُجد أن قياس زاويتى أرتفاع قمة وقاعدة السارية ٦٠°، ٤٠° على الترتيب أوجد طول السارية .

الحـــــــل



فى Δ ا جـ ء

ظا٦٠ = $\frac{\text{ا جـ}}{١٠٠}$ ا جـ = ١٠٠ظا٦٠= ١٧٣٫٢ م

فى Δ ب جـ ء

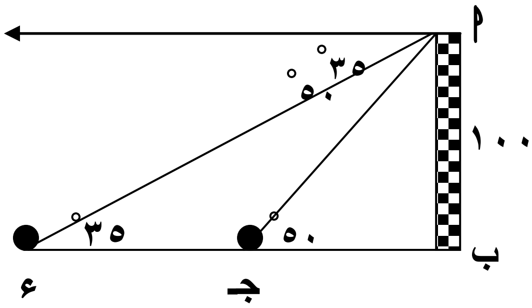
ظا٤٠ = $\frac{\text{ب جـ}}{١٠٠}$ ب جـ = ١٠٠ظا٤٠= ٨٣٫٩ م

أرتفاع السارية = ا ب = ا جـ - ب جـ = ١٧٣٫٢ – ٨٣٫٩ ≃ ٨٩ متر

****

مثـ٩ـال : من قمة صخرة أرتفاعها ١٠٠متر . رصد شخص سفينتين فى مستوى أفقى واحد فوجد أن قياس زاويتى أنخفاضهما ٥٠° ، ٣٥° أوجد البعُد بين السفينتين .

الحـــــــل



فى Δ ٲ جـ ب　　ظا ٥٠° = $\frac{١٠٠}{ب جـ}$

ب جـ = $\frac{١٠٠}{ظا ٥٠°}$ = ٨٣٫٩ م

فى Δ ٲ ب ء　　ظا ٣٥° = $\frac{١٠٠}{ب ء}$

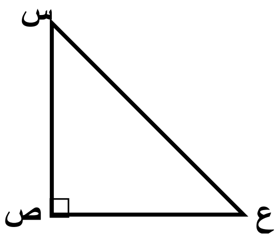
ب ء = $\frac{١٠٠}{ظا ٣٥°}$ = ١٤٢٫٨م

البُعد بين السفينتين = جـ ء = ب ء ـ ب جـ = ١٤٢٫٨ ـ ٨٣٫٩ = ٥٨٫٩ ≃ ٥٩ متر

****

تدريب : من نقطة على سطح الأرض تبعد ٣١ متر من قاعدة برج رصد شخص زاوية إرتفاع برج فوجدها٤٣° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

الحـــــــل



نرسم المثلث س ص ع حيث : س ص يمثل إرتفاع البرج

، ع تمثل عين الراصد

$\frac{س ص}{ص ع}$ = ...　　∴ $\frac{س ص}{........}$ = ظا ....°

∴ س ص " إرتفاع البرج " = ... × .... = ... سم

****

تمـــــــــارين

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٢١ متر من قاعدة برج رصد شخص زاوية إرتفاع برج فوجدها ٤٣° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

(٢) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٨٠ متر من قاعدة برج رصد شخص زاوية إرتفاع برج فوجدها ٤٧′ ٣٥° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

(٣) من قمة فنار إرتفاعه ١٠٠ متر رُصد قارب فوجد أن زاوية إنخفاضه ١٠′ ٢٠°

أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار أقرب متر

(٤) من قمة برج إرتفاعه ٥٠ متر قيست زاوية إنخفاض سيارة فكانت ٢٥′ ٢٠°

أوجد بعد السيارة عن قاعدة البرج أقرب متر

(٥) عمود من أعمدة البرق إرتفاعه ٦ متر يلقى ظلاً على الأرض طوله ٤ متر

أوجد قياس زاوية إرتفاع الشمس عندئذ

(٦) من قمة برج قيست زاوية إنخفاض سيارة فكانت ١٢° فإذا كان بعد السيارة عن قاعدة

البرج ٤٠ متر أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر

(٧) يسير شخص على طريق منحدر يميل على سطح الأرض بزاوية قياسها ٤٨′ ١٢°

فإذا سار مسافة ٢ كيلو متر أوجد إرتفاعه عن سطح الأرض حينئذ لأقرب متر

(٨) سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ويبعد طرفه السفلى

عن الحائط بمقدار ١.٣ متر فإذا كان قياس زاوية ميل السلم على الأرض ٧٠° أوجد طول السلم

