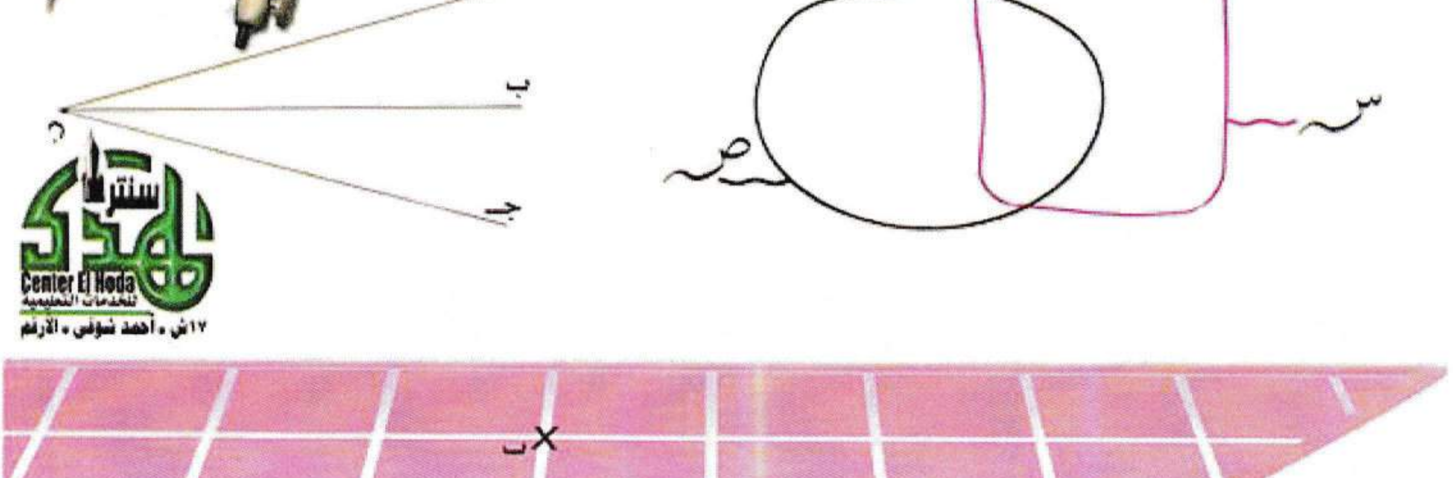
التفوق

فى التفاضل والتكامل

الصف الثالث الثانوى

أ / صابر عبدالرحيم محمود

٠١٢٢٢٦٢٠٠٢٤٤



بسم الله الرحمن الرحيم

وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ

عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صدق الله العظيم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين . . والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

أعزائي طلبة وطالبات الصف الثالث الثانوي

يسعدني أن أقدم لكم هذا الجهد المتواضع . . متمنيا لكم التفوق والنجاح بإذن الله . . .

دعاء بدء المذاكرة

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين .. وإلهام الملائكة المقربين..اللهم اجعل لساني عامراً بذكرك وقلبي بخشيتك ..وجسدي بطاعتك .. إنك على كل شئ قدير

من طرق تقوية المذاكرة

- ✪ الفهم أولا يساعد على الحفظ والتخزين ٠
- ✪ استذكر موضوعات متكاملة ٠
- ✪ الترابط بين ما تستذكره وما لديك من معلومات يقوى الذاكرة٠
- ✪ تصنيف المواد حسب الموضوعات وحسب البساطة والصعوبة يسهل المذاكرة
- ✪ الصحة بشكل عام عامل أساسي لتقوية الذاكرة ٠
- ✪ بعد صلاة الفجر من أفضل أوقات المذاكرة ٠
- ✪ الوضوء قبل المذاكرة والبدء بالقرآن ٠
- ✪ تخصيص مكان للمذاكرة بعيداً عن مكان النوم ٠
- ✪ الجلوس بحيث يكون الظهر مستقيم ٠
- ✪ أن يقع الضوء على الكتاب مباشرة ٠
- ✪ بعد مذاكرة المادة قم بمراجعة سريعة قبل تركها والانتقال إلى غيرها ٠

- ✪خطط يومك كل صباح بكتابة الأشياء التى يجب أن تعملها ٠
- ✪لا تقم بزيارة صديق إلا بعد أخذ موعد سابق للزيارة ٠
- ✪احتفظ دائماً بورقة وقلم لتسجيل الأفكار خلال أوقات الفراغ ٠
- ✪خطط أوقات الراحة وحاول أن تجعلها تتفق مع أوقات الصلاة ٠
- ✪استفد من وقت الفراغ بالقراءة أو بحفظ القرآن الكريم ٠
- ✪وفر كل المواد و التلخيصات اللازمة قبل أن تبدأ المذاكرة ٠

تزايد وتناقص الدوال

تعريف: اذا كانت الدالة د معرفة فى الفترة]أ، ب[ولكل س١ < س٢ فى هذه الفترة كان:

① د(س١) < د(س٢) فإن الدالة تكون متزايدة

② د(س١) > د(س٢) فإن الدالة تكون متناقصة

أى أن الدالة تكون متزايدة فى فترة ما اذا كانت قيمتها تتزايد بتزايد س، وتكون متناقصة اذا كانت قيمتها تتناقص بتزايد س فى هذه الفترة

•• النقط الحرجة لها أهمية كبيرة فى بحث سلوك الدالة حيث أنها تفصل بين فترات تزايد وتناقص الدالة كما يوجد عندها أكبر أو أصغر قيمة للدالة فى فترة ما.

تعريف النقط الحرجة:

يكون للدالة د المتصلة على]أ، ب[نقطة حرجة (جـ، د(جـ)) حيث جـ ∈]أ، ب[اذا كان د‵(جـ) = صفر أو د‵(جـ) غير موجودة

تأكيد هام: النقطة الحرجة عند س = أ لابد وأن تنتمى لمجال الدالة د أى أن د(أ) تكون معرفة

•• استخدام المشتقة الأولى لبحث تزايد وتناقص الدالة:

نظرية: ① اذا كان د‵(س) > صفر لكل س ∈]أ، ب[فإن الدالة متزايدة

② اذا كان د‵(س) < صفر لكل س ∈]أ، ب[فإن الدالة متناقصة

ملاحظة: ① الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها فى هذه الفترة موجباً أى اذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

② الدالة تتناقص فى فترة ما اذا كان ميل المماس لمنحناها فى هذه الفترة سالباً أى اذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

•• خطوات بحث التزايد و التناقص باستخدام المشتقة الأولى:

① نحدد مجال الدالة ② نوجد د‵(س)

③ نحدد النقط الحرجة أى النقط التى تكون عندها د‵(س) = صفر أو د‵(س) غير موجودة

④ نحدد الفترات التى ينقسم اليها مجال الدالة بهذه النقط

⑤ نعين إشارة د‵(س) فى كل فترة من هذه الفترات وبذلك يتم تعيين فترات التزايد حيث د‵(س) > صفر وفترات التناقص حيث د‵(س) < صفر

- أمثلة محلولة -

① أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية

① ص = س^{٢} - ٦س + ٧

- الحل -

∵ ص = س^{٢} - ٦س + ٧

∴ ص' = ٢س - ٦ وبوضع ص' = صفر

∴ ٢س - ٦ = صفر ∴ س = ٣

والنقطة الحرجة هي (٣ ، -٢)

س		٣	
د(س)	↘		↗
د'(س)	-----	صفر	+++++

∴ الدالة متناقصة في]-∞ ، ٣[ومتزايدة في]٣ ، ∞[

② ص = ١ - ٤س - س^{٢}

- الحل -

∴ المجال = ح ، ص' = -٤ - ٢س

وبوضع ص' = صفر ∴ -٤ - ٢س = ٠

∴ س = -٢

∴ النقطة الحرجة هي (-٢ ، ٥)

س		-٢	
د(س)	↗		↘
د'(س)	++++	صفر	-----

∴ الدالة متزايدة في]-∞ ، -٢[ومتناقصة في]-٢ ، ∞[

③ د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥

- الحل -

∴ المجال = ح ، د'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س

وبوضع د'(س) = صفر

∴ ٣س^{٢} - ١٢س = صفر

∴ ٣س(س - ٤) = صفر

∴ س = صفر ، س = ٤

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٥) ، (٤ ، -٢٧)

س		صفر		٤	
د(س)	↗		↘		↗
د'(س)	+++	صفر	----	صفر	++++

∴ الدالة متزايدة في كل من]-∞ ، ٠[،]٤ ، ∞[ومتناقصة في]٠ ، ٤[

④ ص = (س - ٢)^{٢}

- الحل -

∴ المجال = ح ، ص' = ٢(س - ٢)

وبوضع ص' = صفر ∴ ٢(س - ٢) = صفر

∴ س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، صفر)

س		٢	
د(س)	↘		↗
د'(س)	-----	صفر	+++++

∴ الدالة متناقصة في]-∞ ، ٢[ومتزايدة في]٢ ، ∞[

⑤ د(س) = (س + ٤)^{٣}

- الحل -

∴ المجال = ح ، ∴ د'(س) = ٣(س + ٤)^{٢}

وبوضع د'(س) = صفر ∴ س = -٤

∴ النقطة الحرجة هي (-٤ ، صفر)

		-٤	
س			
د(س)	↘		↗
د̄(س)	+++++	صفر	+++++

∴ الدالة متزايدة في ح

⑥ $د(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}$

- الحل -

∴ المجال = ح ، $د̄(س) = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢}$

بوضع $د̄(س) =$ صفر ∴ $٤س^{٣} - ١٢س^{٢} =$ صفر

∴ س = صفر ، س = ٣

		صفر		٣	
س					
د(س)	↘		↘		↗
د̄(س)	----	صفر	----	صفر	++++

∴ النقط الحرجة هي (٠، ٠) ، (٣، -٢٧)

∴ الدالة متناقصة في كل من]-∞، ٠[،]٠، ٣[ومتزايدة في]٣، ∞[

⑦ $د(س) = س^{٢}(س - ٢)$

- الحل -

∴ المجال = ح ، $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢}$

∴ $د̄(س) = ٣س^{٢} - ٤س$

وبوضع $د̄(س) =$ صفر

∴ س = صفر ، $س = \frac{٤}{٣}$

∴ النقط الحرجة هي

(٠، ٠) ، $(\frac{٤}{٣} ، \frac{-٣٢}{٢٧})$

		صفر		$\frac{٤}{٣}$	
س					
د(س)	↗		↘		↗
د̄(س)	++++	صفر	----	صفر	+++

∴ الدالة متزايدة في كل من]-∞، ٠[، $]\frac{٤}{٣}، ∞[$ ومتناقصة في $]٠، \frac{٤}{٣}[$

⑧ $د(س) = س^{٤} + ٤س$

- الحل -

∴ المجال = ح ، $د̄(س) = ٤س^{٣} + ٤$

وبوضع $د̄(س) =$ صفر ∴ $٤س^{٣} + ٤ =$ صفر

∴ $س^{٣} = -١$ ∴ س = -١

∴ النقطة الحرجة هي (-١، -٣)

		-٣	
س			
د(س)	↘		↗
د̄(س)	------	صفر	+++++

∴ الدالة متناقصة في]-∞، -١[

ومتزايدة في]-١، ∞[

⑨ $د(س) = س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦$

- الحل -

∴ المجال = ح ، $د̄(س) = ٤س^{٣} - ١٦س$

بوضع $د̄(س) =$ صفر ∴ $٤س^{٣} - ١٦س =$ صفر

∴ $٤س(س^{٢} - ٤) =$ صفر

∴ س = صفر ، س = ٢ ، س = -٢

∴ النقط الحرجة هي (٠، ١٦) ، (٢، ٠)

، (-٢، ٠)

		-٢		صفر		٢	
س							
د(س)	↘		↗		↘		↗
د̄(س)	----	صفر	++++	صفر	----	صفر	++++

∴ الدالة متناقصة في كل من]-∞، -٢[

،]٠، ٢[ومتزايدة في كل من

]-٢، ٠[،]٢، ∞[

(١٠) د(س) = س^٣ (س − ١)^٢

— الحل —

∴ المجال = ح

∴ د̀(س) = ٣س^٢ (س − ١)^٢ + ٢س^٣ (س − ١)

= س^٢ (س − ١) (٣س − ٣ + ٢س)

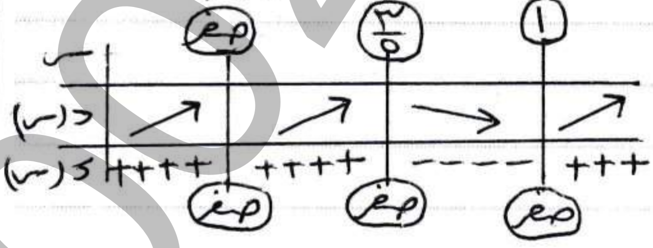
= س^٢ (س − ١) (٥س − ٣)

وبوضع د̀(س) = صفر

∴ س = صفر ، س = ١ ، س = ٣/٥

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٠) ،

(١ ، ٠) ، (٣/٥ ، ١٠٨/٣١٢٥)



∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ٣/٥[

،]١ ، ∞[ومتناقصة في]٣/٥ ، ١[

(١١) د(س) = (س + ١)/(س − ١)

— الحل —

∴ المجال = ح − {١}

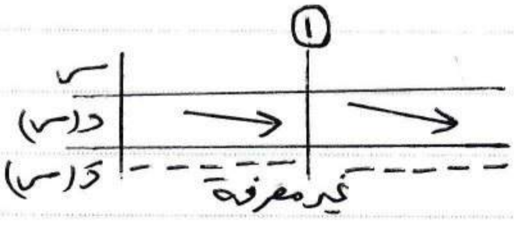
∴ د̀(س) = (١(س − ١) − ١(س + ١))/(س − ١)^٢

∴ د̀(س) = −٢/(س − ١)^٢ وبوضع د̀(س) = ٠

∴ د̀(س) غير معرفة

∴ عند س = ١ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة



∴ الدالة متناقصة في كل من

]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

(١٢) د(س) = س^٢/(س − ٢)

— الحل —

∴ المجال = ح − {٢}

∴ د̀(س) = (٢س(س − ٢) − ١ × س^٢)/(س − ٢)^٢

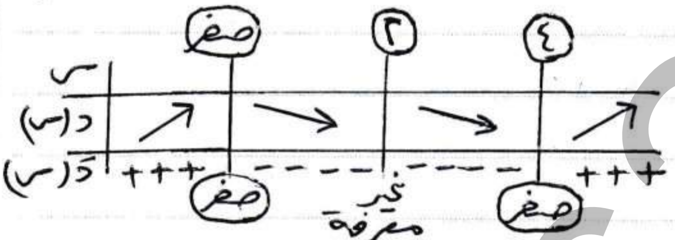
∴ د̀(س) = (س^٢ − ٤س)/(س − ٢)^٢

وبوضع د̀(س) = صفر

∴ س = صفر ، س = ٤

، د̀(س) غير معرفة عند س = ٢ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٨)



∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ٠[

،]٤ ، ∞[ومتناقصة في كل من

]٠ ، ٢[،]٢ ، ٤[

(١٣) د(س) = √(٢س − ٣)

— الحل —

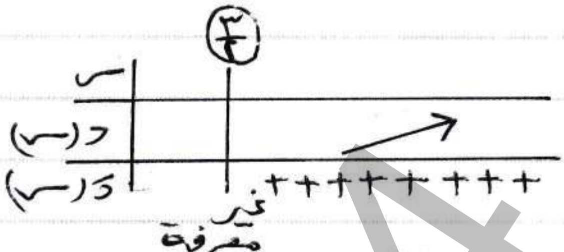
∴ المجال = [٣/٢ ، ∞[

∴ د̀(س) = ٢/(٢√(٢س − ٣)) = ١/√(٢س − ٣)

، بوضع د̀(س) = صفر

∴ د̀(س) غير معرفة عند س = ٣/٢

∴ النقطة الحرجة هي (٣/٢ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة في $]\frac{3}{2} ، \infty[$

---

(١٤) $د(س) = \sqrt[3]{س - 1}$

- الحل -

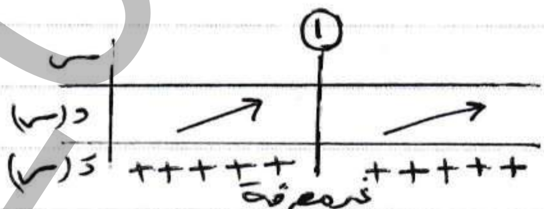
∴ المجال = ح

∴ $د'(س) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(س-1)^2}}$

وبوضع $د'(س) = $ صفر

∴ د'(س) غير معرفة عند س = ١

∴ النقطة الحرجة (١ ، صفر)



∴ الدالة متزايدة في ح

---

(١٥) $د(س) = س^{\frac{2}{3}}$

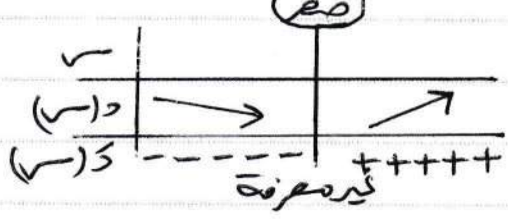
- الحل -

∴ المجال = ح ، $د'(س) = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

وبوضع $د'(س) = $ صفر

∴ د'(س) غير معرفة عند س = صفر

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٠)



∴ الدالة متناقصة في $]-\infty ،$ صفر$[$

ومتزايدة في $]$صفر $، \infty[$

---

(١٦) $د(س) = \sqrt[3]{(س^2 - 1)^2}$

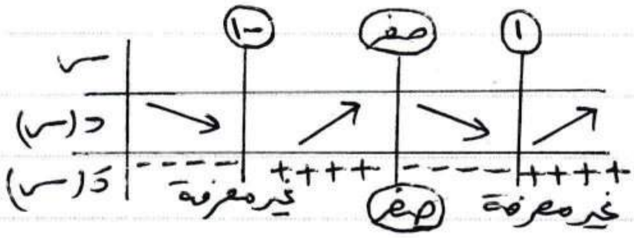
- الحل -

∴ المجال = ح ، $د'(س) = \frac{4س}{3\sqrt[3]{س^2 - 1}}$

وبوضع $د'(س) = $ صفر ∴ س = صفر

، د'(س) غير معرفة عند س = ١ ، −١

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠)



∴ الدالة متزايدة في كل من $]-1 ، 0[$ ، $]1 ، \infty[$ ومتناقصة في كل من $]-\infty ، -1[$ ، $]$صفر $، 1[$

---

(١٧) $د(س) = 1 - \frac{1}{س}$

- الحل -

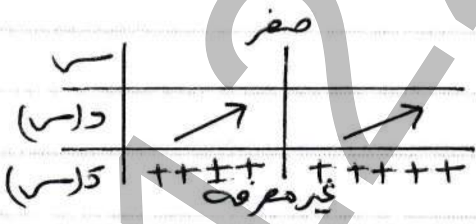
∴ المجال = ح − {٠} ، $د(س) = 1 - س^{-1}$

∴ $د'(س) = س^{-2} = \frac{1}{س^2}$ وبوضع $د'(س) = 0$

∴ د'(س) غير معرفة عند $س^2 = $ صفر

∴ س = صفر ∉ المجال

∴ لا توجد نقطة حرجة



∴ الدالة متزايدة في كل من $]-\infty ، 0[$ ، $]0 ، \infty[$

(١٨) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}+٢}$

– الحل –

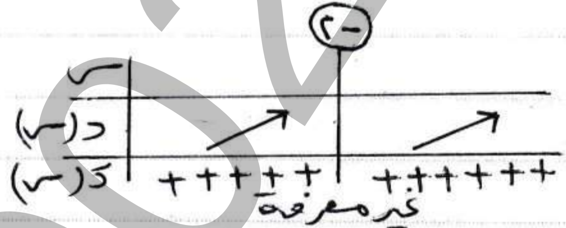
∴ المجال = ح − {−٢}

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٢)\times ١ - ١\times \text{س}}{(\text{س}+٢)^٢}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{٢}{(\text{س}+٢)^٢} \quad \text{وبوضع } \text{د}'(\text{س}) = ٠$$

∴ د'(س) غير معرفة عند س = −٢

∉ المجال　∴ لا توجد نقطة حرجة



∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞، −٢[،]−٢، ∞[

(١٩) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٩ - \text{س}^٢}$

– الحل –

∴ المجال = [−٣، ٣]

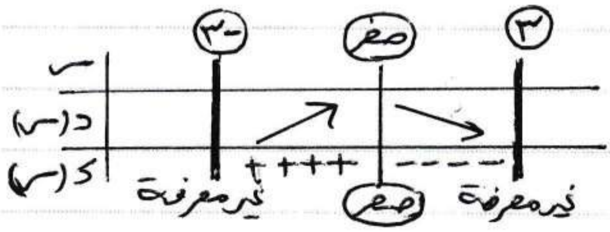
$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٩-\text{س}^٢}} = \frac{-\text{س}}{\sqrt{٩-\text{س}^٢}}$$

