ليلة الإمتحان

الإحصاء

لطلبة الثانوية العامة

أشرف زكي

أشرف زكي
أستاذ الرياضيات
٠١٠٠٥١٥٦٧٣٥

قوانين المنهج

١ قانون معامل إرتباط الخطي لبيرسون

$$ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

٢ قانون معامل إرتباط الرتب لسبيرمان

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

* ملاحظات هامة *

① $-١ \leq ر \leq ١$

② ر { طردي (+) ، منعدم (٠) ، عكسي (−) } نوع الإرتباط

③ درجة الإرتباط ← قوي { ١٠٠ ، ٠٫٩ ، ٠٫٨ } متوسط { ٠٫٦ ، ٠٫٥ ، ٠٫٤ } ضعيف { ٠٫٣ ، ٠٫٢ ، ٠٫١ }

٣ معادلة خط الانحدار $ص = أ س + ب$

* $أ$ (معامل الانحدار) $= \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$

* $ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن}$

ملاحظة { $\sum س = ن \bar{س}$ ، $\sum ص = ن \bar{ص}$ }

٤ قوانين الإحتمال

١ $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

٢ $ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$

٣ $ل(أ') = 1 - ل(أ)$

٤ $ل(أ - ب) = ل(أ \cap ب') = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

٥ $ل(ب - أ) = ل(أ' \cap ب) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

٦ $ل(أ - ب) + ل(ب - أ) = ل(أ \cup ب) - ل(أ \cap ب)$

٧ $ل(أ' \cup ب') = ل(أ \cap ب)' = 1 - ل(أ \cap ب)$

٨ $ل(أ' \cap ب') = ل(أ \cup ب)' = 1 - ل(أ \cup ب)$

٩ $ل(أ' \cup ب) = 1 - ل(أ) + ل(أ \cap ب)$

١٠ **الإحتمال الشرطي** $\boxed{ل(أ|ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}}$ ← المقام الثاني

ويكون $ل(أ'|ب) = 1 - ل(أ|ب)$

١١ **الحوادث المستقلان** : إذا كان أ ، ب حدثان يكون

$\boxed{ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)}$

والعكس صحيح .

١٢ **ملاحظات**

① أ ، ب حدثان متنافيان $\Leftrightarrow ل(أ \cap ب) = صفر$

② أ ⊂ ب يكون $ل(أ \cap ب) = ل(أ)$ ، $ل(أ \cup ب) = ل(ب)$

③ إذا كان $ل(أ) = ل(أ')$ فإن : $ل(أ) = ٠,٥$ ، $ل(أ') = ٠,٥$

④ إذا كان الحدثان مستقلان فإن : $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

٥ ترانيون الكتغير العشوائي

سـ	د(سـ)	سـ × د(سـ)	سـ² × د(سـ)
القيم	الاحتمالات	القيم × الاحتمالات	مربع القيم × الاحتمالات
	١	م	

① م التوقع (الوسط الحسابي)
= ∑ سـ × د(سـ)
مجموع العمود الثالث

② التباين ل² = مجموع العمود الرابع − م²

③ الانحراف المعياري ل = √التباين

④ معامل الاختلاف = $\frac{ل}{م} \times 100$ = ... ٪

٦ تانون دالة الكثافة

بـ ريادة إلى إضمال (مسام)

$$L(P < س < ب) = \frac{1}{2}[د(P) + د(ب)](ب - P)$$

مع تمنياتي بأعوام جامعية سعيدة ،

الأسئلة

١ إذا كان: $\sum س = ٤٠$ ، $\sum ص = ٣٠$ ، $\sum س ص = ٢٣٢$

$\sum س^٢ = ٣٦٠$ ، $\sum ص^٢ = ٢٠٠$ ، $ن = ٥$ أوجد:

① معادل الارتباط الخطي لبيرسون بين س ، ص ومدى قوته

② معادلة خط إنحدار ص على س ، ثم تنبأ بقيمة ص عندما س = ٩

الحل

① $ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^٢ - (\sum س)^٢} \sqrt{ن \sum ص^٢ - (\sum ص)^٢}}$

$ر = \frac{٥ \times ٢٣٢ - ٤٠ \times ٣٠}{\sqrt{٥ \times ٣٦٠ - (٤٠)^٢} \sqrt{٥ \times ٢٠٠ - (٣٠)^٢}} = -٠٫٢٨٢٨$ عكسي ضعيف

② ∴ معادلة الانحدار ص = أ س + ب

$أ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^٢ - (\sum س)^٢} = \frac{٥ \times ٢٣٢ - ٤٠ \times ٣٠}{٥ \times ٣٦٠ - (٤٠)^٢}$