(٩) رصد شخص طائرة على إرتفاع ١٥٠٠ متر من سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية

إرتفاعها ٣٥′ ٤٥° أوجد بعد الشخص عن الطائرة لأقرب متر

(١٠) من نقطة على بعد ٣٠ متر من قاعدة منزل قيست زاوية إرتفاع أعلى نقطة فيه فكان

قياسها ٣٦′ ٣٦° أوجد إرتفاع المنزل لأقرب متر ، وإذا سرنا نحو المنزل مسافة ١٠ أمتار

فكم يصبح قياس زاوية الإرتفاع عندئذ

(١١) من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدة مئذنة قيست زاوية إرتفاع قمة المئذنة فكان

قياسها ١٧′ ٣٢° أوجد إرتفاع المئذنة لأقرب متر ، وإذا إبتعدنا عن المئذنة مسافة ١٥٠ متر

فكم يصبح قياس زاوية إرتفاع قمة المئذنة عندئذ

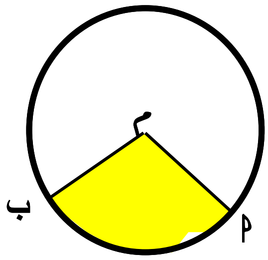
(١٢) قيست زاوية إرتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدة

البرج فكانت ٣٠° ، كم متراً يجب أن ترتفعها قمة البرج حتى يصبح قياس زاوية

إرتفاعها من نفس النقطة ٤٥° لأقرب متر

***

القطاع الدائرى والقطعة الدائرية



القطاع الدائرى هو :

جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ،

و نصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس

محيط القطاع = ٢ نق + ل

حيث نق طول نصف قطر دائرة القطاع ، ل طول قوس القطاع

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ ^ء^ نق^٢^ = $\frac{\text{س}}{٣٦٠^\circ}$ × مساحة دائرة القطاع

حيث هـ ^ء^ زاوية القطاع المركزية بالتقدير الدائرى

، س° زاوية القطاع المركزية بالتقدير الستينى

، هـ ^ء^ = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

****

مثـ١ـال : قطاع دائرة طول نصف قطر دائرته ٦سم يحصر قوساً طوله ٥ سم أوجد محيطه ومساحته

الحـــــــــل

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٥ = ١٢ +٥ = ١٧ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ **نق × ل =** $\frac{١}{٢}$ **× ٦ × ٥ = ١٥ سم^٢^**

****

مثـ٢ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١,٥ ^ء^ وطول نصف قطر دائرته ٤ سم

أوجد محيطه ومساحته

الحـــــــــل

ل = هـ ^ء^ × نق = ١,٥ × ٤ = ٦ سم

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٤ + ٦ = ٨ +٦ = ١٤سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ **نق × ل =** $\frac{١}{٢}$ **× ٤ × ٦ = ١٢ سم^٢^**

****

مثـ٣ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٥٠° وطول نصف قطر دائرته ٦ سم
أوجد محيطه ومساحته .

الحـــــــل

هـ ً = $\frac{٥٠ \times \pi}{١٨٠}$ = ٠,٨٧ ً   نق = ٦سم

ل = هـ ً × نق = ٠,٨٧ × ٦ = ٥,٢٢ سم

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٥,٢٢ = ١٧,٢٢ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥,٢٢ = ١٥,٦٦ سم

****

مثـ٤ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية = ٦٠° ومساحة دائرته = ١٥سم^{٢}
أوجد مساحة القطاع

الحـــــــل

مساحة القطاع = $\frac{س}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة = $\frac{٦٠°}{٣٦٠°}$ × ١٥ = ٢,٥ سم^{٢}

****

مثـ٥ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية = ١,٥ ً ومساحة دائرته = ٦π سم^{٢}
أوجد مساحة القطاع