وبوضع د'(س) = صفر　∴ س = صفر

، د'(س) غير معرفة عند س = ±٣

∴ النقط الحرجة هي

(٠، ٣) ، (٣، ٠) ، (−٣، ٠)



∴ الدالة متزايدة في]−٣، صفر[

ومتناقصة في]صفر، ٣[

(٢٠) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}$

– الحل –

∴ المجال = ح −]١، ٣[

$$، \text{د}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - ٤}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}}$$

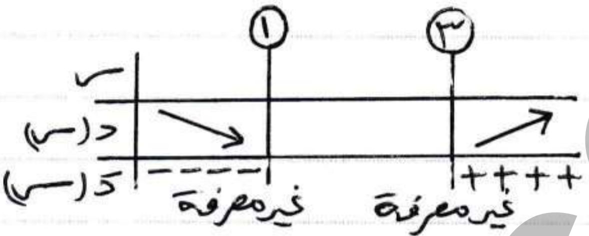
وبوضع د'(س) = صفر

∴ س = ٢ ∉ المجال

، ∵ د'(س) غير معرفة عند س² − ٤س + ٣ = ٠

∴ س = ٣ ، س = ١

∴ النقط الحرجة هي (٣، ٠) ، (١، ٠)



∴ الدالة متناقصة في]−∞، ١[

ومتزايدة في]٣، ∞[

(٢١) د(س) = |س − ٣| + ٢

– الحل –

∴ المجال = ح

$$، \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٣ + ٢ & \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٣ + ٢ & \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٥ & \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ١ & \text{س} > ٣ \\ -١ & \text{س} < ٣ \end{cases}$$

، ∵ د'(٣⁺) ≠ د'(٣⁻)

$\therefore \; \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 1 & \text{س} > 3 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = 3 \\ -1 & \text{س} < 3 \end{cases}$

$\therefore$ د'(س) غير موجودة عند س = ٣

$\therefore$ النقطة الحرجة هي (٣ ، ٢)

س		٣	
د(س)	↘		↗
د'(س)	- - - - - -	غير موجودة	+ + + + + +

$\therefore$ الدالة متناقصة في]-∞، ٣[ومتزايدة في]٣، ∞[

(٢٢) $\text{د}(\text{س}) = 3 - |\text{س} - 2|$

- الحل -

$\therefore$ المجال = ح

$،\; \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3 - \text{س} + 2 & \text{س} \geq 2 \\ 3 + \text{س} - 2 & \text{س} < 2 \end{cases}$

$\therefore \; \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} + 5 & \text{س} \geq 2 \\ \text{س} + 1 & \text{س} < 2 \end{cases}$

$\therefore \; \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} -1 & \text{س} > 2 \\ 1 & \text{س} < 2 \end{cases}$

$،\; \text{د}'(2^+) \neq \text{د}'(2^-)$

$\therefore \; \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} -1 & \text{س} > 2 \\ \text{غير معرفة} & \text{س} = 2 \\ 1 & \text{س} < 2 \end{cases}$

$\therefore$ د'(س) غير موجودة عند س = ٢

$\therefore$ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٣)

س		٢	
د(س)	↗		↘
د'(س)	+ + + + +	غير موجودة	- - - - - -

$\therefore$ الدالة تزايدية في]-∞، ٢[وتناقصية في]٢، ∞[

(٢٣) $\text{د}(\text{س}) = 2 - \sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9}$

- الحل -

$\therefore$ المجال = ح ، $\text{د}(\text{س}) = 2 - |\text{س} - 3|$

$\therefore \; \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2 - \text{س} + 3 & \text{س} \geq 3 \\ 2 + \text{س} - 3 & \text{س} < 3 \end{cases}$

$\therefore \; \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} + 5 & \text{س} \geq 3 \\ \text{س} - 1 & \text{س} < 3 \end{cases}$

$\therefore \; \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} -1 & \text{س} > 3 \\ 1 & \text{س} < 3 \end{cases}$

$\because \; \text{د}'(3^+) \neq \text{د}'(3^-)$

$\therefore \; \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} -1 & \text{س} > 3 \\ \text{غير موجودة} & \text{س} = 3 \\ 1 & \text{س} < 3 \end{cases}$

$\therefore$ د'(س) غير موجودة عند س = ٣

$\therefore$ النقطة الحرجة هي (٣ ، ٢)

س		٣	
د(س)	↗		↘
د'(س)	+ + + + + +	غير موجودة	- - - - - -

$\therefore$ الدالة متزايدة في]-∞، ٣[ومتناقصة في]٣، ∞[

(٢٤) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}|\text{س}|$

- الحل -

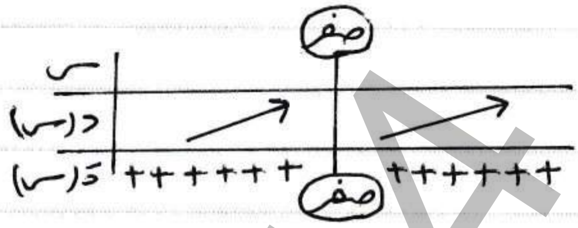
$\therefore$ المجال = ح ، $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{س} \geq 0 \\ -\text{س}^2 & \text{س} < 0 \end{cases}$

$\therefore \; \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} & \text{س} > 0 \\ -2\text{س} & \text{س} < 0 \end{cases}$

$،\; \because \; \text{د}'(0^+) = \text{د}'(0^-) = $ صفر فإن

$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} & \text{س} > \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{س} = \text{صفر} \\ -2\text{س} & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$

∴ النقطة الحرجة هي (صفر، صفر)



∴ الدالة متزايدة في ح

(٢٥) د(س) = س |س − ٢|

- الحل -

∴ المجال = ح

، د(س) = { س² − ٢س ، س > ٢ ؛ صفر ، س = ٢ ؛ −س² + ٢س ، س < ٢ }

∴ د′(س) = { ٢س − ٢ ، س > ٢ ؛ −٢س + ٢ ، س < ٢ }

، ∵ د′(٢⁺) ≠ د′(٢⁻)

∴ د′(س) = { ٢س − ٢ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ −٢س + ٢ ، س < ٢ }

وبوضع د′(س) = صفر عند س > ٢

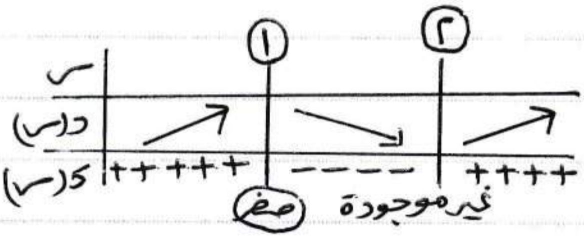
∴ س = ١ مرفوض

وبوضع د′(س) = صفر عند س < ٢

∴ س = ١

، ∵ د′(س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (١، ١) ، (٢، ٠)



∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ١[،]٢ ، ∞[، متناقصة في]١ ، ٢[

(٢) أوجد النقط الحرجة وعين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية في المجال المعطى أمام كل منها

(١) د(س) = ١ − جاس ، ٠ < س < ٢ط

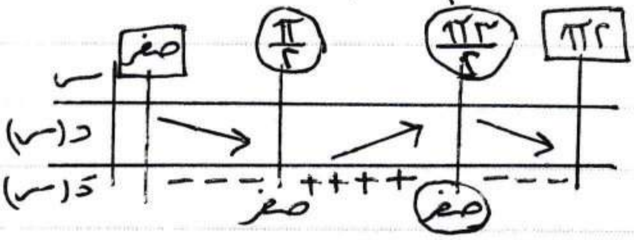
- الحل -

∴ المجال =]صفر ، ٢ط[

∴ د′(س) = − جتاس ، بوضع د′(س) = ٠

∴ جتاس = صفر ∴ س = ط/٢ ، ٣ط/٢

∴ النقط الحرجة هي (ط/٢ ، ٠) ، (٣ط/٢ ، ٢)



∴ الدالة متناقصة في كل من]صفر ، ط/٢[،]٣ط/٢ ، ٢ط[

ومتزايدة في كل من]ط/٢ ، ٣ط/٢[

(٢) د(س) = س + ٢جاس ، ٠ < س < ٢ط

- الحل -

∴ المجال =]صفر ، ٢ط[

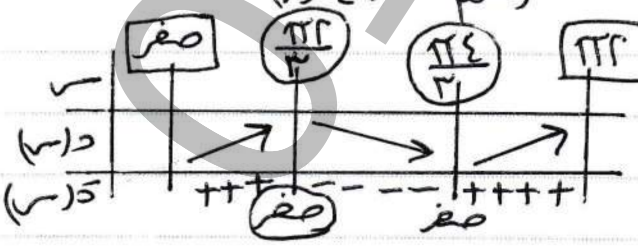
∴ د′(س) = ١ + ٢جتاس

وبوضع د′(س) = صفر

∴ ١ + ٢جتاس = صفر ∴ جتاس = −١/٢

∴ س = ٢ط/٣ ، ٤ط/٣

∴ النقط الحرجة هي (٢ط/٣ ، ٣٫٨٣) ، (٤ط/٣ ، ٢٫٤٦)



∴ الدالة متزايدة في كل من]٠ ، ٢ط/٣[،]٤ط/٣ ، ٢ط[

ومتناقصة في]٢ط/٣ ، ٤ط/٣[

③ د(س) = جا ٢س في]صفر، π[

- الحل -

المجال =]صفر، π[

∵ د'(س) = ٢ جتا ٢س

وبوضع د'(س) = صفر

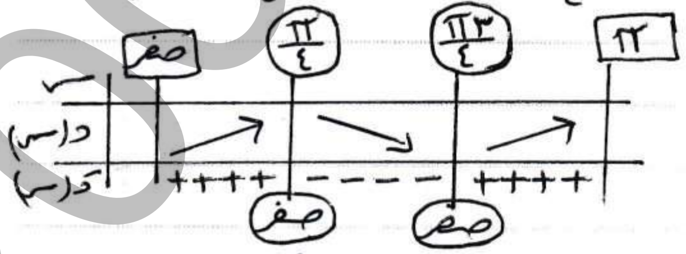
∴ جتا ٢س = صفر ومنها

٢س = $\frac{\pi}{2}$ ∴ س = $\frac{\pi}{4}$

أو ٢س = $\frac{3\pi}{2}$ ∴ س = $\frac{3\pi}{4}$

∴ النقط الحرجة هي

($\frac{\pi}{4}$ ، ١) ، ($\frac{3\pi}{4}$ ، -١)



∴ الدالة متزايدة في كل من

]صفر، $\frac{\pi}{4}$[،]$\frac{3\pi}{4}$ ، π[

ومتناقصة في]$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[

⑦ اثبت أن د حيث

د(س) = ظا س - س متزايدة على

الفترة]صفر، $\frac{\pi}{4}$[

- الحل -

∵ د(س) = ظا س - س

∴ د'(س) = قا²س - ١ = ظا²س

∵ لكل س ∈]٠، $\frac{\pi}{4}$[فإن ظا س > ٠

∴ لكل س ∈]٠، $\frac{\pi}{4}$[فإن د'(س) > ٠

∴ د(س) متزايدة على الفترة]٠، $\frac{\pi}{4}$[

④ إذا كانت د، ر دالتين قابلتين للاشتقاق، د'(س) < ر'(س) لكل س ∈ ح، فأثبت أن الدالة هـ حيث هـ(س) = د(س) - ر(س) متناقصة لكل س ∈ ح

- الحل -

∵ هـ(س) = د(س) - ر(س) لكل س ∈ ح

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ هـ'(س) = د'(س) - ر'(س)

∵ د'(س) < ر'(س) لكل س ∈ ح

∴ د'(س) - ر'(س) < صفر

∴ هـ'(س) < صفر لكل س ∈ ح

∴ الدالة هـ متناقصة لكل س ∈ ح

⑤ حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د في كل مما يأتي

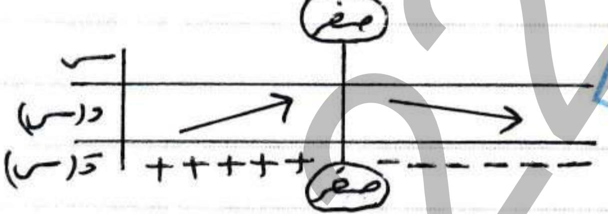
① د(س) = س - هـ^س

- الحل -

∴ د'(س) = ١ - هـ^س وبوضع د'(س) = صفر

∴ ١ - هـ^س = صفر ∴ هـ^س = ١

∴ س = صفر



∴ الدالة متزايدة في]-∞، صفر[

ومتناقصة في]صفر، ∞[

② د(س) = ٥ - ٢ هـ^{٢س}

- الحل -

∴ د'(س) = -٤ هـ^{٢س} وبوضع د'(س) = ٠

∴ -٤ هـ^{٢س} = صفر ليس لها حل

∴ د'(س) < صفر لجميع قيم س

∴ الدالة متناقصة على ح

③ د(س) = س + لوهـ س

- الحل -

المجال =]صفر ، ∞[

∴ دَ(س) = ١ + $\frac{١}{س}$

∴ لكل س > صفر فإن دَ(س) > صفر

∴ د(س) متزايدة على]صفر ، ∞[

④ د(س) = ٢س − لوهـ س

- الحل -

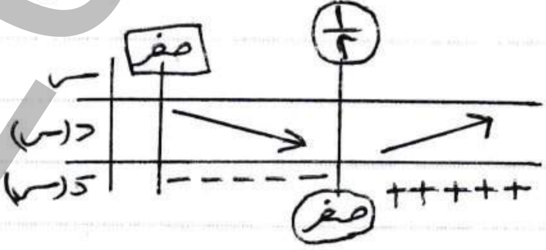
المجال =]صفر ، ∞[

∴ دَ(س) = ٢ − $\frac{١}{س}$

∴ دَ(س) = $\frac{٢س − ١}{س}$

وبوضع دَ(س) = صفر

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ، دَ(س) غير معرفة عند س = صفر ∉ المجال



∴ الدالة متناقصة في]صفر ، $\frac{١}{٢}$[

ومتزايدة في]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

⑤ د(س) = ٢ لوهـ س − س²

- الحل -

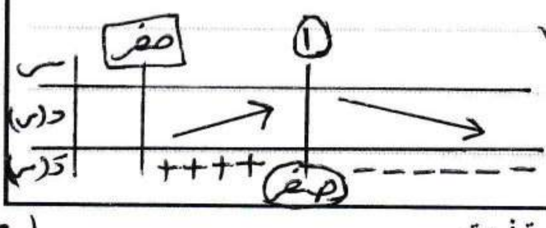
المجال =]صفر ، ∞[

دَ(س) = $\frac{٢}{س}$ − ٢س = $\frac{٢ − ٢س²}{س}$

وبوضع دَ(س) = صفر ∴ ٢ − ٢س² = صفر

∴ س = ١ ، −١ ∉ المجال

، دَ(س) غير معرفة عند س = صفر ∉ المجال



∴ الدالة متزايدة في]صفر ، ١[

ومتناقصة في]١ ، ∞[

⑥ أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد و التناقص لكل من الدوال الآتية

① د(س) = { س² + ٢ ، س ≤ ١ ؛ ٢س + ١ ، س > ١ }

- الحل -

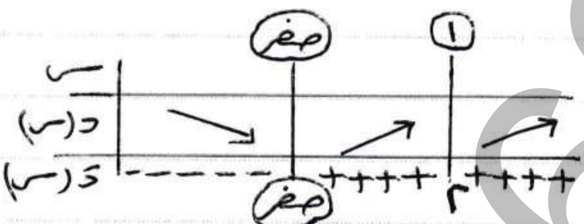
∵ د(١⁺) = د(١⁻) = د(١) ، دَ(١⁻) = دَ(١⁺)

فإن دَ(س) = { ٢س ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

وبوضع دَ(س) = صفر عند س < ١

فإن ٢س = صفر ∴ س = صفر

وعند س > ١ فإن دَ(س) ≠ صفر



∴ النقطة الحرجة هي (صفر ، ٢)

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، صفر[

ومتزايدة في]صفر ، ∞[

② د(س) = { −٣ − ٤س − س² ، س ≤ ١ ؛ ٢س − ٤ ، س > ١ }

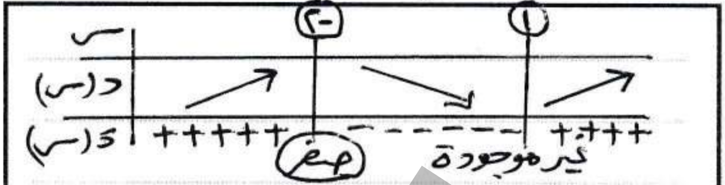
- الحل -

∵ د(١⁺) = د(١⁻) = د(١)

، دَ(١⁻) ≠ دَ(١⁺)

∴ دَ(س) = { −٤ − ٢س ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

وبوضع دَ(س) = صفر ∴ س = −٢



∴ النقطة الحرجة هي (-٢، ٧)، (١، -٢)

∴ الدالة متزايدة في كل من]-∞، -٢[،]١، ∞[ومتناقصة في]-٢، ١[

③ د(س) = { ٣س + ٥ ، س < -١ ؛ س² + ١ ، -١ ≤ س < ٢ ؛ ٩ - س ، س ≥ ٢ }

- الحل -

∵ د(-١⁺) = د(-١⁻) = د(-١)

، د(٢⁺) = د(٢⁻) = د(٢)

، ∵ د'(-١⁺) ≠ د'(-١⁻)

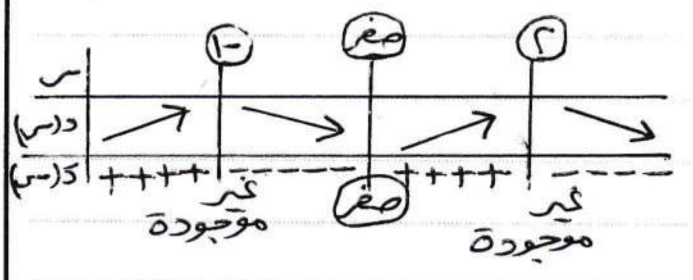
، د'(٢⁺) ≠ د'(٢⁻)

∴ د'(س) = { ٣ ، س < -١ ؛ غير موجودة ، س = -١ ؛ ٢س ، -١ < س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -١ ، س > ٢ }

وبوضع د'(س) = صفر

∴ ٢س = صفر   ∴ س = صفر

∴ النقطة الحرجة هي (صفر، ١)



∴ الدالة متزايدة في]-∞، -١[،]صفر، ٢[، متناقصة في]-١، صفر[،]٢، ∞[

⑦ أوجد قيم أ، ب، ج، د بحيث يحقق المنحنى د(س) = أس³ + بس² + جس + د الشروط التالية معاً

① يمر بنقطة الأصل

② له نقطة حرجة عند س = ١

③ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٢، د(٢)) عليه هي ٩س + ص = ٢٠

- الحل -

∵ د(س) = أس³ + بس² + جس + د

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٠)   ∴ د = صفر

، د'(س) = ٣أس² + ٢ب س + ج

، ∵ عند س = ١ توجد نقطة حرجة

∴ د'(١) = صفر

∴ ٣أ + ٢ب + ج = صفر   ①

، المستقيم ٩س + ص = ٢٠ يمس المنحنى عند النقطة (٢، د(٢))

∴ د'(٢) = -٩

∴ ١٢أ + ٤ب + ج = -٩   ②

، د(٢) = -٩ × ٢ + ٢٠ = ٢

∴ ٨أ + ٤ب + ٢ج = ٢   ÷ ٢

∴ ٤أ + ٢ب + ج = ١   ③

وبحل المعادلات الثلاثة معاً فإن

أ = ١   ب = -٩   ج = ١٥

تمارين عامة

① أوجد النقط الحرجة ثم عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية

① $د(س) = س^{٣} - ١٢س + ٧$

② $د(س) = ٩س - س^{٣}$

③ $د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س - ٤$

④ $د(س) = س(س - ٣)^{٢}$

⑤ $د(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + ٣$

⑥ $د(س) = س^{٤}(س + ٢)^{٢}$

⑦ $د(س) = \frac{س}{س + ١}$

⑧ $د(س) = \sqrt{٤ - س}$

⑨ $د(س) = \sqrt[٣]{٢ - س}$

⑩ $د(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$

⑪ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$

⑫ $د(س) = س^{٢}|س|$

⑬ $د(س) = \begin{cases} ٧ - ٢س & س < ٣ \\ ٣س - ٨ & س \geq ٣ \end{cases}$

② أوجد النقط الحرجة وعين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية في المجال المعطى أمام كل منهما

① $د(س) = س - ٢ حتا س$ في $[صفر، ٢ط]$

② $د(س) = ٤س - ظا س$ في $[صفر، \frac{ط}{٢}]$

③ حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د في كل مما يأتي:

① $د(س) = ٣ - لو_{هـ} س^{٢}$

② $د(س) = س^{٢} - ٢ لو_{هـ} س$

القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

نظرية (١): اذا كانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند ج ∈]أ، ب[فإن د'(ج) = صفر اذا كانت د قابلة للاشتقاق على]أ، ب[أو د'(ج) غير موجودة.