$= -٢٫٠$

$ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \frac{٣٠ + ٢٫٠ \times ٤٠}{٥} = ٧٫٦$

∴ معادلة خط الانحدار المطلوبة هي: $ص = -٢٫٠ س + ٧٫٦$

عندما س = ٩ يكون ص = $-٢٫٠ \times ٩ + ٧٫٦ = ٥٫٨$

٢ الجدول التالى يمثل حجم المبيعات (س) والربح الناتج عن المجموعة المكونة من ٦ شركات المطلوب حساب معامل ارتباط الرتب بين حجم المبيعات والربح :

حجم المبيعات (س)	٥٠٠	٦٠٠	٤٠٠	٤٨٠	٥٥٠	١٠٠
الربح (ص)	٢٠٠	٤٠٠	٢٥٠	٢٠٠	٤٠٠	٩٠
	٢	١٫٥	٤	٥	١٫٥	٦

الحل

س	ص	ف	ف٢
٢	٢	٠	٠
١	١٫٥	-٠٫٥	٠٫٢٥
٥	٤	١	١
٤	٥	-١	١
٢	١٫٥	٠٫٥	٠٫٢٥
٦	٦	٠	٠
			٢٫٥

رتب

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٢٫٥}{٣٥ \times ٦}$$

$$= ٠٫٩٢٩$$

(طردى قوى)

٣ الجدول التالى يبين تقديرات ٦ طلاب فى مادتى الفيزياء والرياضيات

الفيزياء	مقبول	جيد	ممتاز	ضعيف	جيد جداً	جيد
الرياضيات	مقبول	جيد جداً	جيد جداً	مقبول	ممتاز	ضعيف
	٤٫٥	٢٫٥	١٫٥	٤٫٥	١	٦

أحسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان مبيناً قوته .

رتب

س	ص	ف	ف٢
٥	٤,٥	٥	٢٥,
٣,٥	٢,٥	١	١
١	٦,٥	١,٥	٢٢,٥
٦	٤,٥	١,٥	٢٢,٥
٢	١	١	١
٣,٥	٦	-٥,	٦,٢٥
			١٣

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ١٣}{٣٠ \times ٦}$$

$$\approx (٠,٦٣)$$

(طردي متوسط)

٤ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي:

س	١	٢	٤	٦
د(س)	٠,٢	٩	٠,٤	٠,١

أوجد قيمة ٩ ثم أحسب قيمة كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي س

الحل

∵ التوزيع احتمالي ∴ ٠,٢ + ٩ + ٠,٤ + ٠,١ = ١ ⇐ ٩ = ١ - ٠,٧ = (٠,٣)

١	٠,٢	٠,٢	٠,٢
٢	٠,٣	٠,٦	١,٢
٤	٠,٤	١,٦	٦,٤
٦	٠,١	٠,٦	٣,٦
	١	٢	المجموع

١) الوسط الحسابي م = ٢

٢) التباين ع٢ = ١١,٤ - (٢)٢ = ٧,٤

٣) الانحراف المعياري = $\sqrt{٧,٤}$ = ٢,٧٤

٤) معامل الاختلاف = $\frac{ع}{م} \times ١٠٠$

$= \frac{٢,٧٤}{٢} \times ١٠٠ = ١٣٧,٠ ٪$

٥ إذا كان س متغير عشوائي وكانت توزيعه الاحتمالي يعطى بالدالة د
حيث د(س) = $\frac{س}{10}$ ، س ∈ {١، ٢، ٣، ك} فأوجد:
① قيمة ك ، ثم اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س .
② المتوقع والتباين للمتغير العشوائي س .

الحل

① بالتعويض عن قيمة س في الدالة

س =	١	٢	٣	ك
د(س)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{ك}{10}$

∵ التوزيع احتمالي ∴ $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{ك}{10} = 1$

$\frac{ك+6}{10} = 1$

ك + ٦ = ١٠

ك = ١٠ − ٦ = ٤

∴ التوزيع الاحتمالي

س =	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤

②

١	٠,١	٠,١	٠,١
٢	٠,٢	٠,٤	٠,٨
٣	٠,٣	٠,٩	٢,٧
٤	٠,٤	١,٦	٦,٤
	١	٣	١٠

① المتوقع م = ٣

② التباين $ع^2$ = ١٠ − (٣)^2 = ١

③ الانحراف المعياري = $\sqrt{1}$ = ١

④ معامل الاختلاف = $\frac{ع}{م} \times 100$

= $\frac{1}{3} \times 100$

= ٣٣,٣ ٪

٦ اذا كان سـ متغيراً عشوائياً منقطعاً مداه هو: {٠، ١، ٣، ٥}
وكان ل(سـ = ٠) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(سـ = ١) = $\frac{١}{٦}$ ، ل(سـ = ٣) = $\frac{١}{٤}$
أوجد: ① التوزيع الاحتمالي للمتغير سـ .
② المتوسط ومعامل الاختلاف للمتغير سـ .