الحـــــــل

مساحة القطاع = $\frac{هـ ً}{٢\pi}$ × مساحة الدائرة = $\frac{١,٥ ً}{٢\pi}$ × ٦π = ٤,٥ سم^{٢}

****

مثـ٦ـال : قطاع دائرى محيطه ٢٠سم وطول نصف قطر دائرته = ٦سم أوجد مساحته

الحـــــــل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢٠

٢ × ٦ + ل = ٢٠

١٢ + ل = ٢٠   ∴ ل = ٢٠ ـ ١٢ = ٨ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم

****

مثـ٧ـال : قطاع دائرى محيطه ٢٠سم وطول قوسه = ٦سم أوجد مساحته ٠

الحـــــــــل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢٠

٢نق = ٢٠ ـ ٦ = ١٤ ∴ نق = ٧ سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٧ = ٢١ سم

****

مثـ٨ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية = ١٫٥ ᵈ ومحيطه = ٣٥سم أوجد مساحته

الحـــــــــل

∵ ل = هـ ᵈ × نق ∴ ل = ١.٥ نق

∵ محيط القطاع = ٢نق + ل = ٣٥

= ٢نق + ١٫٥ نق = ٣٥

٣٫٥ نق = ٣٥ ∴ نق = ١٠ سم

∴ ل = ١٫٥ × ١٠ = ١٥ سم

∴مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ × نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٥ = ٧٥ سم^{٢}

****

مثـ٩ـال : قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٢٫٢ ᵈ وطول قوسه = ١١ سم أوجد محيطه ومساحته

الحـــــــــل

نق = $\frac{ل}{هـ ᵈ}$ = $\frac{١١}{٢٫٢}$ = ٥سم

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٥ +١١ = ١٠ +١١ = ٢١ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق ل = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١١ = ٢٧٫٥ سم^{٢}

****

مثـ١٠ـال : قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم^{٢} وطول نصف قطر دائرته = ١٠سم . أوجد محيطه

الحـــــــــل

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = ٣٠

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ل = ٣٠ ٥ ل = ٣٠

∴ ل = $\frac{٣٠}{٥}$ = ٦ سم

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ١٠ + ٦ = ٢٠ +٦ = ٢٦ سم

مثــ١١ــال : قطاع دائرى مساحته ٤٠ سم^{٢} يحصر قوساً طوله = ١٠سم أوجد محيطه

الحـــــــل

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = ٤٠

∴ $\frac{١}{٢}$ × نق × ١٠ = ٤٠   ∴ نق = $\frac{٤٠}{٥}$ = ٨سم

محيط القطاع = ٢نق + ل = ٢ × ٨ + ١٠ =١٦+١٠ = ٢٦ سم

****

مثــ١٢ــال قطاع دائرى يحصر قوساً طوله يساوى ضعف طول نصف قطر دائرته ومحيطه = ٢٤ سم أوجد مساحته

الحـــــــل

∵ ل = ٢ نق

∵ محيط القطاع = ٢نق + ل = ٢٤

٢نق +٢نق = ٢٤   ٤ نق = ٢٤

∴ نق = ٦سم   ، ∴ ل = ٢ × ٦ = ١٢سم

∴ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٢ = ٣٦ سم^{٢}

****

مثــ١٣ــال :قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٠.٦ء ومساحته ٣٠سم^{٢} أوجد محيطه

الحـــــــل

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ ء × نق^{٢} = ٣٠

= $\frac{١}{٢}$ × ٠.٦ × نق^{٢} = ٠.٣ نق^{٢} = ٣٠

نق^{٢} = $\frac{٣٠}{٠.٣}$ = ١٠٠   ∴ نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠سم

∴ ل = هـ ء × نق = ٠.٦ × ١٠ = ٦ سم

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ١٠ + ٦= ٢٠ + ٦ = ٢٦ سم

****

مثــ١٤ــال : قطاع دائرى محيطه = ١٤سم ومساحته = ١٢ سم^{٢} أوجد أبعاده

الحـــــــل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ١٤ ∴ ل = ١٤ ـ ٢ نق