من النظرية السابقة نستنتج أن: عند ايجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية لابد أن نوجد القيم الحرجة للدالة لأن القيم العظمى أو الصغرى المحلية توجد فقط عند النقط الحرجة

نظرية (٢): اختبار المشتقة الأولى

اذا كانت (ج، د(ج)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند ج ووجدت فترة مفتوحة حول ج بحيث:

① د'(س) > صفر عندما س < ج ، د'(س) < صفر عندما س > ج فإن د(ج) قيمة عظمى محلية.

② د'(س) < صفر عندما س < ج ، د'(س) > صفر عندما س > ج فإن د(ج) قيمة صغرى محلية

③ اذا لم يحدث تغيير في اشارة د'(س) على جانبي ج فإنه لا يوجد للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية عند ج

نظرية (٣): اختبار المشتقة الثانية

اذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوي ج حيث د'(ج) = صفر وكانت

① د''(ج) < صفر فإن د(ج) قيمة عظمى محلية

② د''(ج) > صفر فإن د(ج) قيمة صغرى محلية

③ د''(ج) = صفر فإن اختبار المشتقة الثانية لا يستطيع تحديد نوع النقطة (ج، د(ج)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية

.. خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال المتصلة الغير مشتملة على دالة ثابتة.

① نحدد مجال الدالة ② نوجد د'(س)

③ نوجد القيم الحرجة أي النقط التي تكون عندها د'(س) = صفر أو غير موجودة ولكن احداثيها السيني $س_١$

④ اختبار نوع النقط الحرجة من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية بإحدى الطريقتين:

(أ) باستخدام اشارة د'(س) حول النقطة الحرجة كما يلي:

قيمة عظمى محلية اذا كان

+ + + + + ٠ ($س_١$) - - - - -

قيمة صغرى محلية اذا كان

- - - - - ٠ ($س_١$) + + + +

(ب) باستخدام اشارة د''(س) كما يلي:

• اذا كان د'($س_١$) = صفر ، د''($س_١$) < صفر فإن عند $س_١$ قيمة عظمى محلية

• اذا كان د'($س_١$) = صفر ، د''($س_١$) > صفر فإن عند $س_١$ قيمة صغرى محلية

- أمثلة محلولة -

① عين القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية:

① ص = س^{٢} + ٤س + ٦

- الحل -

ص' = ٢س + ٤ وبوضع ص' = صفر

∴ س = -٢ ، ص'' = ٢ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = -٢ ، د(-٢) = ٢

② د(س) = ٤ - ٦س - س^{٢}

- الحل -

د'(س) = -٦ - ٢س وبوضع ص' = صفر

∴ س = -٣ ، ص'' = -٢ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = -٢

، د(-٢) = ١٢

③ د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٩س + ٢

- الحل -

ص' = س^{٢} - ٩ وبوضع ص' = صفر

∴ س = ٣ ، -٣

∴ ص'' = ٢س

وعند س = ٣ ∴ ص'' = ٦ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية ، د(٣) = -١٦

وعند س = -٣ ∴ ص'' = -٦ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية ، د(-٣) = ٢٠

④ د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س - ٧

- الحل -

د'(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٩

وبوضع ص' = صفر ∴ ٣س^{٢} + ٦س - ٩ = صفر

∴ س = ١ ، س = -٣

∴ د''(س) = ٦س + ٦

∴ د''(١) > صفر موجب

∴ يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ١

، د(١) = -١٢

∴ د''(-٣) < صفر سالب

∴ يوجد قيمة عظمى محلية عند س = -٣

، د(-٣) = ٢٠

⑤ ص = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٢

- الحل -

ص' = ٣س^{٢} - ٦س + ٣ بوضع ص' = صفر

∴ س = ١

١

++++ صفر ++++

∴ عند س = ١ لا توجد قيمة عظمى أو صغرى محلية

⑥ د(س) = (س - ١)^{٤} + ٢

- الحل -

د'(س) = ٤(س - ١)^{٣} وبوضع د'(س) = صفر

∴ ٤(س - ١)^{٣} = صفر ∴ س = ١

١

---- صفر ++++

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١

، د(١) = ٢

⑦ د(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}

- الحل -

د'(س) = ٤س^{٣} - ٤س وبوضع د'(س) = صفر

∴ ٤س(س^{٢} - ١) = صفر

∴ س = صفر ، س = ١ ، س = -١

∴ د''(س) = ١٢س^{٢} - ٤

وعندما س = صفر فإن دً(٠) < صفر

∴ عند س = صفر توجد قيمة عظمى محلية ، د(٠) = صفر

وعندما س = ١ ∴ دً(١) > صفر

∴ عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية ، د(١) = −١

وعندما س = −١ ∴ دً(−١) > صفر

∴ عند س = −١ توجد قيمة صغرى محلية ، د(−١) = −١

(٨) د(س) = ٣ س^{٥} − ٥ س^{٣}

- الحل -

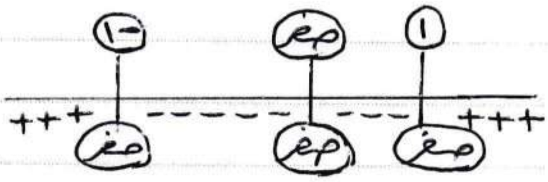
دَ(س) = ١٥ س^{٤} − ١٥ س^{٢}

بوضع دَ(س) = صفر

∴ ١٥ س^{٤} − ١٥ س^{٢} = صفر

∴ ١٥ س^{٢} (س^{٢} − ١) = صفر

∴ س = صفر ، س = ١ ، س = −١



للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −١ ، د(−١) = ٢

وللدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، د(١) = −٢

(٩) د(س) = س^{٤} − ٤ س^{٣} + ٤ س^{٢} − ١٥

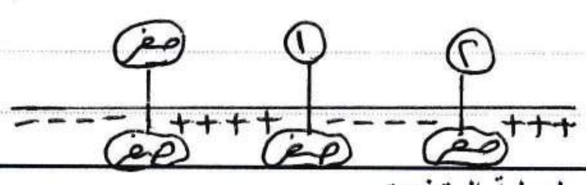
- الحل -

دَ(س) = ٤ س^{٣} − ١٢ س^{٢} + ٨ س

وبوضع دَ(س) = صفر

∴ ٤ س (س^{٢} − ٣ س + ٢) = صفر

∴ س = صفر ، س = ١ ، س = ٢



عند س = صفر توجد قيمة صغرى محلية ، د(صفر) = −١٥

وعند س = ١ توجد قيمة عظمى محلية ، د(١) = −١٤

وعند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية ، د(٢) = −١٥

(٢) أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية (حيث المقام ≠ صفر)

(١) د(س) = س + $\frac{١}{س}$

- الحل -

∴ مجال الدالة = ح − {صفر}

دَ(س) = ١ − س$^{-٢}$ ، دً(س) = ٢ س$^{-٣}$

وبوضع دَ(س) = صفر ∴ ١ − س$^{-٢}$ = صفر

∴ س = ١ ، س = −١

∴ دً(١) = ٢ (موجبا)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١

، دً(−١) = −٢ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = −١

(٢) د(س) = س^{٢} − $\frac{١}{س^{٢}}$

- الحل -

د(س) = س^{٢} − س$^{-٢}$

∴ مجال الدالة = ح − {صفر}

دَ(س) = ٢ س + ٢ س$^{-٣}$ = $\frac{٢ س^{٤} + ٢}{س^{٣}}$

دً(س) = ٢ − ٦ س$^{-٤}$

و دَ(س) غير موجودة عندما س = صفر

ولكن صفر ∉ مجال الدالة

∴ لا يوجد نقط حرجة للدالة

③ $د(س) = س + \frac{٤}{س - ١}$

- الحل -

$د'(س) = ١ + \frac{-٤}{(س-١)^٢} = \frac{(س-١)^٢ - ٤}{(س-١)^٢}$

$د''(س) = ٨ (س - ١)^{-٣}$

وبوضع $د'(س) = $ صفر

∴ $(س - ١)^٢ = ٤$ ∴ $س - ١ = \pm ٢$

ومنها $س = ٣$ ، $س = -١$

∴ $د''(٣) = ١$ (موجب)

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$

∴ $د''(-١) = -١$ (سالب)

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = -١$

④ $د(س) = \frac{٣}{س - ٢}$

- الحل -

$د'(س) = \frac{صفر(س-٢) - ١ \times ٣}{(س-٢)^٢} = \frac{-٣}{(س-٢)^٢}$

لا توجد نقط في المجال تجعل $د'(س) = ٠$ أو غير معرفة ∴ ليس للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية

⑤ $د(س) = \frac{س^٢}{١ - س}$

- الحل -

مجال الدالة = ح - {١}

∴ $د'(س) = \frac{٢س(١-س) - (-١) \times س^٢}{(١-س)^٢}$

∴ $د'(س) = \frac{-س^٢ + ٢س}{(١-س)^٢}$

، $د'(س) = $ صفر عندما $-س^٢ + ٢س = ٠$

∴ $-س(س - ٢) = $ صفر

∴ $س = $ صفر ، $س = ٢$

صفر — ١ — ٢

---- | ++++ | +++ | ----

صفر — غير معرفة — صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = $ صفر

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = ٢$

⑥ $د(س) = \frac{٤س - ٣}{س^٢ - ١}$

- الحل -

مجال الدالة = ح - {١ ، -١}

∴ $د'(س) = \frac{٤(س^٢ - ١) - ٢س(٤س - ٣)}{(س^٢ - ١)^٢}$

∴ $د'(س) = \frac{-٤س^٢ + ٦س - ٤}{(س^٢ - ١)^٢}$

، $د'(س) = $ صفر عندما $-٤س^٢ + ٦س - ٤ = $ صفر

∴ $٢س^٢ - ٣س + ٢ = $ صفر ليس لها جذور حقيقية ∴ الدالة ليس لها قيمة عظمى أو صغرى محلية

⑦ $د(س) = ٣ - س^{\frac{٢}{٣}}$

- الحل -

$د'(س) = -\frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{-٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = $ صفر

صفر

++++ | ----

غير معرفة

∴ للدالة قيمة عظمى محلية $د(٠) = ٣$

⑧ $د(س) = (س+٢)^{\frac{٢}{٣}}$

- الحل -

$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س+٢)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س+٢}}$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = -٢$

-٢
- - - - - غير معرفة + + + + +

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = -٢$

⑨ $د(س) = \sqrt[٣]{(س-٢)^٢}$

- الحل -

$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س-٢)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س-٢}}$

∴ $د'(س)$ غير موجودة عند $س = ٢$

٢
- - - - غير معرفة + + + + +

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

⑩ $د(س) = \sqrt[٣]{٢٧ - ٨س^٣}$

- الحل -

$د'(س) = \frac{١}{٣}(٢٧ - ٨س^٣)^{-\frac{٢}{٣}}(-٢٤س^٢)$

∴ $د'(س) = \frac{-٨س^٢}{\sqrt[٣]{(٢٧-٨س^٣)^٢}}$

، $د'(س) = صفر$ عند $س = صفر$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = \frac{٣}{٢}$

صفر $\frac{٣}{٢}$
- - - - - - - - - - - -
صفر   غير معرفة

∴ لا يوجد قيم عظمى أو صغرى محلية

⑪ $د(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$

- الحل -

مجال الدالة = $[-٢ ، ٢]$

∴ $د'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

$د'(س) = صفر$ عند $س = صفر$

، $د'(س)$ غير معرفة عند $س = \pm ٢$

-٢   صفر   ٢
غير معرفة + + + + صفر - - - - - - غير معرفة

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند $س = صفر$

③ اثبت أن للدالة $د(س) = \sqrt[٣]{س^٢}$ قيمة صغرى محلية

- الحل -

∵ $د(س) = \sqrt[٣]{س^٢} = س^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $د'(س) = \frac{٢}{٣}س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

∴ $د'(س)$ غير معرفة عند $س = صفر$

صفر
- - - - - - غير معرفة + + + + + +

∴ للدالة قيمة صغرى محلية

$د(صفر) = صفر$

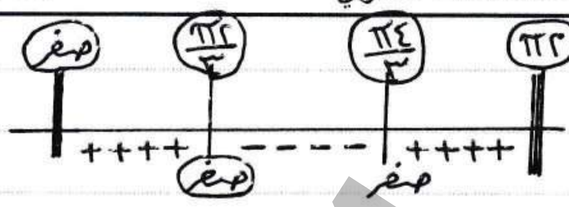
④ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية

① $د(س) = س + ٢جا س$ $س \in]٠ ، ٢\pi[$

- الحل -

$د'(س) = ١ + ٢جتا س$ وبوضع $د'(س) = صفر$

∴ $جتا س = -\frac{١}{٢}$ ∴ $س = \frac{٢\pi}{٣} ، \frac{٤\pi}{٣}$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{4\pi}{3}$

، د($\frac{4\pi}{3}$) = $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{2\pi}{3}$

، د($\frac{2\pi}{3}$) = $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$

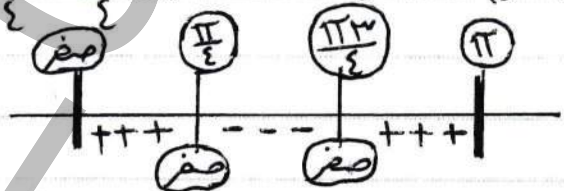
(٢) د(س) = جاس جتاس + ٥ حيث س ∈]صفر، π[

- الحل -

∴ د(س) = $\frac{1}{2}$ جا٢س + ٥

∴ د'(س) = جتا٢س

، د'(س) = صفر عندما س = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$



∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{3\pi}{4}$

، د($\frac{3\pi}{4}$) = ٤,٥

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{4}$

، د($\frac{\pi}{4}$) = ٥,٥

(٣) ص = جاس (١ + جتاس) حيث س ∈]صفر، $\frac{\pi}{2}$[

- الحل -

∴ ص = جاس + جاس جتاس

∴ ص = جاس + $\frac{1}{2}$ جا٢س

∴ ص' = جتاس + جتا٢س

، ص'' = −جاس − ٢جا٢س

وبوضع ص' = صفر ∴ جتاس + جتا٢س = ٠

∴ ٢جتا^{2}س + جتاس − ١ = صفر

∴ (٢جتاس − ١)(جتاس + ١) = صفر

∴ جتاس = $\frac{1}{2}$ ومنها س = $\frac{\pi}{3}$

، جتاس = −١ مرفوض

∴ ص''($\frac{\pi}{3}$) = −جا $\frac{\pi}{3}$ − ٢جا $\frac{2\pi}{3}$

∴ ص''($\frac{\pi}{3}$) = $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ < صفر

∴ عند س = $\frac{\pi}{3}$ توجد قيمة عظمى محلية

∴ د($\frac{\pi}{3}$) = جا $\frac{\pi}{3}$ + $\frac{1}{2}$ جا $\frac{2\pi}{3}$ = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

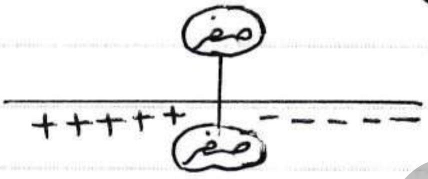
∴ القيمة العظمى المحلية = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

(٤) د(س) = ٤ هـ$^{-س^2}$

- الحل -

د'(س) = −٢س × ٤ هـ$^{-س^2}$ = −٨س هـ$^{-س^2}$

وبوضع د'(س) = صفر ∴ س = صفر



∴ للدالة قيمة عظمى محلية د(٠) = ٤

(٥) د(س) = هـ^س (٣ − س)

- الحل -

د'(س) = هـ^س (٣ − س) + (−١) هـ^س

= ٣هـ^س − س هـ^س − هـ^س

= ٢هـ^س − س هـ^س = هـ^س (٢ − س)

وبوضع د'(س) = صفر ∴ س = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى محلية د(٢) = هـ^2

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}$

-الحل-

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}$

وبوضع $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$

∴ $\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{صفر} \quad \times \text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\text{هـ}^{2\text{س}} - 1 = \text{صفر}$ ∴ $\text{هـ}^{2\text{س}} = 1$

∴ $\text{س} = \text{صفر}$

صفر

\- - - - + + + +

صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية $\text{د}(0) = 2$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > \text{صفر}$

-الحل-

$\text{د}'(\text{س}) = 1 - \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}}$

، $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$ عند $\text{س} = 1$

صفر ١

\- - - - - - + + + + + +

صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية $\text{د}(1) = 1$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - 1)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > \text{صفر}$

-الحل-

$\text{د}'(\text{س}) = 1 \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \frac{1}{\text{س}} \times (\text{س} - 1)$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + 1 - \frac{1}{\text{س}}$

وبوضع $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$

∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + 1 - \frac{1}{\text{س}} = \text{صفر}$

∴ $\text{س} = 1$

صفر ١

\- - - - - + + + + +

صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية $\text{د}(1) = \text{صفر}$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} + 3| - 1$

-الحل-

∴ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + 3 - 1 & \text{س} \geq -3 \\ -\text{س} - 3 - 1 & \text{س} < -3 \end{cases}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + 2 & \text{س} \geq -3 \\ -\text{س} - 4 & \text{س} < -3 \end{cases}$

∴ $\text{د}'(-3^{+}) = 1$ ، $\text{د}'(-3^{-}) = -1$

∴ $\text{د}'(-3)$ ليس لها وجود

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 1 & \text{س} > -3 \\ -1 & \text{س} < -3 \end{cases}$

-٣

\- - - - - + + + + +

صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند $\text{س} = -3$

، $\text{د}(-3) = -1$

⑩ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\,|\text{س} - 4|$

-الحل-

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - 4\text{س} & \text{س} \geq 4 \\ -\text{س}^2 + 4\text{س} & \text{س} < 4 \end{cases}$

∴ $\text{د}'(4^{+}) = 4$ ، $\text{د}'(4^{-}) = -4$

∴ $\text{د}'(4)$ ليس لها وجود

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} - 4 & \text{س} > 4 \\ -2\text{س} + 4 & \text{س} < 4 \end{cases}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$ عندما $\text{س} = 2$ مرفوض

وذلك عندما $\text{س} > 4$

، س = ٢ عندما س < ٤

٢ ٤

+++ ----- +++

صفر صفر

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

، د(٢) = ٤

، للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٤

، د(٤) = صفر

(١١) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٢} |س|

- الحل -

د(س) = { $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ، س ≥ صفر
　　　　 -$\frac{١}{٣}$ س^{٣} ، س < صفر

∵ د'(٠$^{+}$) = صفر ، د'(٠$^{-}$) = صفر

∴ د'(صفر) = صفر

∴ د'(س) = { س^{٢} ، س ≥ صفر
　　　　　 -س^{٢} ، س < صفر

، د'(س) = صفر عند س = صفر

صفر

----- +++++

صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند
س = صفر

(١٢) د(س) = | س^{٢} - ٨س + ١٥ |

- الحل -

د(س) = { (س-٣)(س-٥) ، س ≥ ٥
　　　　 -(س-٣)(س-٥) ، ٣ ≤ س < ٥
　　　　 (س-٣)(س-٥) ، س < ٣

، ∵ د'(٥$^{+}$) = ٢ ، د'(٥$^{-}$) = -٢

∴ د'(٥) غير موجودة

، د'(٣$^{+}$) = ٢ ، د'(٣$^{-}$) = -٢

∴ د'(٣) غير موجودة

∴ د'(س) = { ٢س - ٨ ، س > ٥
　　　　　 -٢س + ٨ ، ٣ < س < ٥
　　　　　 ٢س - ٨ ، س < ٣

، د'(س) = صفر عند س = ٤

٣ ٤ ٥

----- +++++ ---- +++

غير موجودة صفر غير موجودة

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د(٤) = ١

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٥

، د(٥) = صفر

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د(٣) = صفر

(١٣) د(س) = { ٣س^{٢} + ٤ ، س ≥ ١
　　　　　 ٦س + ١ ، س < ١

- الحل -

د'(١$^{+}$) = ٦ ، د'(١$^{-}$) = ٦ ∴ د'(١) = ٦

∴ د'(س) = { ٦س ، س ≥ ١
　　　　　 ٦ ، س < ١

، د'(س) = صفر عندما س = صفر مرفوض

∴ لا يوجد للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية

(١٤) د(س) = { ٣ - ٤س - س^{٢} ، س ≥ ١
　　　　　 ٢س - ٤ ، س < ١

- الحل -

د'(١$^{+}$) = ٢ ، د'(١$^{-}$) = -٦

∴ د'(١) غير موجودة

∴ د'(س) = { -٤-٢س   س < ١ ؛ ٢   س > ١

، د'(س) = صفر عندما س = -٢

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١

، د(١) = -٢

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = -٢

، د(-٢) = ٧

⑤ إذا كان منحنى الدالة

ص = أ س³ + ب س² + جـ س + د

يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٦) وله نقطة حرجة عند (٢ ، ٢)