الحل

نفرض ل(سـ = ٥) = ك

∵ $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٤} + ك = ١$

ك = $١ - \frac{١١}{١٢} = \frac{١}{١٢}$

∴ التوزيع الاحتمالي هو

سـ	٠	١	٣	٥
ل(سـ)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{١٢}$

٠	$\frac{١}{٢}$	٠	٠
١	$\frac{١}{٢} - \frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$
٣	$\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{٩}{٤}$
٥	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٢٥}{١٢}$
	١	$\frac{٤}{٣}$	٤،٥

① الوسط الحسابي م = $\frac{٤}{٣} \approx ١،٣٣$

② التباين $ع^{٢} = ٤،٥ - (١،٣٣)^{٢}$

$= ٢،٧٤$

③ الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٢،٧٤} = ١،٦٥$

④ معامل الاختلاف = $\frac{ع}{م} \times ١٠٠$

$= \frac{١،٦٥}{١،٣٣} \times ١٠٠$

$= ١٢٤ ٪$

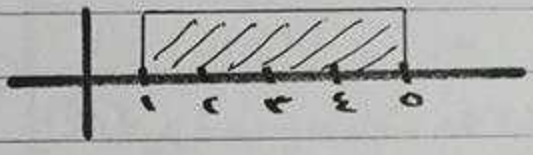
٧ إذا كان سه متغير عشوائي متصل وكان:

$$د(سه)=\begin{cases}\frac{س-١}{٨} & ،١\le س\le ٥\\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

(١) أثبت أن د(س) هي دالة كثافة

(٢) أوجد: ل(٢ < سه < ٣)

الحل



(١) ∵ ل(١ ≤ سه ≤ ٥)

$$=\frac{١}{٢}[د(١)+د(٥)](٥-١)$$

$$=\frac{١}{٢}[\text{صفر}+\frac{٤}{٨}]\times ٤$$

$$=\frac{١}{٢}\times\frac{٤}{٨}\times ٤=١$$ تحقق الشرط ①

∴ د(س) دالة كثافة

(٢) ل(٢ < سه < ٣)

$$=\frac{١}{٢}[د(٢)+د(٣)](٣-٢)$$

$$=\frac{١}{٢}[\frac{٢}{٨}+\frac{١}{٨}]\times ١$$

$$=\frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٨}\times ١=\frac{٢}{١٦}$$

٨ إذا كان سه متغير عشوائي متصلاً دالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س)=\begin{cases}\frac{س+ك}{٨} & ،٢\le س\le ٤\\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

(١) أوجد قيمة الثابت ك

(٢) أوجد ل(سه < ٣)

الحل

(١) ∵ دالة كثافة

$$\therefore ل(٢\le س\le ٤)=١$$

$$\frac{١}{٢}[د(٢)+د(٤)](٤-٢)=١$$

$$\frac{١}{٢}[\frac{٢+ك}{٨}+\frac{٤+ك}{٨}]\times ٢=١$$

$$\frac{٦+٢ك}{٨}=١$$

$$٦+٢ك=٨$$

$$٢ك=٨-٦=٢$$

$$\therefore \boxed{ك=١}$$

$$\therefore د(س)=\frac{س+١}{٨}$$

(٢) ل(سه < ٣)