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = ١٢ ∴ نق × ل = ٢٤

نق (١٤ ـ ٢ نق) = ٢٤

ـ ٢ نق^٢ + ١٤ نق ـ ٢٤ = ٠ ÷٢

نق^٢ ـ ٧ نق +١٢ = (نق ـ ٣)(نق ـ ٤) = ٠

∴نق = ٣ أ، نق = ٤

∴ل= ١٤ ـ ٢ × ٣ = ١٤ ـ ٦ = ٨ أ، ل = ١٤ ـ ٢ × ٤= ١٤ ـ ٨ = ٦سم

****

تدريب : أكمل ما يأتى :

(١) محيط القطاع الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٥ سم = ...

(٢) مساحة القطاع الذى طول نصف قطر دائرته ٤ سم وطول قوسه ٥ سم = ...

(٣) قطاع دائرى محيطه ١٦ سم ، طول قوسه ٤ سم يكون طول نصف قطر دائرته = ...

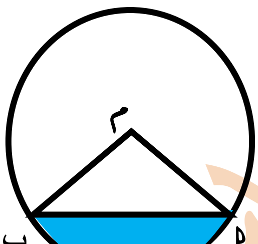
(٤) قطاع دائرى محيطه ١٨ سم ، طول قطر دائرته ١٠ سم يكون طول قوسه = ...

(٥) قطاع دائرى مساحته ١٨ سم^٢ ، طول قطر دائرته ٨ سم يكون طول قوسه = ...

(٦) قطاع دائرى مساحته ١٢ سم^٢ ، طول قوسه ٦ سم يكون طول قطر دائرته = ...

****

القطعة الدائرية



قطعة صغرى

القطعة الدائرية هى :

جزء من سطح دائرة محدود بقوس من الدائرة ووتراً

ماراً بنهايتى ذلك القوس

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^ء ـ حا هـ$^\circ$)

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين متجاورين × حيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة : إذا كان المطلوب مساحة القطعة الكبرى

نلاحظ أن قياس زاوية القطعة الكبرى = ٣٦٠$^\circ$ ـ هـ^ء

كما يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة

مثـ١ـال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١٢٠° وطول نصف قطر دائرتها = ١٠سم

الحـــــــــل

هـ^ء = $\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٢٫١^ء

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^ء − جا هـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (٢٫١ − جا١٢٠°)

= ٥٠ (٢٫١ − جا ١٢٠°) = ٦١٫٧ سم^٢

****

مثـ٢ـال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١٫٢^ء وطول نصف قطر دائرتها = ٨سم

الحـــــــــل

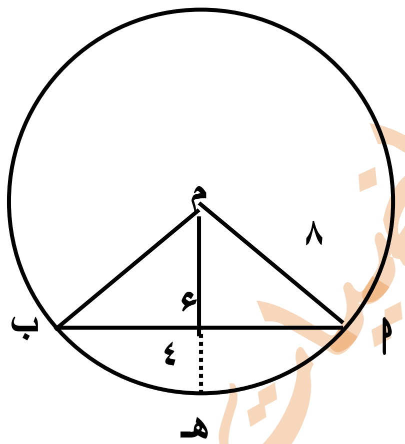
هـ° = $\frac{١٫٢^ء \times ١٨٠°}{\pi}$ = ٦٩°

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^ء − جا هـ°) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ (١٫٢^ء − جا٦٩°) = ٨٫٥ سم^٢

****

مثـ٣ـال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨سم وأرتفاعها = ٤ سم

الحـــــــــل



م هـ = نق = ٨ سم

م ء = ٨ − ٤ = ٤ سم

جتا(∠أ م ء) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (∠أ م ء) = ٦٠°

∴ ق (∠أ م ب) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

هـ^ء = $\frac{١٢٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٢٫١^ء

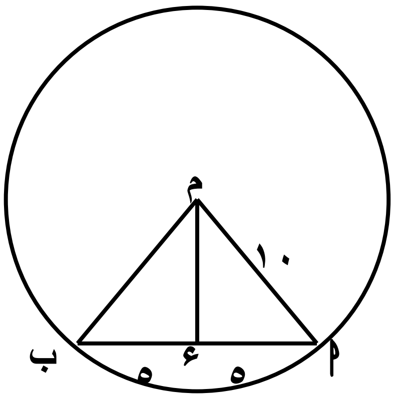
∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^ء − جا هـ°)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ (٢٫١^ء − جا١٢٠°) = ٣٩٫٣ سم^٢