فأوجد أ ، ب ، جـ ، د وبين نوع النقطة الحرجة

- الحل -

∴ ص' = ٣أ س² + ٢ب س + جـ

∴ ص'' = ٦أ س + ٢ب

∵ (٣ ، ٠) ∈ للدالة

∴ صفر = ٢٧أ + ٩ب + ٣جـ + د ①

، ∵ (٠ ، ٦) ∈ للدالة ∴ د = ٦

، ∵ (٢ ، ٢) ∈ للدالة

∴ ٢ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ٦ ②

، ∵ (٢ ، ٢) نقطة حرجة

∴ د'(٢) = صفر

∴ صفر = ١٢أ + ٤ب + جـ ③

من ① ، ② ، ③

∴ أ = -١ ، ب = ٥ ، جـ = -٨

∴ د''(٢) = -٢ ∴ نقطة عظمى محلية

⑥ أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د إذا علم أن المنحنى الذي معادلته هي

ص = أ س³ + ب س² + جـ س + د يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة عند س = ٣ وقيمة عظمى محلية = د(٢) والمماس له عند س = ١ معادلته هي ١٢س - ٣ص + ١١ = صفر

- الحل -

∴ ص' = ٣أ س² + ٢ب س + جـ

∴ ص'' = ٦أ س + ٢ب

∵ (٠ ، ٠) ∈ للدالة ∴ د = صفر

وعند س = ٣ نقطة حرجة

∴ د'(٣) = صفر

∴ ٢٧أ + ٦ب + جـ = صفر ①

∵ ميل المماس = ٤ عند س = ١

∴ ٣أ + ٢ب + جـ = ٤ ②

∵ الدالة لها قيمة عظمى محلية عند س = ٢

∴ ١٢أ + ٤ب + جـ = صفر ③

من ① ، ② ، ③

∴ أ = $\frac{٢}{٣}$ ب = -٥   جـ = ١٢

- تمارين عامة -

① عين القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية:

① ص = ٤س − $س^{٣}$

② د(س) = $س^{٣}$ − ٩$س^{٢}$ + ١٥

③ د(س) = ٢$س^{٣}$ + ٣$س^{٢}$ − ١٢س + ٥

④ د(س) = (س − ١)$(س − ٢)^{٢}$

② أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية

① د(س) = $\frac{س^{٢} − ٣}{س − ٢}$

② د(س) = $\frac{س^{٢} − ١}{س^{٢} + ١}$

③ د(س) = $س^{٢}$ − $\frac{١٦}{س}$

④ د(س) = $\frac{١ + س}{١ − س}$

⑤ د(س) = $\sqrt[٣]{س − ٢}$

⑥ د(س) = $(س − ١)^{\frac{٤}{٣}}$

⑦ د(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} − ٤}$

③ هل للدالة د حيث د(س) = $س^{٣}$ + ٣س − ٤ قيم عظمى وصغرى محلية؟ فسر اجابتك

④ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية:

① د(س) = ٢س − ظا س ، س ∈]٠ ، $\frac{ط}{٢}$[

② د(س) = جا س + جتا س ، س ∈]٠ ، ٢ط[

③ د(س) = ٨ $لو_{هـ}$ س − $س^{٢}$ ، س > صفر

④ د(س) = ٥ − |س − ٣|

⑤ د(س) = |٢س − ١٠| + ٤

⑥ د(س) = $\begin{cases} س + ٤ & س \le صفر \\ س^{٢} − ٥س + ٤ & س > صفر \end{cases}$

⑤ اذا كانت النقطتان (−٣ ، ٣) ، (−١ ، −١) نقطتين حرجتين للدالة د حيث د(س) = أ$س^{٣}$ + ب$س^{٢}$ + جـ س + ء فأوجد أ ، ب ، جـ ، ء وبين نوع كل من النقطتين الحرجتين

(١ ، ٦ ، ٩ ، ٣ ، عظمى محلية ، صغرى محلية)

⑥ اذا كانت $د_{١}$(س) = $س^{٢}$ − ٤س + ٣ ، $د_{٢}$(س) = −٨س − ٢$س^{٢}$ − ٩ اثبت أن منحنى الدالتين متماسان وأوجد نقطة التماس ثم اثبت أنها نقطة عظمى محلية للدالة $د_{٢}$ وفي نفس الوقت نقطة صغرى محلية للدالة $د_{١}$

القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة

((القيم العظمى والصغرى المطلقة))

تعريف:

اذا كانت د دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ، ب] وكانت جـ ∈ [أ، ب] فإن

① د(جـ) هي قيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ، ب] عندما يكون د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∈ [أ، ب]

② د(جـ) هي قيمة عظمى مطلقة على الفترة [أ، ب] عندما يكون د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∈ [أ، ب]

نظرية: اذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ، ب]

•• خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المطلقة في الفترة المغلقة [أ، ب]

• اذا كانت د متصلة على الفترة [أ، ب]

① نعين النقط الحرجة التي عندها د'(س) = صفر أو غير موجودة والتي ∈]أ، ب[

② نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة وقيمتي النقط الحدية د(أ)، د(ب)

③ نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون أكبر هذه القيم هي القيمة العظمى المطلقة في [أ، ب]، أصغر هذه القيم هي القيمة الصغرى المطلقة في [أ، ب]

- أمثلة محلولة -

① أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية في الفترة المذكورة أمام كل منها:

① د(س) = س² - ٦س + ١٣ ، [-١، ٥]

- الحل -

∵ د'(س) = ٢س - ٦ وبوضع د'(س) = ٠

∴ س = ٣ ∈ [-١، ٥]

∴ د(-١) = ٢٠ ، د(٣) = ٤

، د(٥) = ٨

∴ القيمة العظمى المطلقة هي ٢٠ وتبلغها الدالة عند س = -١

∴ القيمة الصغرى المطلقة هي ٤ وتبلغها الدالة عند س = ٣

② ص = س³ - ٩ ، [صفر، ٢]

- الحل -

∵ ص' = ٣س² وبوضع ص' = صفر

∴ س = صفر ∈ [صفر، ٢]

∴ د(صفر) = -٩ ، د(٢) = -١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = -١ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٩ وتبلغها عند س = صفر

③ د(س) = س(س² - ١٢) ، [-١، ٤]

- الحل -

∵ د(س) = س(س² - ١٢) = س³ - ١٢س

∴ د'(س) = ٣س² - ١٢ وبوضع د'(س) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [-١، ٤]

، س = -٢ ∉ [-١، ٤]

∵ د(-١) = ١١ ، د(٢) = -١٦ ، د(٤) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦ عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٦ عند س = ٢

④ $د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س - ١$ $[صفر ، ٥]$

ـ الحل ـ

$د'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$

وبوضع $د'(س) = صفر$

$\therefore س = ٤ \in [٠ ، ٥]$ ، $س = ٢ \in [٠ ، ٥]$

$\because د(٠) = -١$ ، $د(٢) = ١٩$

، $د(٤) = ١٥$ ، $د(٥) = ١٩$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= ١٩$

وتبلغها عند $س = ٢$ ، $س = ٥$

ولها قيمة صغرى مطلقة $= -١$

وتبلغها عند $س = صفر$

⑤ $د(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥س - ٥$ $[-\sqrt{٥} ، صفر]$

ـ الحل ـ

$د'(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ٥$

وبوضع $د'(س) = صفر$

$\therefore س = \frac{-٥}{٣} \in [-\sqrt{٥} ، صفر]$

، $س = ١ \notin [-\sqrt{٥} ، صفر]$

$\because د(-\sqrt{٥}) = صفر$ ، $د(\frac{-٥}{٣}) = \frac{٤٠}{٢٧}$

، $د(٠) = -٥$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= \frac{٤٠}{٢٧}$ وتبلغها عند $س = \frac{-٥}{٣}$ ، ولها قيمة صغرى مطلقة $= -٥$ وتبلغها عند $س = صفر$

⑥ $د(س) = (س-١)(س-٢)^{٢}$ $[٠ ، ٥]$

ـ الحل ـ

$\therefore د'(س) = ١(س-٢)^{٢} + ٢(س-٢)(س-١)$

$= س^{٢} - ٤س + ٤ + ٢(س^{٢} - ٣س + ٢)$

$= س^{٢} - ٤س + ٤ + ٢س^{٢} - ٦س + ٤$

$= ٣س^{٢} - ١٠س + ٨$

وبوضع $د'(س) = صفر$

$\therefore س = ٢ \in [٠ ، ٥]$ ، $س = \frac{٤}{٣} \in [٠ ، ٥]$

$\because د(٠) = -٤$ ، $د(\frac{٤}{٣}) = \frac{٤}{٢٧}$

، $د(٢) = صفر$ ، $د(٥) = ٣٦$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= ٣٦$

وتبلغها عند $س = ٥$

ولها قيمة صغرى مطلقة $= -٤$ وتبلغها

عند $س = صفر$

⑦ $د(س) = ٢س^{٤} - س^{٢} + ١$ $[-١ ، ١]$

ـ الحل ـ

$د'(س) = ٨س^{٣} - ٢س$

وبوضع $د'(س) = صفر$

$\therefore ٢س(٤س^{٢} - ١) = صفر$

$\therefore س = صفر \in [-١ ، ١]$

، $س = \frac{١}{٢} \in [-١ ، ١]$

، $س = \frac{-١}{٢} \in [-١ ، ١]$

$\because د(-١) = ٢$ ، $د(\frac{-١}{٢}) = \frac{٧}{٨}$

$د(٠) = ١$ ، $د(\frac{١}{٢}) = \frac{٧}{٨}$

، $د(١) = ٢$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= ٢$

تبلغها عند كل من $س = -١$ ، $س = ١$

ولها قيمة صغرى مطلقة $= \frac{٧}{٨}$

تبلغها عند كل من $س = \frac{-١}{٢}$ ، $س = \frac{١}{٢}$

② إذا كان $د'(س) = أس + ب$ حيث $أ < صفر$ ابحث وجود قيمة قصوى للدالة د مبيناً نوعها إن وجدت

ـ الحل ـ

$\because د'(س) = أس + ب$ وبوضع $د'(س) = صفر$

$\therefore س = \frac{-ب}{أ}$

، $د(س) = \int د'(س)\, ء س = \frac{أس^{٢}}{٢} + ب س + ث$

$\because أ < صفر$ ، د دالة تربيعية

$\therefore$ د لها قيمة عظمى مطلقة عند $س = \frac{-ب}{أ}$

③ أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة لكل من الدوال الآتية في الفترة المذكورة أمام كل منها

① $ص = \frac{س}{س - ١}$ $[٢ ، ٤]$

- الحل -

$\therefore ص' = \frac{١(س-١) - ١ \times س}{(س-١)^٢} = \frac{-١}{(س-١)^٢}$

وبوضع ص' = صفر فإنه

ص' غير معرفة عند $س = ١ \notin [٢ ، ٤]$

$\therefore د(٢) = ٢$ ، $د(٤) = \frac{٤}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٤}{٣}$

وتبلغها عند س = ٤

② $د(س) = \frac{٤س}{س^٢ + ١}$ $[-١ ، ٣]$

- الحل -

$د'(س) = \frac{٤(س^٢+١) - ٢س \times ٤س}{(س^٢+١)^٢}$

$\therefore د'(س) = \frac{-٤س^٢ + ٤}{(س^٢+١)^٢}$

وبوضع د'(س) = صفر

$\therefore س = ١ \in [-١ ، ٣]$

، $س = -١ \in [-١ ، ٣]$

$\because د(-١) = -٢$ ، $د(١) = ٢$ ، $د(٣) = \frac{٦}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = −٢

وتبلغها عند س = −١

③ $د(س) = س + \frac{١}{س}$ $[\frac{١}{٢} ، ٣]$

- الحل -

$د'(س) = ١ - \frac{١}{س^٢}$ وبوضع د'(س) = صفر

$\therefore س = ١ \in [\frac{١}{٢} ، ٣]$

، $س = -١ \notin [\frac{١}{٢} ، ٣]$

، د'(س) غير معرفة عند $س = ٠ \notin [\frac{١}{٢} ، ٣]$

$\because د(\frac{١}{٢}) = ٢,٥$ ، $د(١) = ٢$

، $د(٣) = ٣\frac{١}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $٣\frac{١}{٣}$

وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٢

وتبلغها عند س = ١

④ $د(س) = \frac{س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$ $[٢ ، ٥]$

- الحل -

$د'(س) = \frac{(٢س+١)(س^٢-١) - ٢س(س^٢+س-٤)}{(س^٢-١)^٢}$

$\therefore د'(س) = \frac{-س^٢ + ٦س - ١}{(س^٢-١)^٢}$

وبوضع د'(س) = صفر

$\therefore س = ٣ + ٢\sqrt{٢} \notin [٢ ، ٥]$

، $س = ٣ - ٢\sqrt{٢} \notin [٢ ، ٥]$

$\because د(٢) = \frac{٢}{٣}$ ، $د(٥) = \frac{١٣}{١٢}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{١٣}{١٢}$

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٢}{٣}$

وتبلغها عند س = ٢

④ أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية في الفترة المذكورة أمام كل منها

① $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{س}$ $\left[\frac{5\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}\right]$

- الحل -

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$ وبوضع $\text{د}' = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} = \frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{5\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}\right]$

، $\text{س} = \frac{3\pi}{2} \in \left[\frac{5\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}\right]$

$\because \text{د}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ، $\text{د}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

، $\text{د}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= \frac{1}{2}$

وتبلغها عند $\text{س} = \frac{5\pi}{6}$

ولها قيمة صغرى مطلقة $= -1$

وتبلغها عند $\text{س} = \frac{3\pi}{2}$

② $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س}$ $[0 ، 2\pi]$

- الحل -

$\text{د}'(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س}$

وبوضع $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{جتا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س} = \text{صفر}$

$\therefore \text{جتا}\,\text{س} = \text{جا}\,\text{س}$ $\div \text{جتا}\,\text{س}$

$\therefore \text{ظا}\,\text{س} = 1$

$\therefore \text{س} = \frac{\pi}{4} \in [0 ، 2\pi]$

، $\text{س} = \frac{5\pi}{4} \in [0 ، 2\pi]$

، $\because \text{د}(0) = 1$ ، $\text{د}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

، $\text{د}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ ، $\text{د}(2\pi) = 1$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= \sqrt{2}$

وتبلغها عند $\text{س} = \frac{\pi}{4}$

ولها قيمة صغرى مطلقة $= -\sqrt{2}$ وتبلغها عند $\text{س} = \frac{5\pi}{4}$

③ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$ $[0 ، 2]$

- الحل -

$\text{د}'(\text{س}) = 1 \times \text{هـ}^{-\text{س}} - \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{س}} - \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$

$= \text{هـ}^{-\text{س}}(1 - \text{س})$

وبوضع $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{هـ}^{-\text{س}}(1 - \text{س}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} = 1 \in [0 ، 2]$

$\therefore \text{د}(0) = \text{صفر}$ ، $\text{د}(1) = \frac{1}{\text{هـ}}$

، $\text{د}(2) = \frac{2}{\text{هـ}^2}$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= \frac{1}{\text{هـ}}$

وتبلغها عند $\text{س} = 1$

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = صفر

④ $\text{د}(\text{س}) = 10\,\text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$ $[0 ، 4]$

- الحل -

$\text{د}'(\text{س}) = 10\,\text{هـ}^{-\text{س}} - 10\,\text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$

$= 10\,\text{هـ}^{-\text{س}}(1 - \text{س})$

وبوضع $\text{د}'(\text{س}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} = 1 \in [0 ، 4]$

$\therefore \text{د}(0) = \text{صفر}$ ، $\text{د}(1) = 10\,\text{هـ}^{-1} = \frac{10}{\text{هـ}}$

، $\text{د}(4) = \frac{40}{\text{هـ}^4}$

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى مطلقة $= \frac{10}{\text{هـ}}$

وتبلغها عند $\text{س} = 1$

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = صفر

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - 1}$ $[2 ، 5]$

- الحل -

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{2\sqrt{\text{س} - 1}}$

وبوضع $\bar{د}(س) =$ صفر

∴ $\bar{د}(س)$ غير معرفة عند $س = ١ \notin [٢ ، ٥]$

∴ $د(٢) = ١$ ، $د(٥) = ٢$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١

وتبلغها عند س = ٢

⑥ $د(س) = \sqrt[٣]{س}$ $[-٨ ، ٨]$

- الحل -

$\bar{د}(س) = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$ وبوضع $\bar{د}(س) =$ صفر

∴ $\bar{د}(س)$ غير معرفة عند $س = ٠ \in [-٨ ، ٨]$

∴ $د(-٨) = -٢$ ، $د(٠) =$ صفر

، $د(٨) = ٢$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

وتبلغها عند س = ٨

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٢

وتبلغها عند س = -٨

⑦ $د(س) = \sqrt{١٦ - س^٢}$ $[-٤ ، ٣]$

- الحل -

$\bar{د}(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٦ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{١٦ - س^٢}}$

وبوضع $\bar{د}(س) =$ صفر

∴ س = صفر $\in [-٤ ، ٣]$

، $\bar{د}(س)$ غير معرفة عند $س = ٤ \notin [-٤ ، ٣]$

، $س = -٤ \in [-٤ ، ٣]$

∴ $د(-٤) =$ صفر ، $د(٠) = ٤$

، $د(٣) = \sqrt{٧}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٤

وتبلغها عند س = صفر

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر وتبلغها عند س = -٤

⑧ $د(س) = س\sqrt{١ - س}$ $[-١ ، ١]$

- الحل -

$\bar{د}(س) = ١ \times \sqrt{١ - س} + س \times \frac{-١}{٢\sqrt{١ - س}}$

∴ $\bar{د}(س) = \frac{٢ - ٢س - س}{٢\sqrt{١ - س}} = \frac{٢ - ٣س}{٢\sqrt{١ - س}}$

وبوضع $\bar{د}(س) =$ صفر

∴ $س = \frac{٢}{٣} \in [-١ ، ١]$

، $\bar{د}(س)$ غير معرفة عند $س = ١ \in [-١ ، ١]$

∴ $د(-١) = -\sqrt{٢}$ ، $د(\frac{٢}{٣}) = \frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$

، $د(١) =$ صفر

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٩}$

وتبلغها عند $س = \frac{٢}{٣}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = $-\sqrt{٢}$

وتبلغها عند س = -١

⑨ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{س - ١}}$ $[\frac{٥}{٤} ، ٥]$

- الحل -

$\bar{د}(س) = \frac{١\sqrt{س - ١} - س \times \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}}}{(\sqrt{س - ١})^٢}$

∴ $\bar{د}(س) = \frac{٢س - ٢ - س}{٢\sqrt{س - ١}\,(س - ١)} = \frac{س - ٢}{٢(س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$

وبوضع $\bar{د}(س) =$ صفر

∴ $س = ٢ \in [\frac{٥}{٤} ، ٥]$

، $\bar{د}(س)$ غير معرفة عند $س = ١ \notin [\frac{٥}{٤} ، ٥]$

، $د(\frac{٥}{٤}) = \frac{٥}{٢}$ ، $د(٢) = ٢$ ، $د(٥) = \frac{٥}{٢}$

∴ للدالة قيمة صغرى مطلقة = ٢

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٥}{٢}$

وتبلغها عند $س = \frac{٥}{٤}$ ، ٥

⑩ د(س) = { ٢س + ٣ ، س < ١ ؛ س² + ٤ ، س ≥ ١ }   [-٢، ٢]

- الحل -

∵ دَ(١⁺) = دَ(١⁻) = ٢ ∴ دَ(١) = ٢

∴ دَ(س) = { ٢ ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ ٢س ، س > ١ }

وبوضع دَ(س) = صفر

في حالة س < ١ لا تحقق

، دَ(س) = صفر في حالة س > ١

∴ ٢س = صفر ∴ س = صفر لا تحقق

∵ د(-٢) = -١ ، د(٢) = ٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٨

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١

وتبلغها عند س = -٢

---

⑪ د(س) = { س² + س - ٢ ، س ≤ ٢ ؛ ٥س - ٦ ، س > ٢ }   [-١، ٣]

- الحل -

∵ دَ(٢⁺) = دَ(٢⁻) = ٥

∴ دَ(س) = { ٢س + ١ ، س < ٢ ؛ ٥ ، س = ٢ ؛ ٥ ، س > ٢ }

∴ دَ(س) = صفر في حالة س < ٢

∴ ٢س + ١ = صفر

∴ س = -١/٢ ∈ [-١، ٣]