$$=ل(٢\le س<٣)$$

$$=\frac{١}{٢}[د(٢)+د(٣)](٣-٢)$$

$$=\frac{١}{٢}[\frac{٢}{٨}+\frac{٤}{٨}]\times ١$$

$$=\frac{١}{٢}\times\frac{٧}{٨}\times ١$$

$$=\frac{٧}{١٦}$$

٩ إذا كان A ، B حدثين مستقلين وكان $L(A) = 0.4$

$L(B) = 0.6$ ، $L(A \cup B) = 0.8$

أوجد :-

① $L(A \cap B)$ ② $L(A \cup B)$

③ $L(A \mid B)$ ④ $L(\overline{A} \mid \overline{B})$

الحل

① $\because L(A \mid B) = \dfrac{L(A \cap B)}{L(B)}$

$0.8 = \dfrac{L(A \cap B)}{0.6}$

$\therefore L(A \cap B) = 0.8 \times 0.6 = (0.48)$

② $L(A \cup B) = L(A) + L(B) - L(A \cap B)$

$= 0.4 + 0.6 - 0.48$

$= (0.52)$

③ $L(B \mid A) = \dfrac{L(A \cap B)}{L(A)}$

$= \dfrac{0.48}{0.4} = (1.2)$

④ $L(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - L(A \mid B)$

$= 1 - 0.8 = (0.2)$

١٠ إذا كان A ، B حدثين مستقلين من فضاء العينة S وكان

$L(B) = 0.4$ ، $L(A \cup B) = 0.64$

أحسب :-

① $L(A \mid B)$ ② $L(\overline{A} \cap B)$

③ $L(A \cup \overline{B})$

الحل

$\because A$ ، B مستقلين

$\therefore L(A \cap B) = L(A) \times L(B)$

$0.24 = L(A) \times 0.4$

$\therefore L(A) = \dfrac{0.24}{0.4} = (0.6)$

① $L(A \mid B) = \dfrac{L(A \cap B)}{L(B)}$

$= \dfrac{0.24}{0.4} = (0.6)$

② $L(\overline{A} \cap B)$

$= L(B) - L(A \cap B)$

$= 1 - 0.4 + 0.6 = (\text{صح})$

③ $L(A \cup \overline{B})$

$= L(A) + L(\overline{B}) - L(A \cap \overline{B})$

$= 0.6 + 0.4 - 0.24 = (0.76)$

١١ A ، B حدثان مستقلان وكان

$L(A) = 0.6$ ، $L(A - B) = 0.36$

أوجد $L(A \cup B)$

الحل

$\because L(A - B) = L(A) - L(A \cap B)$

$0.36 = 0.6 - L(A) \times L(B)$

$0.24 = 0.6 - 0.6 \times L(B)$

$0.6 \times L(B) = 0.6 - 0.24 = 0.36$

$L(B) = (0.6)$

$\therefore L(A \cup B) = 0.6 + 0.4 - 0.24$

$= (0.76)$

إختر

١ معامل الإرتباط الخطي لمتغيرين مستقلين هو
(أ) -٠,٩٤ (ب) صفر
(ج) ١,٠٠ (د) ٠,٨٥

٢ أحد معاملات الإرتباط الآتية يمثل إرتباطاً عكسياً
(أ) -٠,٩ (ب) -٠,٥
(ج) -١,٠ (د) صفر

٣ إذا كانت معادلة خط الانحدار
ص = ٢ + ٠,٥ س فإن قيمة
ص المتوقعة عندما س = ٦ هي
(أ) ٤ (ب) ٥
(ج) ٧ (د) ٨

٤ إذا كانت جميع نقاط شكل
الانتشار تقع على خط مستقيم يميل
موجب فإن معامل الإرتباط الخطي هو
(أ) -١ (ب) صفر
(ج) $\frac{1}{2}$ (د) ١

٥ إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٤
ل(أ ∩ ب) = ٠,٠٨ فإن ل(أ ∪ ب) =
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{2}{5}$
(ج) ١ (د) $\frac{1}{6}$

٦ إذا كان ل(أ ∪ ب) = $\frac{1}{3}$
، ل(ب) = $\frac{12}{25}$ فإن ل(أ ∩ ب) =
(أ) $\frac{4}{25}$ (ب) $\frac{25}{36}$
(ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{16}{25}$

٧ إذا كان ق = {(أ، ب) : ...}
وكان أ ، ب أحداث مستقلة
حيث ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٤
فإن ل(أ ∩ ب) = ...
(أ) ٠,١ (ب) ٠,١٥
(ج) ٠,٣٥ (د) ٠,٦٥

٨ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين
وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٥
فإن ل(أ ∩ ب) = ...
(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤
(ج) ٠,٣ (د) ١,٠

٩ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين
وكان ل(أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤
فإن ل(أ ∪ ب) = ...
(أ) ١,٠ (ب) ٠,١٥
(ج) ٠,٢ (د) ٠,٦٥

١٠ إذا كان س متغير عشوائي مداه
{١، ٢، ٣، ٤، ٥} وكان
ل(س = ١) = ٢ ل(س = ٢) = $\frac{1}{4}$
ل(س = ٣) = $\frac{7}{16}$ فإن ل(س = ٥) = ...
(أ) $\frac{2}{8}$ (ب) $\frac{2}{16}$
(ج) $\frac{2}{4}$ (د) $\frac{11}{16}$

١١ إذا كان إرتباط لمتغيرين عشوائيين
٠,٢٥ ، ٠,٤ ومعامل الإرتباط ٠,٦
فإن المتوسط لهذا المتغير ...
(أ) ٠,٦٥ (ب) ١٠
(ج) ١,٠ (د) ٠,٧٥