****

مثـ٤ـال : أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول نصف قطر دائرتها يساوى طول وترها = ١٠سم

الحــــــــل



أ ء = ء ب = ٥ سم		جا(∠أ م ء) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠أ م ء) = ٣٠°

∴ ق (∠أ م ب) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∴ ق (∠أ م ب) المنعكسة = ٣٦٠° ــ ٦٠° = ٣٠٠°

هـ^ء = $\frac{٣٠٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٥,٢٣٥^ء

∴ مساحة القطعة الدائرية الكبرى = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^ء ــ جا هـ°)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ (٥,٢^ء ــ جا٣٠٠°) = ٥٠ (٥,٢^ء ــ جا٣٠٠°) = ٣٠٣ سم^٢

****

تمـــــــــارين

(١) أوجد محيط ومساحة قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، وطول نصف قطر دائرته ١٠ سم

(٢) أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١.٤^ء وطول قطر دائرته ١٨ سم

(٣) أوجد مساحة قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ١٣٥° وطول قطر دائرته ١٤ سم

(٤) قطاع دائرى مساحته ٥ سم^٢ ، وطول قطر دائرته ٢ سم أوجد طول قوس القطاع

(٥) قطاع دائرى مساحته ٥٦ سم^٢ ، وطول قوسه ١٤ سم أوجد محيط القطاع

(٦) قطاع دائرى مساحته ٢٥ سم^٢ ، وقياس زاويته المركزية ٠.٥^ء أوجد محيط القطاع

(٧) قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° ، طول قوسه ٣.٥ سم أوجد مساحته

(٨) قطاع دائرى محيطه ٢٨ سم ، و طول نصف قطر دائرته ٧ سم أوجد مساحته ، قياس زاويته بالتقدير الستينى لأقرب درجة

(٩) قطاع دائرى محيطه ٨٨ سم ، و طول قوسه ٣٢ سم أوجد مساحته ، و قياس زاويته بالتقدير الستينى لأقرب درجة

(١٠) قطاع دائرى محيطه ١٢ سم ، و مساحته ٨ سم^2 أوجد طول قطر دائرته ، وقياس زاويته بالتقدير الستينى لأقرب درجة

(١١) دائرة مساحة سطحها ٢٥ ط سم^2 أوجد مساحة قطاع دائرى منها قياس زاويته المركزية ١.٥^ء لأقرب سم^2

(١٢) دائرة مساحة سطحها ٣٠٠ سم^2 أوجد قياس الزاوية المركزية لقطاع دائرى منها مساحته ١٠٠ سم^2 بالتقدير الستينى

(١٣) وتر فى دائرة طوله ٢٠ سم يقابل زاوية محيطية قياسها ٦٠° أوجد مساحة القطاع الدائرى

(١٤) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ١٢٠° لأقرب سم^2

(١٥) أوجد مساحة قطعة دائرية طول قطر دائرتها ٢٤ سم وقياس الزاوية المحيطية المقابلة لها ٥٠° لأقرب سم^2

(١٦) أوجد مساحة قطعة دائرية طول قطر دائرتها ٢٠ سم ، وطول قوسها ٢٦ سم لأقرب سم^2

(١٧) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها = طول وترها = ١٠ سم لأقرب سم^2

(١٨) أوجد مساحة قطعة دائرية طول إرتفاعها ٤ سم ، وطول وترها ١٦ سم لأقرب سم^2

(١٩) قطاع دائرى طول قطر دائرته ٢٠ سم ، ومساحته ١٠٠ سم^2 أوجد مساحة القطعة الدائرية المشتركة معه فى نفس القوس لأقرب سم^2

(٢٠) وتران متساويان فى الطول فى دائرة طول كل منهما ١٢ سم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° أوجد مساحة الجزء المحصور بين هذين الوترين