وفي حالة س > ٢ فإن ٥ = ٠ لا تحقق

∵ د(-١) = -٢ ، د(-١/٢) = -٩/٤

، د(٣) = ٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٩ وتبلغها

عند س = ٣ ، وللدالة قيمة صغرى

مطلقة = -٩/٤ وتبلغها عند س = -١/٢

---

⑪ د(س) = { س³ - ٣س² ، س ≤ ٠ ؛ س² - ٢س ، س > ٠ }   [-٣، ٣]

- الحل -

∵ دَ(٠⁺) ≠ دَ(٠⁻) ∴ دَ(٠) غير موجودة

∴ دَ(س) = { ٣س² - ٦س ، س < صفر ؛ غير موجودة ، س = صفر ؛ ٢س - ٢ ، س > صفر }

وبوضع دَ(س) = صفر في حالة س < ٠

∴ ٣س² - ٦س = صفر

∴ س = صفر لا تحقق ، س = ٢ لا تحقق

، دَ(س) = صفر في حالة س > صفر

∴ ٢س - ٢ = صفر

∴ س = ١ ∈ [-٣، ٣]

∵ د(-٣) = صفر ، د(١) = -١

، د(صفر) = صفر ، د(٣) = ٣

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها

عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١ وتبلغها

عند س = ١

---

⑫ د(س) = { ٣س² + ١٢س - ١ ، -١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣٧ - س ، ٢ < س ≤ ٣ }   [-١، ٣]

- الحل -

∵ دَ(٢⁺) ≠ دَ(٢⁻) ∴ دَ(٢) غير موجودة

∴ دَ(س) = { ٦س + ١٢ ، -١ ≤ س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -١ ، ٢ < س ≤ ٣ }

، عند س ∈ [-١، ٢[

دَ(س) = صفر فإن ٦س + ١٢ = صفر

∴ س = -٢ ∉ [-١، ٢[

، عند س ∈]٢، ٣]

دَ(س) = صفر فإن -١ = صفر مرفوض

∵ د(-١) = -١٠ ، د(٢) = ٣٥

، د(٣) = ٣٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٥

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٠

وتبلغها عند س = -١

(١٣) د(س) = س|س - ٢| $[\frac{١}{٢} ، \frac{٥}{٢}]$

- الحل -

$$د(س) = \begin{cases} -س(س-٢) & \frac{١}{٢} \le س < ٢ \\ س(س-٢) & ٢ \le س \le \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

∵ دَ(٢⁺) ≠ دَ(٢⁻)

∴ دَ(٢) غير موجودة

$$∴ دَ(س) = \begin{cases} -٢س + ٢ & \frac{١}{٢} \le س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & س = ٢ \\ ٢س - ٢ & ٢ < س \le \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

، دَ(س) = صفر في الفترة $\frac{١}{٢} \le س < ٢$

∴ -٢س + ٢ = صفر ∴ س = ١

، دَ(س) = صفر في الفترة $٢ < س \le \frac{٥}{٢}$

∴ ٢س - ٢ = صفر ∴ س = ١ وهي

لا تنتمي للفترة $٢ < س \le \frac{٥}{٢}$

∵ د($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣}{٤}$ ، د(١) = ١

، د(٢) = صفر ، د($\frac{٥}{٢}$) = $\frac{٥}{٤}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٥}{٤}$

وتبلغها عند س = $\frac{٥}{٢}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = ٢

صابر عبد الرحيم محمود

- تمارين عامة -

(١) أوجد القيم القصوى لكل من الدوال الآتية في الفترة المذكورة أمام كل منها

(١) د(س) = ٣ - ٥س - س² [-٤ ، ٣]

(٢) د(س) = س⁴ + ٢ [-١ ، ٢]

(٣) د(س) = س³ - ٣س² [١ ، ٤]

(٤) د(س) = س³ - ٩س² + ١٥س [-٢ ، ٤]

(٥) د(س) = ٢س³ + ٣س² + ١ [-١٠ ، ١٢]

(٦) د(س) = $\frac{س^٢ + ٩}{س}$ [١ ، ٦]

(٧) د(س) = س + $\frac{١}{س + ٢}$ [٠ ، ٣]

(٨) د(س) = $\frac{س^٢ + س + ١}{س^٢ - س + ١}$ [-٢ ، ٢]

(٩) د(س) = ٢جاس + جتا٢س [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

(١٠) د(س) = س هـ^س [-٣ ، ١]

(١١) د(س) = $\sqrt{س + ٩}$ [٠ ، ١٦]

(١٢) د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ١)^٢}$ [٠ ، ٩]

(١٣) د(س) = $\sqrt{٨س - س^٢}$ [٠ ، ٨]

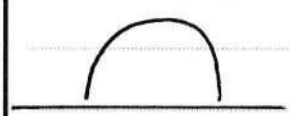
(١٤) $د(س) = \begin{cases} ٥ - س^٢ & س \le ٢ \\ س^٢ - ٣ & س > ٢ \end{cases}$ [-٣ ، ٣]

(١٥) د(س) = |س - ١| + ٢ [-١ ، ٢]

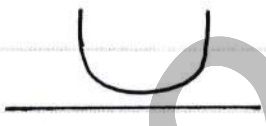
التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب

يقال لجزء متصل من منحنى أنه

① محدب إلى أعلى اذا كان المنحنى يقع أسفل جميع مماساته



② محدب لأسفل اذا كان المنحنى يقع أعلى جميع مماساته



تعريف: اذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على]أ ، ب[يكون منحنى الدالة د:

① محدباً لأسفل اذا كانت د' متزايدة على]أ ، ب[

② محدباً لأعلى اذا كانت د' متناقصة على]أ ، ب[

نظرية: اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات

•• اذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[

① اذا كان د''(س) > صفر لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدباً لأسفل على الفترة]أ ، ب[

② اذا كان د''(س) < صفر لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدباً لأعلى على الفترة]أ ، ب[

•• تعريف نقطة الانقلاب:

اذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[، جـ ∈]أ ، ب[وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (جـ ، د(جـ)) فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل

•• تأكيد هام:

نقطة الانقلاب عند س = أ لابد وأن تنتمي لمجال الدالة د أي أن د(أ) تكون معرفة

•• خطوات بحث فترات التحدب ونقط الانقلاب:

① نوجد د''(س) ثم نوجد قيم س التي تجعل د''(س) = صفر أو غير موجودة

② نعين اشارة د''(س) لتعيين فترات التحدب لأعلى حيث د''(س) < صفر وفترات التحدب لأسفل حيث د''(س) > صفر

③ نحدد نقط الانقلاب من النقط التي حصلنا عليها حيث تتغير اشارة د''(س) على يمين ويسار كل نقطة من هذه النقط

واذا لم تتغير اشارة د''(س) حول أي من هذه النقط فإنها لا تكون نقطة انقلاب

- أمثلة محلولة -

① عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت:

① $د(س) = س^{٢} - ٤س + ٢$

- الحل -

$د'(س) = ٢س - ٤$

$د''(س) = ٢$ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب

② $د(س) = (س - ١)^{٢}$

- الحل -

$د'(س) = ٢(س - ١)$

∴ $د''(س) = ٢$ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب

③ $د(س) = ٤ - ٦س - ٣س^{٢}$

- الحل -

$د'(س) = -٦ - ٦س$

$د''(س) = -٦$ (سالبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأعلى ولا توجد نقط انقلاب

④ $ص = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٩س + ٢$

- الحل -

$ص' = س^{٢} - ٩$ ، $ص'' = ٢س$

وبوضع $ص'' = $ صفر ∴ $٢س = $ صفر

∴ $س = $ صفر

صفر

- - - - - صفر + + + + +

∴ المنحنى محدب لأعلى في]$-\infty$ ، صفر[

ومحدب لأسفل في]صفر ، ∞[

وتوجد نقطة انقلاب هي (٠ ، ٢)

⑤ $د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩$

- الحل -

$د'(س) = ٣س^{٢} - ١٢س$

$د''(س) = ٦س - ١٢$ وبوضع $د''(س) = ٠$

∴ $٦س - ١٢ = $ صفر ∴ $س = ٢$

٢

- - - - صفر + + + +

∴ المنحنى محدب لأعلى في]$-\infty$ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[

وتوجد نقطة انقلاب (٢ ، −٧)

⑥ $د(س) = (س - ١)^{٤} + ٣$

- الحل -

$د'(س) = ٤(س - ١)^{٣}$

$د''(س) = ١٢(س - ١)^{٢}$

وبوضع $ص'' = $ صفر ∴ $س = ١$

١

+ + + + صفر + + + +

∴ المنحنى محدب لأسفل في]$-\infty$ ، ١[،]١ ، ∞[

وعند $س = ١$ لا توجد نقطة انقلاب

⑦ $د(س) = س^{٤} - ٢٤س^{٢} + ٤$

- الحل -

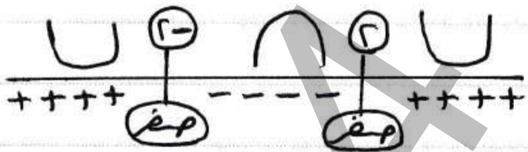
$د'(س) = ٤س^{٣} - ٤٨س$

$د''(س) = ١٢س^{٢} - ٤٨$

وبوضع $د''(س) = $ صفر

∴ $١٢س^{٢} - ٤٨ = صفر$ ∴ $١٢س^{٢} = ٤٨$

∴ $س^{٢} = ٤$ ∴ $س = \pm ٢$



∴ المنحنى محدب لأسفل في $]-\infty ، -٢[$

، $]٢ ، \infty[$ ومحدب لأعلى في $]-٢ ، ٢[$

وله نقطتا انقلاب هي

$(-٢ ، -٧٦)$ ، $(٢ ، -٧٦)$

---

⑧ $د(س) = ٦س^{٣} - س^{٤}$

- الحل -

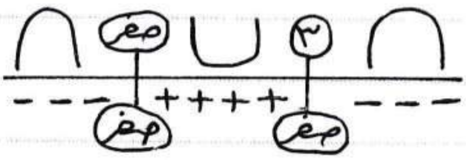
$د'(س) = ١٨س^{٢} - ٤س^{٣}$

$د''(س) = ٣٦س - ١٢س^{٢}$

وبوضع $د''(س) = صفر$

∴ $١٢س(٣ - س) = صفر$

∴ $س = صفر$ ، $س = ٣$



∴ المنحنى محدب لأعلى في $]-\infty ، صفر[$

، $]٣ ، \infty[$ ومحدب لأسفل في $]٠ ، ٣[$

وله نقطتا انقلاب $(٠ ، ٠)$ ، $(٣ ، ٨١)$

---

⑨ $د(س) = س^{٢} - \frac{٨}{س}$

- الحل -

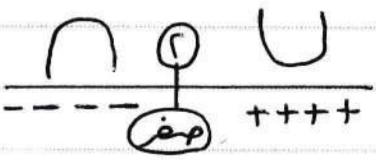
$د'(س) = ٢س + \frac{٨}{س^{٢}}$

∴ $د''(س) = ٢ - \frac{١٦}{س^{٣}}$ وبوضع $د''(س) = صفر$

∴ $٢ - \frac{١٦}{س^{٣}} = صفر$ ∴ $\frac{١٦}{س^{٣}} = ٢$

∴ $٢س^{٣} = ١٦$ ∴ $س^{٣} = ٨$

∴ $س = ٢$



∴ المنحنى محدب لأعلى في $]-\infty ، ٢[$

ومحدب لأسفل في $]٢ ، \infty[$

وله نقطة انقلاب $(٢ ، صفر)$

---

⑩ $د(س) = \frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

- الحل -

$د'(س) = \frac{صفر - ٦ \times ٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}} = \frac{-١٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$

$د''(س) = \frac{-١٢(س^{٢}+٣)^{٢} - ٢(س^{٢}+٣) \times ٢س \times -١٢س}{(س^{٢}+٣)^{٤}}$

∴ $د''(س) = \frac{-١٢س^{٢} - ٣٦ - ٤٨س^{٢}}{(س^{٢}+٣)^{٣}}$

∴ $د''(س) = \frac{-٦٠س^{٢} - ٣٦}{(س^{٢}+٣)^{٣}}$

وبوضع $د''(س) = صفر$

∴ $-٦٠س^{٢} - ٣٦ = صفر$ ليس لها حل في ح

أو $د''(س)$ غير معرفة عند $س^{٢} + ٣ = صفر$

وليس لها في ح

∴ $د''(س)$ سالبة لجميع قيم س

∴ المنحنى محدب لأعلى على ح ولا يوجد نقط انقلاب

---

⑪ $د(س) = \frac{س^{٢} + ٩}{س}$

- الحل -

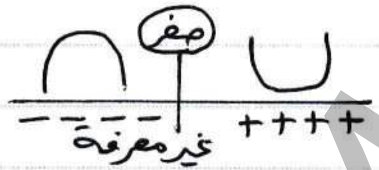
$د'(س) = \frac{س \times ٢س - ١(س^{٢}+٩)}{س^{٢}}$

∴ $د'(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢}} = ١ - \frac{٩}{س^{٢}}$

∴ $د''(س) = \frac{١٨}{س^{٣}}$ وبوضع $د''(س) = صفر$

∴ دً(س) غير معرفة عند س = صفر

∉ المجال



∴ المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، صفر[

ومحدب لأسفل في]صفر ، ∞[

وليس للمنحنى نقط انقلاب

⑫ $د(س) = \sqrt[3]{س}$

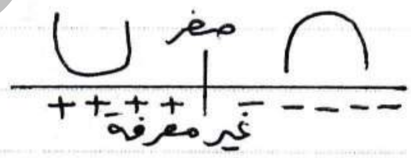
- الحل -

∵ $د(س) = س^{\frac{1}{3}}$

∴ $دَ(س) = \frac{1}{3} س^{\frac{-2}{3}}$

∴ $دً(س) = \frac{-2}{9} س^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{س^5}}$

∴ دً(س) غير معرفة عند س = صفر



∴ المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، صفر[

ومحدب لأعلى في]صفر ، ∞[

وتوجد نقطة انقلاب (صفر ، صفر)

⑬ $د(س) = |س^3 - ١|$

- الحل -

$د(س) = \begin{cases} س^3 - ١ & س \geq ١ \\ -س^3 + ١ & س < ١ \end{cases}$

$دَ(١^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{(١+هـ)^3 - ١ - صفر}{هـ} = ٣$

$دَ(١^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{-(١+هـ)^3 + ١ - صفر}{هـ} = -٣$

∴ دَ(١) غير موجودة

∴ $دَ(س) = \begin{cases} ٣س^2 & س \geq ١ \\ -٣س^2 & س < ١ \end{cases}$

∴ $دً(س) = \begin{cases} ٦س & س > ١ \\ -٦س & س < ١ \end{cases}$

عند س > ١   ∵ دً(س) = صفر

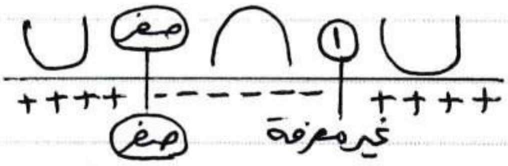
∴ ٦س = صفر   ∴ س = صفر لا تحقق

عند س < ١   ∴ دً(س) = صفر

∴ -٦س = صفر   ∴ س = صفر لها مماس وحيد

، دً(س) غير معرفة عند س = ١

∴ ليس لها مماس وحيد



∴ المنحنى محدب لأعلى في]صفر ، ١[

ومحدب لأسفل في]-∞ ، ٠[،]١ ، ∞[

ويوجد نقطة انقلاب (صفر ، ٣)

② إذا كانت النقطة (١ ، ١٢) هي نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = أس^3 + ب س^2$ فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية

- الحل -

∵ النقطة (١ ، ١٢) ∈ لمنحنى الدالة

∴ د(١) = ١٢   ∴ أ + ب = ١٢ ①

∴ $دَ(س) = ٣أس^2 + ٢ب س$

∴ $دً(س) = ٦أس + ٢ب$

∵ النقطة (١ ، ١٢) نقطة انقلاب

∴ دً(١) = صفر

∴ ٦أ + ٢ب = صفر ②

من ① ، ② ينتج أن

أ = -٦ ، ب = ١٨

③ أوجد أ ، ب بحيث يكون المنحنى

س^{٢}ص + أ ص + ب س^{٢} = صفر

نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، -١)

- الحل -

∵ س^{٢}ص + أ ص + ب س^{٢} = صفر ①

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ ٢ س ص + س^{٢} صَ + أ صَ + ٢ ب س = ٠ ②

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ ٢ ص + ٢ س صَ + ٢ س صَ + س^{٢} صً + أ صً + ٢ ب = صفر

∴ (س^{٢} + أ) صً + ٤ س صَ + ٢ ص + ٢ ب = صفر ③

∵ النقطة (١ ، -١) تحقق المعادلة ①

وعندها صً = صفر من ① فإن

-١ - أ + ب = صفر ∴ أ = ب - ١

من ② -٢ + صَ (١ + أ) + ٢ ب = صفر

∴ صَ = $\frac{٢(١ - ب)}{أ + ١}$

من ③

٠ + ٤ × ١ × $\frac{٢(١ - ب)}{أ + ١}$ + ٢ × -١ + ٢ ب = صفر

بالتعويض عن أ + ١ = ب ثم التبسيط

ينتج أن ب^{٢} - ٥ ب + ٤ = صفر

∴ ب = ١ ، ب = ٤

∴ أ = صفر ، أ = ٣

④ إذا كان منحنى الدالة د حيث

د(س) = س(س - ٣)^{٢} قيمة عظمى

محلية عند س$_{١}$ ، وقيمة صغرى محلية

عند س$_{٢}$ فاثبت أن الإحداثي السيني

لنقطة الانقلاب = $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$

- الحل -

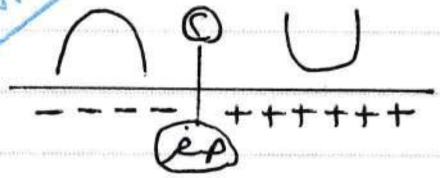
∵ د(س) = س(س - ٣)^{٢}

∴ د(س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ دَ(س) = ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩

∴ دً(س) = ٦ س - ١٢ وبوضع دً(س) = صفر

∴ س = ٢



∴ عند س = ٢ توجد نقطة انقلاب

وبوضع دَ(س) = صفر

∴ ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩ = صفر

∴ س = ٣ ، س = ١

∵ دً(٣) = ٦ > صفر

∴ عند س = ٣ نقطة قيمة صغرى للدالة

، ∵ دً(١) = -٦ < صفر

∴ عند س = ١ نقطة قيمة عظمى للدالة

∴ س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٣

∴ $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$ = $\frac{١ + ٣}{٢}$ = ٢

= الإحداثي السيني لنقطة الانقلاب

⑤ أوجد قيمة الثوابت أ ، ب ، جـ ، د

بحيث يكون المنحنى الذي معادلته

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د مماساً

لمحور السينات عند النقطة (٢ ، صفر)

ويكون للمنحنى نقطة انقلاب عند (٠ ، ٤)

- الحل -

∴ صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

، صً = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (٠ ، ٤)

∴ صً = صفر عند س = صفر

∴ ٢ ب = صفر ∴ ب = صفر

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

∴ ص = ٤ عند س = صفر

∴ ٤ = ٠ + ٠ + ٠ + د ∴ د = ٤

∴ ص = ا $س^{٣}$ + جـ س + ٤

، ص' = ٣ا $س^{٢}$ + جـ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، صفر)

∴ ص = صفر ، س = ٢

∴ صفر = ٨ا + ٢جـ + د

∴ ٤ا + جـ = -٢ ①

∵ المنحنى يمس محور السينات في (٢ ، ٠)

∴ ص' = صفر عند س = ٢

∴ ١٢ا + جـ = صفر ②

بحل المعادلتين ① ، ②

∴ ا = $\frac{١}{٤}$ ، جـ = -٣

⑥ اذا كان منحنى الدالة د حيث

د(س) = ا $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ + جـ س + د

له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤) وله نقطة انقلاب عند (١ ، ٢) أوجد معادلة المنحنى

- الحل -

∴ د'(س) = ٣ا $س^{٢}$ + ٢ب س + جـ

، د''(س) = ٦ا س + ٢ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (١ ، ٢)

∴ د''(١) = صفر ∴ ٦ا + ٢ب = صفر

∴ ب = -٣ا ①

، ∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٤) ∴ د'(٢) = صفر

∴ ١٢ا + ٤ب + جـ = صفر

ومن ① ∴ ١٢ا - ١٢ا + جـ = صفر

∴ جـ = صفر ②

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ د(١) = ٢ ∴ ا + ب + جـ + د = ٢

ومن ① ، ② ∴ ا - ٣ا + د = ٢

∴ -٢ا + د = ٢ ③

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ د(٢) = ٤ ∴ ٨ا + ٤ب + ٢جـ + د = ٤

ومن ① ، ② ∴ ٨ا - ١٢ا + ٠ + د = ٤

∴ -٤ا + د = ٤ ④

وبحل المعادلتين ③ ، ④

∴ ا = -١ ، د = صفر

∴ ب = ٣

∴ معادلة المنحنى هي

د(س) = -$س^{٣}$ + ٣$س^{٢}$

⑦ اذا كان للدالة د(س) = ا $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ + ٩س + ١ نقطتان حرجتان عند س = ١ ، س = ٣ فأوجد قيمتي ا ، ب وادرس تحدب منحناها ونقط الانقلاب إن وجدت

- الحل -

∴ د'(س) = ٣ا $س^{٢}$ + ٢ب س + ٩

، د''(س) = ٦ا س + ٢ب

، د'(س) = صفر عند س = ١ ، س = ٣

∴ د'(١) = ٣ا + ٢ب + ٩ = صفر

∴ ٣ا + ٢ب = -٩ ①

د'(٣) = ٢٧ا + ٦ب + ٩ = صفر

∴ ٩ا + ٢ب = -٣ ②

وبحل المعادلتين فإن

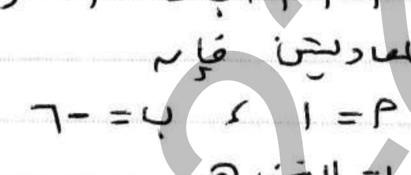
ا = ١ ، ب = -٦

∴ معادلة المنحنى هي

د(س) = $س^{٣}$ - ٦$س^{٢}$ + ٩س + ١

، د''(س) = ٦س - ١٢

وبوضع د''(س) = صفر ∴ س = ٢



∴ المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[وله نقطة انقلاب (٢ ، ٣)

⑧ إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على ح حيث

$د(س) = \begin{cases} ٢س^٢ + أس + ب & س \le ١ \\ ٣س - س^٢ & س > ١ \end{cases}$

① أوجد قيم الثابتين أ ، ب

② حدد فترات التحدب إلى أعلى والتحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب إن وجدت

- الحل -

∵ الدالة قابلة للاشتقاق

∴ الدالة متصلة

∴ $د(١^-) = د(١^+) = د(١)$

∴ $٢ + أ + ب = ٣ - ١$ ∴ $أ = -ب$

$د'(س) = \begin{cases} ٤س + أ & س < ١ \\ ٣ - ٢س & س > ١ \end{cases}$

∵ $د'(١^+) = د'(١^-)$

∴ $٤ + أ = ٣ - ٢$ ∴ $أ = -٣$

، $ب = ٣$

$د''(١^+) = \underset{ﻫ \to ٠^+}{نها} \frac{د'(١+ﻫ) - د'(١)}{ﻫ}$

$= \underset{ﻫ \to ٠^+}{نها} \frac{٤(١+ﻫ) + أ - (٤+أ)}{ﻫ}$

$= \underset{ﻫ \to ٠^+}{نها} \frac{٤ + ٤ﻫ - ٣ - ٤ + ٣}{ﻫ} = ٤$

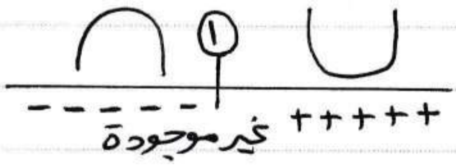
$د''(١^-) = \underset{ﻫ \to ٠^-}{نها} \frac{د'(١+ﻫ) - د'(١)}{ﻫ}$

$= \underset{ﻫ \to ٠^-}{نها} \frac{٣ - ٢(١+ﻫ) - (٤+أ)}{ﻫ}$

$= \underset{ﻫ \to ٠^-}{نها} \frac{٣ - ٢ - ٢ﻫ - ٤ + ٣}{ﻫ} = -٢$

∴ $د''(١)$ غير موجودة

∴ $د''(س) = \begin{cases} ٤ & س < ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ -٢ & س > ١ \end{cases}$



∴ المنحنى محدب لأعلى في]−∞، ١[

ومحدب لأسفل في]١، ∞[

ولها نقطة انقلاب عند (١، ٢)

⑨ إذا كانت ص = د(س) تمثل منحنى الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة وكان $د''(س) < صفر$ عندما $س < \frac{-٢}{٣}$ ، $د''(س) > صفر$ عندما $س > \frac{-٢}{٣}$ ويمر منحنى الدالة بالنقطة (١، ٦) وتوجد نقطة حرجة عند (−١، ٢) أوجد معادلة المنحنى وبين نوع النقطة الحرجة

- الحل -

نفرض أن $د(س) = أس^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء$

يمر المنحنى بالنقط (١، ٦) ، (−١، ٢)

∴ $أ + ب + جـ + ء = ٦$ ①

∴ $-أ + ب - جـ + ء = ٢$ ②

$د'(س) = ٣أس^٢ + ٢ب س + جـ$

وله نقطة حرجة عند (−١، ٢)

∴ $د'(-١) = صفر$ ∴ $٣أ - ٢ب + جـ = صفر$ ③

وله نقطة انقلاب عند $س = \frac{-٢}{٣}$

∴ $د''(س) = ٦أس + ٢ب$

∴ $د''(\frac{-٢}{٣}) = صفر$ ∴ $-٤أ + ٢ب = صفر$ ④

من ① ، ② ، ③ ، ④ ينتج أن

$أ = ١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = ١$ ، $ء = ٢$

∴ $د(س) = س^٣ + ٢س^٢ + س + ٢$

$د'(س) = ٣س^٢ + ٤س + ١$

، $د'(س) = صفر$ عند $س = \frac{-١}{٣}$ ، -١

∴ $\bar{\bar{د}}(\frac{1}{3}) > $ صفر قيمة صغرى محلية

، $\bar{\bar{د}}(-1) < $ صفر قيمة عظمى محلية

(10) حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحنى عندها لكل من الدوال الآتية:

(1) $د(س) = \begin{cases} (س+3)^2 & س < -1 \\ 3س^2 - س^3 & س \geq -1 \end{cases}$

- الحل -

$\bar{د}(-1^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{(هـ-1+3)^2 - 4}{هـ} = 4$

$\bar{د}(-1^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{3(هـ-1)^2 - (هـ-1)^3 - 4}{هـ} = -9$

∴ $\bar{د}(-1^-) \neq \bar{د}(-1^+)$

∴ $\bar{د}(-1)$ غير موجودة

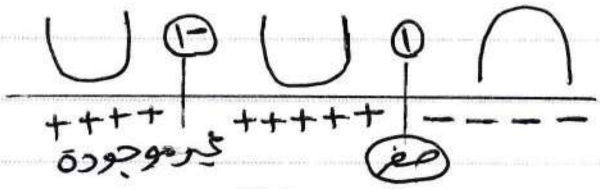
∴ $\bar{د}(س) = \begin{cases} 2(س+3) & س < -1 \\ 6س - 3س^2 & س > -1 \end{cases}$

∴ لا يوجد مماس عند س = -1

∴ $\bar{\bar{د}}(س) = \begin{cases} 2 & س < -1 \\ 6 - 6س & س > -1 \end{cases}$

$\bar{\bar{د}}(س) = $ صفر ∴ $6 - 6س = $ صفر

∴ س = 1



∴ المنحنى محدب لأسفل في]-∞، -1[،]-1، 1[ومحدب لأعلى]1، ∞[

وله نقطة انقلاب (1، 2)

ميل المماس عندها = 6×1 - 3(1)^2 = 3

∴ معادلة المماس هي

ص - 2 = 3(س - 1)

∴ 3س - ص - 1 = صفر

(2) $د(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & س < -2 \\ س^3 - 3س + 2 & س \geq -2 \end{cases}$

- الحل -

$\bar{د}(-2^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{(هـ-2)^2 - 4 - صفر}{هـ} = -4$

$\bar{د}(-2^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{(هـ-2)^3 - 3(هـ-2) + 2 - صفر}{هـ} = 9$

∴ $د(-2^-) \neq د(-2^+)$

∴ لا يوجد مماس عند س = -2

∴ $\bar{د}(س) = \begin{cases} 2س & س < -2 \\ 3س^2 - 3 & س > -2 \end{cases}$

∴ $\bar{\bar{د}}(س) = \begin{cases} 2 & س < -2 \\ 6س & س > -2 \end{cases}$

$\bar{\bar{د}}(س) = $ صفر ∴ 6س = صفر ∴ س = صفر

∴ المنحنى محدب لأسفل في]-∞، -2[،]صفر، ∞[ومحدب لأعلى في]-2، صفر[

ويوجد نقطة انقلاب (صفر، 2)

ويوجد مماس عند هذه النقطة ميله

$\bar{د}(صفر) = -3$

∴ معادلة المماس هي

ص - 2 = -3(س - صفر)

∴ 3س + ص - 2 = صفر

- تمارين عامة -

① عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت للدوال الآتية:

① د(س) = ١ + ٦ س − ٢ س^{٣}

② د(س) = س (س^{٢} − ١)

③ د(س) = ١٥ س + ٦ س^{٢} − س^{٣}

④ د(س) = (س^{٢} − ٤)^{٢}

⑤ ص = س^{٤} − ٤ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥

⑥ د(س) = س^{٤} − ٨ س^{٢} + ١٦

⑦ د(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} + ٣}$

⑧ ص = $\sqrt[٣]{(\text{س} - ٤)^{٢}}$

② أوجد قيمتي الثابتين أ ، ب بحيث يكون للمنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س نقطة انقلاب عند النقطة (٣ ، −٩)

(−٩ ، ١٥)

③ أوجد نقط الانقلاب لمنحنى الدالة د : د(س) = ٢ س + جا س في الفترة]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

④ اثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $\dfrac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ يساوي $\frac{\pi}{٤}$

⑤ عين الثوابت أ ، ب ، جـ ، ء بحيث يحقق المنحنى
ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء
الشروط التالية معاً
① يمر بالنقطة (صفر ، ٢)
② له مماس أفقي عند س = ١
③ النقطة (٢ ، ٤) هي نقطة انقلاب له

(١ ، −٦ ، ٩ ، ٢)

⑥ حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د وأوجد نقط الانقلاب ومعادلة مماس المنحنى عندها للدالة الآتية

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} - ٣\text{س} & \text{س} \le \text{صفر} \\ ٤\text{س} - \text{س}^{٢} & \text{س} > \text{صفر} \end{cases}$$

رسم المنحنيات

خطوات رسم منحنى الدالة د

حيث د كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل:

① نحدد مجال الدالة د ثم نحدد تماثل الدالة د حيث:

(أ) د(−س) = د(س) لكل س ∈ لمجال د

∴ الدالة زوجية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات

(ب) د(−س) = −د(س) لكل س ∈ لمجال د

∴ الدالة فردية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل

② نوجد د'(س) ، د''(س)

③ نستخدم د'(س) فى تعيين

(أ) مناطق التزايد حيث د'(س) > صفر

ومناطق التناقص حيث د'(س) < صفر

(ب) نقط القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت حيث د'(س) = صفر (لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق) وتتغير إشارة د'(س) قبل وبعد النقطة.

④ نستخدم د''(س) فى تعيين

(أ) مناطق التحدب إلى أعلى حيث د''(س) > ٠

، مناطق التحدب إلى أسفل حيث د''(س) < ٠

(ب) نقط الانقلاب إن وجدت حيث د''(س) = صفر (لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق مرتين) وتتغير إشارة د''(س) قبل وبعد النقطة.

⑤ نعين بعض النقط المساعدة فى الرسم مثل:

(أ) نقط التقاطع مع محور السينات بوضع د(س) = صفر

(ب) نقط التقاطع مع محور الصادات بوضع س = صفر

(ج) بعض النقط الإضافية الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة وإيجاد قيمة د(س)

⑥ نرتب النقط التى حصلنا عليها فى جدول ونمثلها بيانياً ثم نكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقط

- أمثلة محلولة -

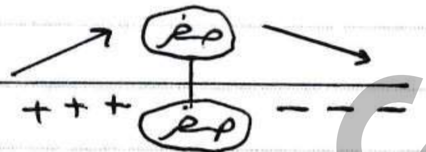
① ارسم شكلاً عاماً لمنحنيات كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

① د(س) = ٣ − س²

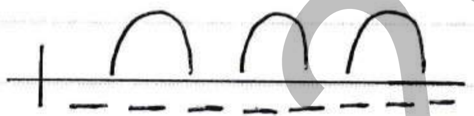
- الحل -

د'(س) = −٢س ، د''(س) = −٢

بوضع د'(س) = صفر ∴ س = صفر



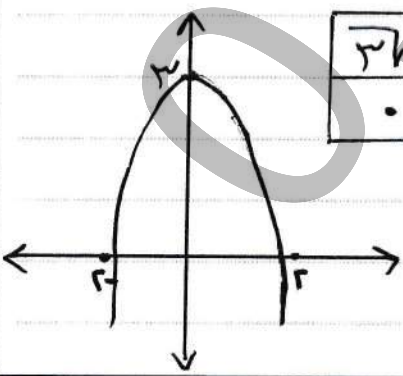
∵ د''(س) = −٢ ≠ صفر



ولإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع د(س) = صفر ∴ س = ±√٣

ولإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = صفر ∴ ص = ٣

س	−√٣	صفر	√٣
ص	٠	٣	٠

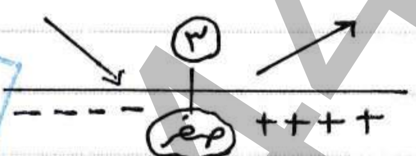


② $د(س) = س^٢ - ٦س + ٥$

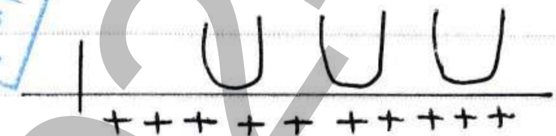
- الحل -

$د'(س) = ٢س - ٦$ ، $د''(س) = ٢$

بوضع $د'(س) =$ صفر $\therefore س = ٣$



$\therefore د''(س) = ٢ \neq$ صفر



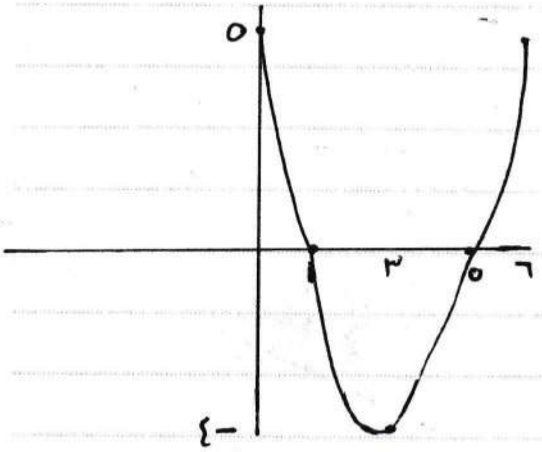
ولإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع $د(س) =$ صفر $\therefore س = ٥ ، ١$

ولإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع $س =$ صفر $\therefore ص = ٥$

س	٠	١	٣	٥
ص	٥	٠	−٤	٠

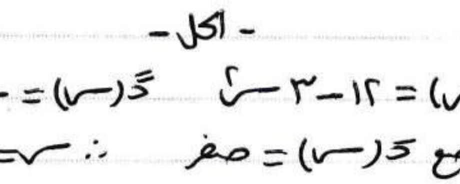


③ $د(س) = ١٢س - س^٣$

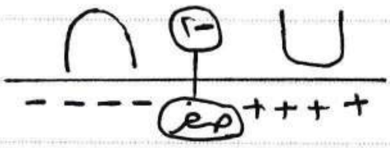
- الحل -

$د'(س) = ١٢ - ٣س^٢$ ، $د''(س) = -٦س$

وبوضع $د'(س) =$ صفر $\therefore س = \pm ٢$



وبوضع $د''(س) =$ صفر $\therefore س = -٢$



لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

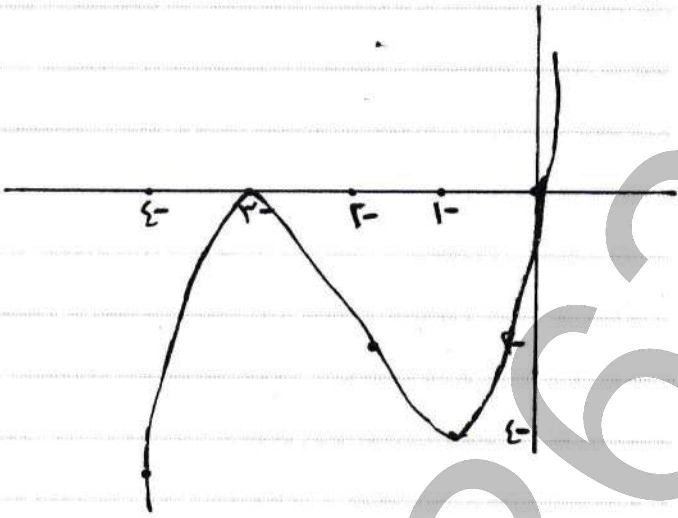
نضع $د(س) =$ صفر $\therefore س =$ صفر ، -٣

ولإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع $س =$ صفر $\therefore ص =$ صفر

نعين نقطة مساعدة $د(-٤) = -٤$

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠
ص	−٤	٠	−٢	−٤	٠



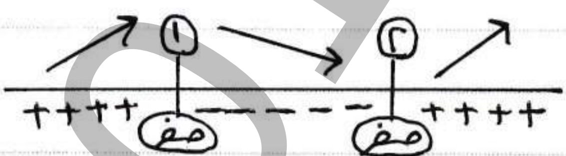
④ $د(س) = ٢س^٣ - ٩س^٢ + ١٢س - ٢$

- الحل -

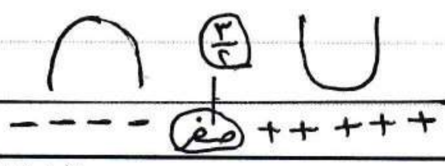
$د'(س) = ٦س^٢ - ١٨س + ١٢$

$د''(س) = ١٢س - ١٨$

بوضع $د'(س) =$ صفر $\therefore س = ١ ، ٢$

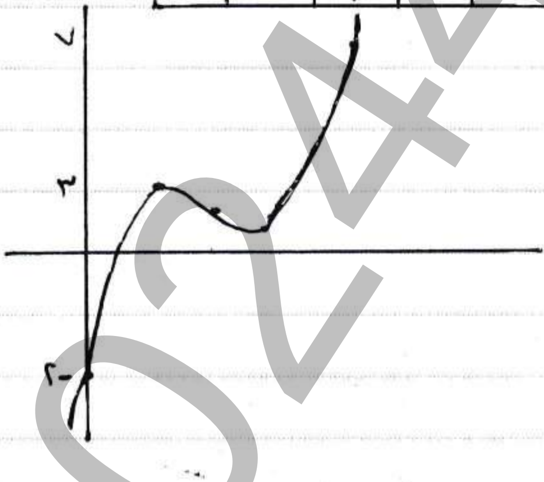


بوضع $د''(س) =$ صفر $\therefore س = \frac{٣}{٢}$



لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات
نضع س = صفر ∴ ص = صفر

س	٠	١	$\frac{٣}{٢}$	٢	٣
ص	٢-	٣	$\frac{٥}{٢}$	٢	٧



⑤ د(س) = { س^٣ - ٣س^٢ ، س > صفر
س^٢ - ٢س ، س ≤ صفر }

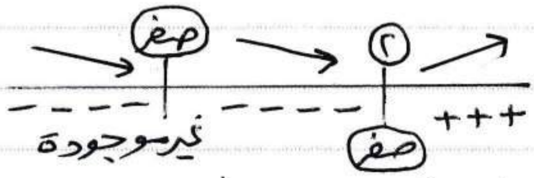
الحل

∵ دَ(٠⁻) ≠ دَ(٠⁺)
∴ دَ(٠) غير موجودة

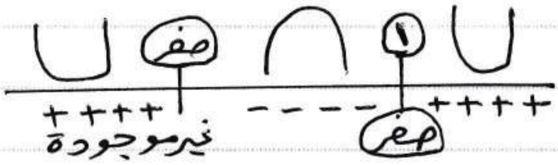
∴ دَ(س) = { ٣س^٢ - ٦س ، س > ٠
غير موجودة ، س = ٠
٢س - ٢ ، س < ٠ }

دً(س) = { ٦س - ٦ ، س > ٠
غير موجودة ، س = ٠
٢ ، س < ٠ }

وبوضع دَ(س) = صفر
أولاً: عند س > صفر ∴ س = ٢
ثانياً: عند س < صفر لا توجد

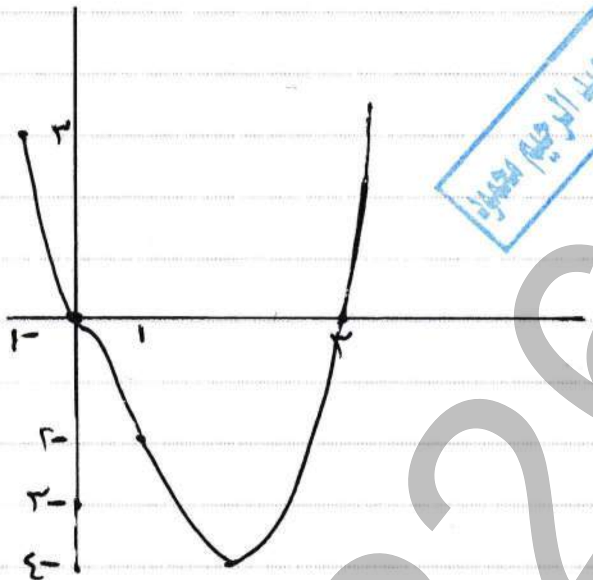


وبوضع دً(س) = صفر
عند س > صفر ∴ س = ١
عند س < صفر لا يوجد



لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات
نضع ص = صفر
وعند س > صفر ∴ س = ٣
وعند س ≤ صفر ∴ س = صفر
ولإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات
نضع س = صفر ∴ ص = صفر
ونضيف نقطة مساعدة د(-١) = ٣

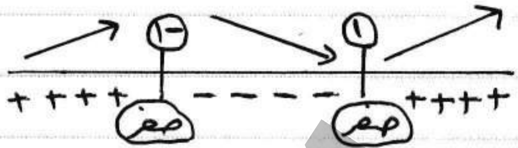
س	١-	٠	١	٢	٣
ص	٣	٠	٢-	٤-	٠



③ عين فترات التزايد والتناقص للمنحنى ص = س^٣ - ٣س + ٤ ثم ارسم الشكل العام للمنحنى موضحاً عليه مواقع القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت

الحل

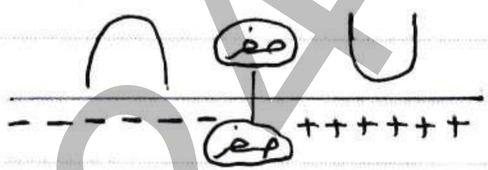
∵ صَ = ٣س^٢ - ٣ ∴ صً = ٦س
بوضع صَ = صفر ∴ س = ±١



∴ د متزايدة في]−∞، −١[،]١، ∞[

ومتناقصة في]−١، ١[

وبوضع ص'' = صفر ∴ س = صفر



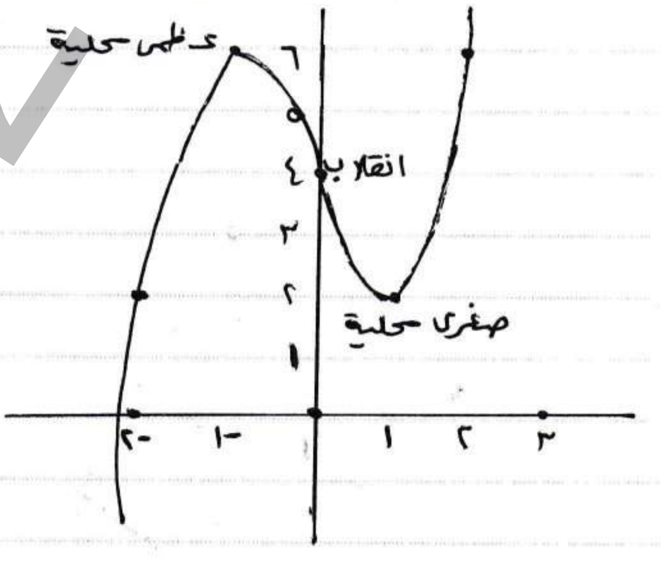
لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = صفر ∴ ص = ٤

ثم نعين نقط مساعدة

د(−٢) = ٢ ، د(٢) = ٦

س	−٢	−١	٠	١	٢
ص	٢	٦	٤	٢	٦

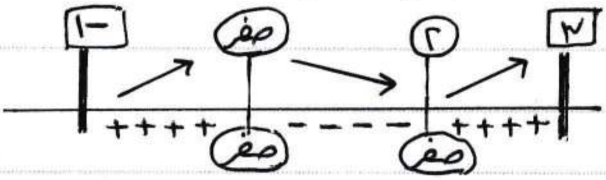


- اكمل -

∴ $د'(س) = ٣س^٢ - ٦س$

، $د''(س) = ٦س - ٦$ بوضع $د'(س) = ٠$

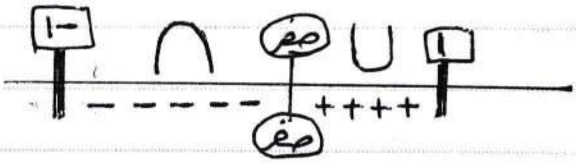
∴ س = صفر ، ٢



∴ توجد عظمى محلية د(٠) = ٤

وقيمة صغرى محلية د(٢) = صفر

وبوضع د''(س) = صفر ∴ س = ١

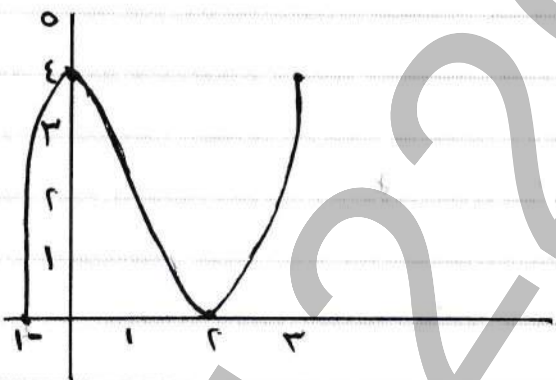


توجد نقطة انقلاب هي (١، ٢)

س	−١	٠	١	٢	٣
ص	٠	٤	٢	٠	٤

نعين نقط مساعدة

د(−١) = صفر ، د(٣) = ٤



③ للدالة د : حيث

$د(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٤$ أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية وكذلك نقط الانقلاب لمنحنى الدالة إن وجدت وذلك في الفترة]−١، ٣[ثم ارسم الشكل العام لمنحنى هذه الدالة في [−١، ٣]

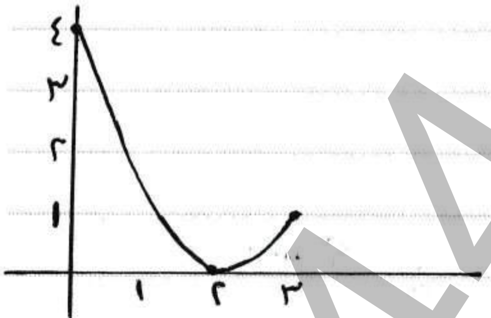
④ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة المتصلة د اذا علم ما يلي :

① د(٠) = ٤ ، د(٣) = ١

② د'(س) < صفر لكل س < ٢ ،
د'(س) > صفر لكل س > ٢

③ د''(س) > صفر

- الحل -



⑤ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) اذا كان

① د متصلة ومجالها [-١، ٥]

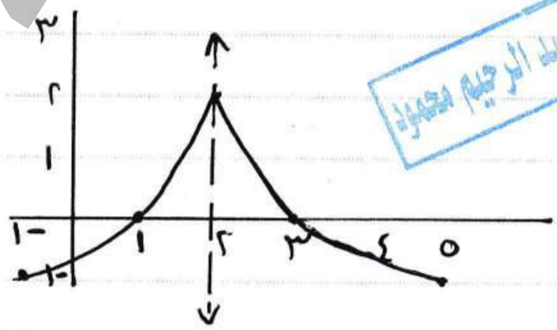
② د(١) = د(٣) = صفر ،
د'(٢) غير موجودة

③ د'(س) > صفر عندما س < ٢ ،
د'(س) < صفر عندما س > ٢

④ د''(س) > صفر عندما س ≠ ٢

[اعتبر د(-١) = د(٥) = -١]

- الحل -



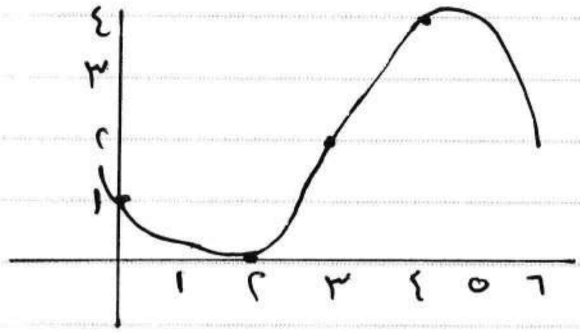
⑥ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة المتصلة د الذي يحقق الخواص التالية

① د(٤) = ٢ د(٣) = ٤

② د'(س) < صفر عندما س > ٤ أو س < ٢

③ د''(س) < صفر عندما س > ٣ ، د''(س) > صفر عندما س < ٣

- الحل -



⑦ عين قيم أ، ب، ج، د للمنحنى ص = أس³ + ب س² + ج س + د بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند (٠، ٦) وقيمة صغرى محلية عند (١، ٥) ثم ارسم الشكل العام للمنحنى

- الحل -

ص' = ٣أ س² + ٢ب س + ج

ص'' = ٦أ س + ٢ب

∵ المنحنى يمر بالنقط (٠، ٦) ، (١، ٥)

∴ ٦ = ٠ + ٠ + ٠ + د ∴ د = ٦

، ٥ = أ + ب + ج + ٦ ∴ أ + ب + ج = -١ ①

∵ يوجد نقطة حرجة عند (٠، ٦)

∴ د'(صفر) = صفر ∴ ج = صفر

∵ يوجد نقطة حرجة عند (١، ٥)

∴ د'(١) = صفر ∴ ٣أ + ٢ب = صفر ②

وبحل المعادلتين ①، ② فإن

أ = ٢ ب = -٣

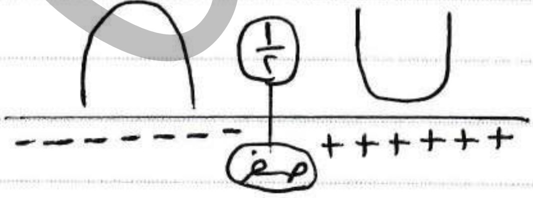
∴ معادلة المنحنى هي

ص = ٢س³ - ٣س² + ٦

∴ ص' = ٦س² - ٦س ، ص'' = ١٢س - ٦

وبوضع ص'' = صفر

∴ س = ١/٢ ومنها ص = ١١/٢



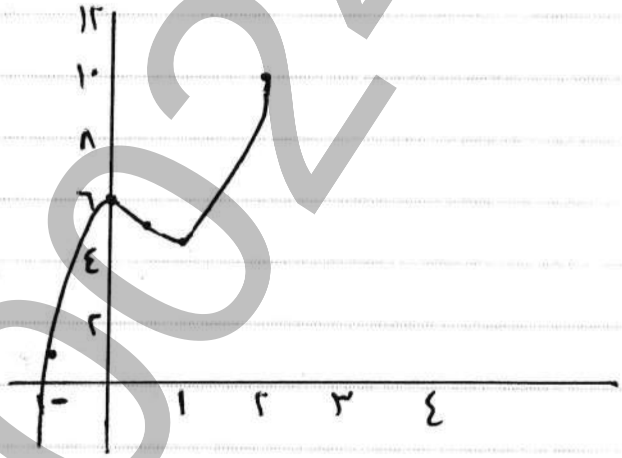
لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = صفر ∴ ص = ٦

نعين نقط مساعدة

د(-١) = ١ ، د(٢) = ١٠

س	-١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
ص	١	٦	$\frac{١١}{٢}$	٥	١٠



(٨) اذا كان د(س) = س³ + ا س² + ب س + ٤ حيث ا ، ب ثابتان أوجد قيمتي ا ، ب اذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ونقطة انقلاب عند س = ١ ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د

- الحل -

∴ د'(س) = ٣س² + ٢ا س + ب

∴ د''(س) = ٦س + ٢ا

∵ د'(س) = صفر عند س = ٢

∴ صفر = ١٢ + ٤ا + ب

∴ ٤ا + ب = -١٢ (١)

∵ د''(س) = صفر عند س = ١

∴ صفر = ٦ + ٢ا ∴ ا = -٣

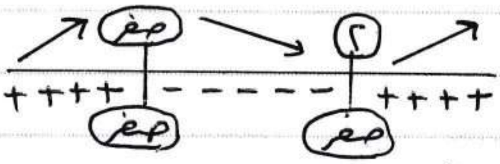
وبالتعويض في (١) ∴ ب = صفر

∴ د(س) = س³ - ٣س² + ٤

بوضع د'(س) = صفر

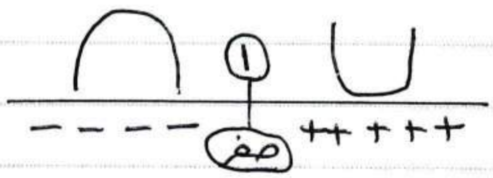
∴ ٣س² - ٦س = صفر

∴ س = صفر ، س = ٢



وبوضع د''(س) = صفر

∴ ٦س - ٦ = صفر ∴ س = ١



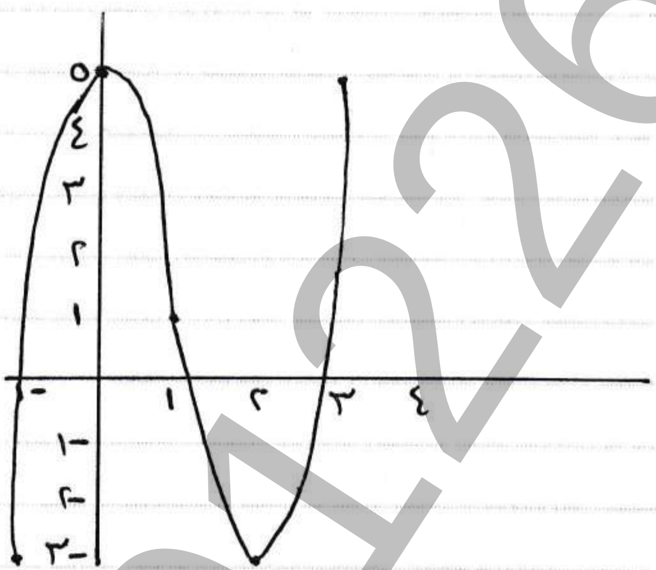
لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = صفر ∴ ص = ٥

نعين نقط مساعدة

د(-١) = -٣ ، د(٣) = ٥

س	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٣	٥	١	-٣	٥



⑨ اذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س، ص) على المنحنى هو ٣(س^{٢} - ١) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د ونقط الانقلاب إن وجدت ، علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (-٢، -١) ، ثم ارسم شكلاً عاماً لهذا المنحنى

- الحل -

∵ دَ(س) = ٣(س^{٢} - ١) = ٣س^{٢} - ٣

∴ د(س) = ∫ دَ(س) ءس = ∫(٣س^{٢} - ٣) ءس

∴ د(س) = س^{٣} - ٣س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (-٢، -١)

∴ -١ = -٨ + ٦ + ث

∴ ث = ١

∴ د(س) = س^{٣} - ٣س + ١

بوضع دَ(س) = صفر ∴ س = ±١

+++ (-١) - - - - - (١) +++

صفر صفر

∴ د(-١) = ٣ قيمة عظمى محلية

، د(١) = -١ قيمة صغرى محلية

، دً(س) = ٦س وبوضع دً(س) = ٠

∴ س = صفر

- - - صفر +++++

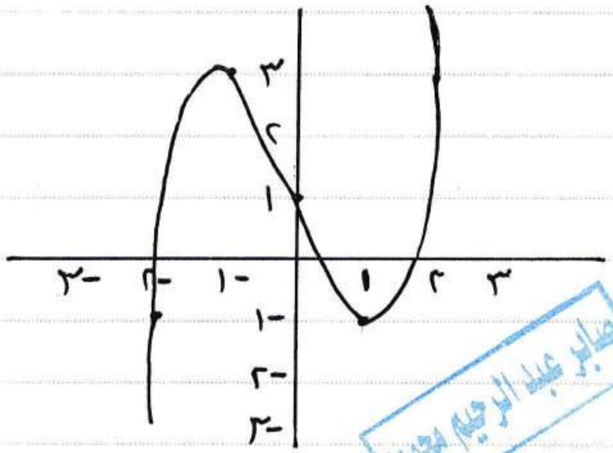
∴ (٠، ١) هي نقطة الانقلاب

والمنحنى يقطع محور الصادات عند س = صفر ∴ ص = ١

ثم نعين نقط مساعدة

د(٢) = ٣ ، د(-٢) = -١

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	-١	٣	١	-١	٣



⑩ اذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه (س، ص) هو ٦(١ - ٢س) وكان للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١ وللدالة قيمة صغرى محلية تساوي ٤

① أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند س = -١

② ارسم شكلاً عاماً للمنحنى موضحاً القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب إن وجدت

- الحل -

∵ دً(س) = ٦(١ - ٢س) = ٦ - ١٢س

∴ دَ(س) = ∫ دً(س) ءس = ∫(٦ - ١٢س) ءس

∴ دَ(س) = ٦س - ٦س^{٢} + ث$_{١}$

∵ د دالة كثيرة حدود ولها نقطة حرجة عند س = ١ ∴ دَ(١) = صفر

∴ صفر = ٦ - ٦ + ث$_{١}$ ∴ ث$_{١}$ = صفر

∴ دَ(س) = ٦س - ٦س^{٢}

وبوضع دَ(س) = صفر

∴ س = صفر ، س = ١

∵ دً(٠) = ٦ (موجبة) قيمة صغرى

، دً(١) = -٦ (سالبة) قيمة عظمى

∴ عند النقطة (٠، ٤) قيمة صغرى محلية

$\because$ د(س) = $\int$ د̄(س) دس = $\int$ (٦س - ٦س^{٢}) دس

$\therefore$ د(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٣} + ث

$\because$ د(٠) = ٤

$\therefore$ ٤ = صفر - صفر + ث $\therefore$ ث = ٤

$\therefore$ د(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٣} + ٤

$\because$ ميل المماس عند س = -١

هو د̄(-١) = -١٢

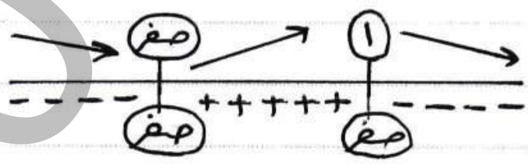
$\therefore$ ميل العمودي = $\frac{١}{١٢}$ ، عند س = -١

$\therefore$ ص = ٩

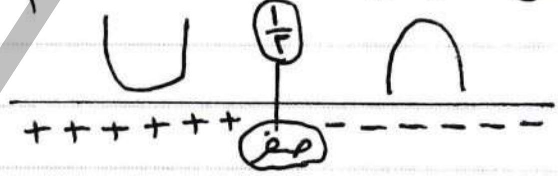
$\therefore$ معادلة العمودي هي

ص - ٩ = $\frac{١}{١٢}$ (س + ١)

$\therefore$ س - ١٢ص + ١٠٩ = صفر



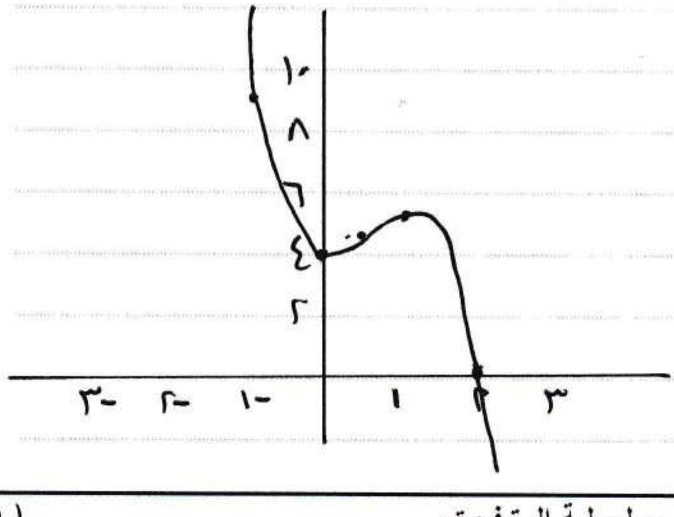
وبوضع د̄̄(س) = صفر $\therefore$ س = $\frac{١}{٢}$



ثم نعين نقط مساعدة:

د(-١) = ٩ ، د(٢) = صفر

س	-١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
ص	٩	٤	$\frac{٩}{٢}$	٥	٠



تمارين عامة

(١) ارسم شكلاً عاماً لمنحنيات كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

(١) د(س) = س(س + ٣)^{٢}

(٢) د(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٢س - ٥

(٣) د(س) = (٢ - س)(س + ١)^{٢}

(٤) د(س) = س|س - ٤|

(٢) أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للدالة د حيث

د(س) = (س + ١)(س^{٢} - س - ٢) وكذلك

نقط الانقلاب لمنحنى الدالة إن وجدت

ثم ارسم الشكل العام للمنحنى

صفر ، -٤ ، (٠ ، -٢)

(٣) ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة المتصلة

د إذا كان:

(١) د(١) = د(٥) = صفر ، د(٣) = -٣

(٢) د̄(س) < صفر لكل س < ٣ ،

د̄(س) > صفر لكل س > ٣

(٣) د̄̄(س) > صفر لكل س ≠ ٣

(٤) عين كلاً من أ ، ب بحيث تكون النقطة

(١ ، ٣) نقطة انقلاب للمنحنى

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} ثم ارسم شكلاً

عاماً للمنحنى

(٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = د(س)

عند أي نقطة عليه يساوي ٦س^{٢} + ب س

وكان د(٠) = ٥ ، د(٢) = -٣

أوجد قيمة الثابت ب ثم ارسم الشكل

العام لمنحنى الدالة د

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

تكون الهدف من هذه التطبيقات هو الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما مثل الحصول على أكبر ربح أو أكبر مساحة أو أقل تكلفة أو أقل حجم ---- إلخ

• ملاحظة: عند إيجاد أكبر حجم (ح) نضع $\frac{دح}{دس}$ = صفر ونتأكد من أن $\frac{د^2ح}{دس^2}$ < صفر

وعند إيجاد أقل تكاليف ت نضع $\frac{دت}{دس}$ = صفر ونتأكد من أن $\frac{د^2ت}{دس^2}$ > صفر

- أمثلة محلولة -

(1) عددان مجموعهما 30 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن أوجد العددين

- الحل -

نفرض أن العددين هما س ، 30 − س

∴ ص = س(30 − س) = 30س − $س^2$

∴ ص' = 30 − 2س   وبوضع ص' = صفر

∴ س = 15

∴ ص'' = −2 لجميع قيم س

∴ ص عند س = 15 لها قيمة عظمى

∴ العددان هما 15 ، 15

(2) عددان صحيحان موجبان مجموعهما 5 ، ومجموع مكعب أصغرهما وضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن أوجد العددين

- الحل -

نفرض أن العددين هما س ، 5 − س

حيث س < 5 − س   ∴ س < $\frac{5}{2}$

∴ ص = $س^3$ + 2$(5 − س)^2$

∴ ص' = 3$س^2$ + 4(5 − س)(−1)

∴ ص' = 3$س^2$ + 4س − 20

∴ ص'' = 6س + 4   بوضع ص' = صفر

∴ 3$س^2$ + 4س − 20 = صفر

∴ س = 2 ، س = $-\frac{10}{3}$ مرفوض

وعند س = 2

∴ ص'' = 6×2 + 4 = 16 (موجبة)

∴ ص لها قيمة صغرى عند س = 2

∴ العددان هما 2 ، 3

(3) أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف إليه معكوسه الضربي كان الناتج أصغر ما يمكن

- الحل -

نفرض أن العدد س حيث س > صفر

∴ معكوسه الضربي هو $\frac{1}{س}$

∴ ص = س + $\frac{1}{س}$ = س + $س^{-1}$

∴ ص' = 1 − $س^{-2}$ ، ص'' = 2$س^{-3}$

وبوضع ص' = صفر

∴ س = 1 ، س = −1 مرفوض

∴ ص''(1) = 2 > صفر قيمة صغرى

∴ العدد = 1

(4) أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تحاط بسياج طوله 120 متر

- الحل -

نفرض أن بعدي المستطيل = س ، ص

∴ محيطه = (س + ص) × 2 = 120

∴ س + ص = 60   ∴ ص = 60 − س

∴ م (المساحة) = س ص = س(60 − س)

∴ م = 60س − $س^2$

∴ م' = 60 − 2س ، م'' = −2

وبوضع م' = صفر ∴ س = ٣٠

∴ م''(٣٠) = -٢ < صفر

∴ س = ٣٠ تجعل م قيمة عظمى

∴ ص = ٣٠

∴ أكبر مساحة = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ م²

⑤ قطاع دائري محيطه ٣٠ سم ومساحته أكبر ما يمكن أوجد طول نصف قطر دائرته

- الحل -

نفرض أن طول نصف قطر القطاع = نق

وطول القوس = ل

∴ محيط القطاع = ٢نق + ل = ٣٠

∴ ل = ٣٠ - ٢نق

∵ مساحة القطاع = ½ ل نق

∴ م = ½ نق (٣٠ - ٢نق)

∴ م = ١٥ نق - نق²

∴ م' = ١٥ - ٢نق ، م'' = -٢

وبوضع م' = صفر ∴ نق = ٧,٥

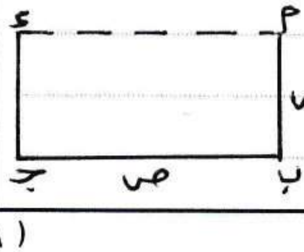
∵ م''(٧,٥) = -٢ < صفر عظمى

∴ نصف قطر دائرة القطاع = ٧,٥ سم

⑥ حقل مفتوح يحده من أحد الجوانب نهر مستقيم ، حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل للإحاطة بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ م من السياج ، وما مساحة هذه الأرض حينئذ ؟

- الحل -

نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص



∴ ٢س + ص = ٨٠٠

∴ ص = ٨٠٠ - ٢س

نفرض أن مساحة المستطيل م = س ص

∴ م = س (٨٠٠ - ٢س)

∴ م = ٨٠٠س - ٢س²

∴ م' = ٨٠٠ - ٤س ، م'' = -٤

بوضع م' = صفر ∴ س = ٢٠٠ متر

، ∵ م''(٢٠٠) = -٤ < صفر

∴ بعدى المستطيل هما ٢٠٠ متر ، ٤٠٠ متر

∴ أكبر مساحة = ٢٠٠ × ٤٠٠ = ٨٠٠٠٠ م²

⑦ من مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) للأعداد الصحيحة غير السالبة والتي مجموع مسقطيها ٥ ، أوجد الزوج المرتب الذى يجعل حاصل ضرب مربع المسقط الأول ومكعب المسقط الثانى أكبر ما يمكن

- الحل -

س + ص = ٥ ∴ ص = ٥ - س

نفرض أن

ح = حاصل ضرب مربع الأول × مكعب الثانى

= س² × ص³ = س² (٥ - س)³

∴ ح' = ٢س (٥ - س)³ + س² × ٣ (٥ - س)² × -١

∴ ح' = ٢س (٥ - س)³ - ٣س² (٥ - س)²

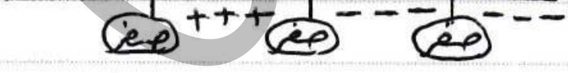
= س (٥ - س)² (٢(٥ - س) - ٣س)

= س (٥ - س)² (١٠ - ٥س)

= ٥س (٢ - س) (٥ - س)²

وبوضع ح' = صفر

∴ س = صفر ، س = ٢ ، س = ٥



∴ عند س = ٢ حاصل الضرب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٣ ∴ الزوج المرتب هو (٢ ، ٣)

⑧ أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٠ ، ٥) وتقع على المنحنى $\text{ص} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - 4$

- الحل -

نفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى $\text{ص} = \frac{1}{2}\text{س}^2 - 4$

∴ النقطة هي $(\text{س} ، \frac{1}{2}\text{س}^2 - 4)$

البعد بين النقطتين

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - 0)^2 + (\frac{1}{2}\text{س}^2 - 4 - 5)^2}$$

$$\therefore \text{ف} = \sqrt{\frac{1}{4}\text{س}^4 - 8\text{س}^2 + 81}$$

$$\therefore \text{ف}' = \frac{\text{س}^3 - 16\text{س}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\text{س}^4 - 8\text{س}^2 + 81}}$$

وبوضع ف' = صفر

∴ س = صفر ، س = ±٤

(−٤) ، (صفر) ، (٤)

− − − + + + + − − − − + + + +

صفر صفر صفر

ف أقل ما يمكن عند س = −٤ ، ٤

∴ أقرب نقط هي

(−٤ ، ٤) ، (٤ ، ٤)

⑨ أوجد أقصر بعد بين المستقيم س − ٢ص + ١٠ = صفر والمنحنى $\text{ص}^2 = 4\text{س}$

- الحل -

نفرض أن (س ، ص) هي نقطة على المنحنى

$\text{ص}^2 = 4\text{س}$ ∴ $\text{س} = \frac{1}{4}\text{ص}^2$

∴ النقطة $(\frac{1}{4}\text{ص}^2 ، \text{ص})$

∴ البعد بين النقطة والمستقيم

$$\text{ف} = \frac{|\text{س}_1 - 2\text{ص}_1 + 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|\frac{1}{4}\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 10|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \text{ف} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{4}\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 10\right|$$

∵ $\frac{1}{4}\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 10$ موجبة لجميع قيم ص

$$\therefore \text{ف} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}\text{ص}^2 - 2\text{ص} + 10\right)$$

∴ $\text{ف}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\text{ص} - 2\right)$ وبوضع ف' = ٠

∴ ص = ٤

(٤)

− − − − + + + + +

صفر

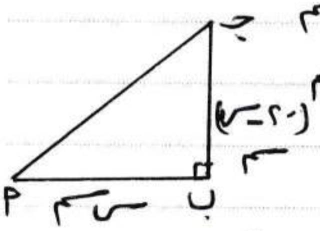
∴ البعد أقل ما يمكن عند ص = ٤

∴ أصغر بعد هو $(\text{ف})_{\text{ص}=4} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ وحدة طول

⑩ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب + ب جـ = ٢٠ سم احسب أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث

- الحل -

نفرض أن أب = س سم



∴ ب جـ = (٢٠ − س) سم

∴ المساحة م

$= \frac{1}{2}\text{س}(20 - \text{س})$

∴ $\text{م} = 10\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2$

∴ $\frac{d\text{م}}{d\text{س}} = 10 - \text{س}$ وبوضع $\frac{d\text{م}}{d\text{س}} = $ صفر

∴ س = ١٠

∵ $\frac{d^2\text{م}}{d\text{س}^2} = -1 <$ صفر

∴ س = ١٠ تجعل المساحة قيمة عظمى

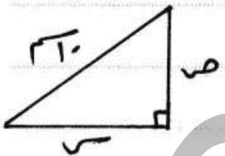
∴ $\text{م} = 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 100 = 50$ سم²

∴ أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب جـ

= ٥٠ سم²

⑪ إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوي ١٠ سم فأوجد طول كل من ضلعي القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن

- الحل -



$\because$ $س^2 + ص^2 = ١٠٠$

$\therefore$ $ص = \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$\therefore$ مساحة المثلث م

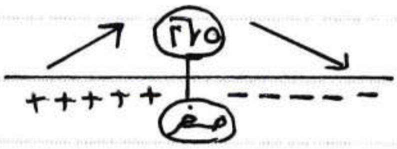
$= \frac{1}{2} س ص$

$م = \frac{1}{2} س \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$\therefore$ $م' = \frac{1}{2}\sqrt{١٠٠ - س^2} + \frac{1}{2} س \times \frac{-س}{\sqrt{١٠٠ - س^2}}$

$\therefore$ $م' = \frac{١٠٠ - س^2 - س^2}{2\sqrt{١٠٠ - س^2}} = \frac{١٠٠ - 2س^2}{2\sqrt{١٠٠ - س^2}}$

وبوضع $م' =$ صفر $\therefore$ $س = ٥\sqrt{2}$



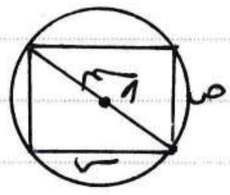
$\therefore$ عند $س = ٥\sqrt{2}$ تجعل م قيمة عظمى

$\therefore$ طولا ضلعي القائمة هما

$٥\sqrt{2}$ سم ، $٥\sqrt{2}$ سم

⑫ أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم

- الحل -



$س^2 + ص^2 = ٦٤$

$\therefore$ $ص = \sqrt{٦٤ - س^2}$

$\because$ $م = س ص$

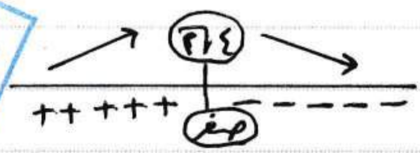
$\therefore$ $م = س \sqrt{٦٤ - س^2}$

$\therefore$ $م' = \sqrt{٦٤ - س^2} + س \times \frac{-2س}{2\sqrt{٦٤ - س^2}}$

$\therefore$ $م' = \frac{٦٤ - 2س^2}{\sqrt{٦٤ - س^2}}$

وبوضع $م' =$ صفر

$\therefore$ $س = ٤\sqrt{2}$



$\therefore$ المساحة أكبر ما يمكن عندما

$س = ٤\sqrt{2}$ ، $ص = ٤\sqrt{2}$

$\therefore$ أكبر مساحة $= ٤\sqrt{2} \times ٤\sqrt{2} = ٣٢$ سم^2

⑬ صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ سم ، قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثني الباقي ليكون صندوقاً بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات . أوجد طول ضلع المربع المقطوع الذي يجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن

- الحل -

نفرض أن طول ضلع المربع س حيث $س \in]٠ ، ١٠[$

$\therefore$ طول قاعدة الصندوق $= ٢٠ - 2س$

، ارتفاع الصندوق $= س$

$\therefore$ حجم الصندوق ح $=$

$(٢٠ - 2س)^2 \times س = ٤س(١٠ - س)^2$

$\therefore$ $ح = ٤٠٠س - ٨٠س^2 + ٤س^3$

$\therefore$ $ح' = ٤٠٠ - ١٦٠س + ١٢س^2$

$\therefore$ $ح' =$ صفر عندما $س = ١٠$ مرفوض

، $س = \frac{١٠}{٣}$

، $ح'' = -١٦٠ + ٢٤س$

$\therefore$ $ح''$ عند $س = \frac{١٠}{٣} = -٨٠$

$\therefore$ طول ضلع المربع في الجزء المقطوع $= \frac{١٠}{٣}$ سم

(١٤) متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه ٢٤٠ سم أوجد أبعاد متوازي المستطيلات عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن

- الحل -

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س

وارتفاعه = ع

∴ ٨س + ٤ع = ٢٤٠ ÷ ٤

∴ ٢س + ع = ٦٠

∴ ع = ٦٠ − ٢س ①

∵ ح = س² ع ومن ①

∴ ح = س² (٦٠ − ٢س)

∴ ح = ٦٠س² − ٢س³

∴ ح' = ١٢٠س − ٦س² وعند ح' = صفر

∴ س = صفر مرفوض ، س = ٢٠

∴ ح'' = ١٢٠ − ١٢س وعند س = ٢٠

∴ ح'' = ١٢٠ − ١٢×٢٠ = −١٢٠ < صفر

∴ توجد نهاية عظمى

∴ عند س = ٢٠ سم يكون الحجم أكبر ما يمكن ومن ① ∴ ع = ٢٠ سم

∴ أبعاد متوازي المستطيلات ذو حجم أكبر هي ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

(١٥) إذا كان مجموع طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة وارتفاعها يساوي ٣٠ سم فأوجد بدلالة ط أكبر حجم ممكن للأسطوانة

- الحل -

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم وارتفاعها = ع سم

وحجم الأسطوانة = ح سم³

∵ نق + ع = ٣٠ ∴ ع = ٣٠ − نق

∵ ح = ط نق² ع = ط نق² (٣٠ − نق)

∴ ح = ٣٠ ط نق² − ط نق³ ①

∴ دح/دنق = ٦٠ ط نق − ٣ ط نق²

∴ د²ح/دنق² = ٦٠ط − ٦ط نق

وبوضع دح/دنق = صفر

∴ ٦٠ ط نق − ٣ ط نق² = صفر

∴ نق = ٢٠ سم

∴ د²ح/دنق² عند نق = ٢٠ سم

= ٦٠ط − ٦ط × ٢٠ = −٦٠ط < ٠

وعندها يكون الحجم أكبر ما يمكن

بالتعويض في ①

∴ ح = ٣٠ط × ٤٠٠ − ط × ٨٠٠٠

∴ ح = ٤٠٠٠ ط سم³

(١٦) ثمن البيع لسلعة ما هو ١٠٠ − ٠٫٠٢س جنيهاً لكل وحدة من هذه السلعة حيث س هو العدد المنتج من هذه السلعة فإذا كانت تكلفة إنتاج س وحدة منها يساوي ٤٠س + ١٥٠٠٠ جنيهاً فما هو عدد السلع الواجب إنتاجها لجعل الربح أكبر ما يمكن

- الحل -

∵ الربح = سعر البيع − سعر التكلفة

ر = (١٠٠ − ٠٫٠٢س) × س − (٤٠س + ١٥٠٠٠)

∴ ر = −٠٫٠٢س² + ٦٠س − ١٥٠٠٠

∴ ر' = −٠٫٠٤س + ٦٠ وبوضع ر' = صفر

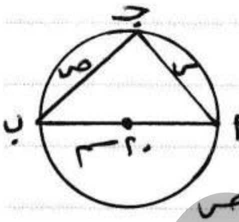
∴ س = ١٥٠٠ ∵ ر'' = −٠٫٠٤ < صفر

وهي قيمة عظمى للدالة

∴ عدد الوحدات التي يجب إنتاجها = ١٥٠٠ وحدة

(١٧) تتحرك نقطة على محيط دائرة طول قطرها ٢٠ سم أوجد بعدي النقطة عن طرفي قطر الدائرة بحيث يكون مجموع بعديها أكبر ما يمكن

- الحل -



$س^2 + ص^2 = ٤٠٠$

∴ $ص = \sqrt{٤٠٠ - س^2}$

مجموع البعدين م = س + ص

∴ $م = س + \sqrt{٤٠٠ - س^2}$

∴ $م' = ١ + \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤٠٠ - س^2}} = ١ + \frac{-س}{\sqrt{٤٠٠ - س^2}}$

وبوضع م' = صفر ∴ $س = \sqrt{٤٠٠ - س^2}$

∴ $س^2 = ٤٠٠ - س^2$ ∴ $س^2 = ٢٠٠$

∴ $س = ١٠\sqrt{٢}$

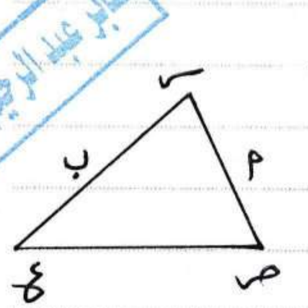
م'' عند $س = ١٠\sqrt{٢}$ < صفر (أكبر ما يمكن)

∴ البعدين $س = ١٠\sqrt{٢}$ سم ، $ص = ١٠\sqrt{٢}$ سم

(١٨) إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما الثابتان ا ، ب فأثبت أن مساحة سطحه تكون أكبر ما يمكن عندما يكون ضلعه الثالث قطراً في الدائرة المارة برؤوسه

- الحل -

نفرض أي مثلث وليكن س ص ع



∴ مساحة المثلث

م = ½ ا ب جا س

∴ $\frac{دم}{دس} = \frac{1}{2}$ ا ب جتا س وبوضع $\frac{دم}{دس}$ = صفر

∴ ½ ا ب جتا س = صفر ∴ س = ٩٠

∴ $\frac{د^2م}{دس^2} = -\frac{1}{2}$ ا ب جا س

وبوضع س = ٩٠

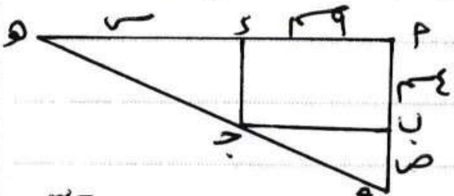
∴ $\frac{د^2م}{دس^2} = \frac{-١}{٢}$ ا ب < صفر

أي أنه عند س = ٩٠° هناك قيمة عظمى للدالة أي أن مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما تكون الزاوية بين الضلعين اللذين طولهما ا ، ب قائمة أي أن الضلع الثالث قطر في الدائرة المارة برؤوس المثلث

(١٩) ا ب جـ د مستطيل فيه ا ب = ٤ سم ، ب جـ = ٩ سم ، مستقيم يمر بالنقطة جـ ويقطع $\overleftrightarrow{اد}$ في هـ ، $\overleftrightarrow{اب}$ في و أوجد أصغر مساحة للمثلث ا هـ و

- الحل -

∆∆ د هـ جـ ، ب جـ و متشابهان



∴ $\frac{س}{٩} = \frac{٤}{ص}$

حيث س ، ص > صفر ∴ $ص = \frac{٣٦}{س}$

مساحة ∆ ا و هـ = ½ (٤ + ص)(٩ + س)

∴ $م = \frac{1}{2}(٤ + \frac{٣٦}{س})(٩ + س)$

∴ $م = ٢س + ٣٦ + \frac{١٦٢}{س}$

∴ $م' = ٢ + \frac{-١٦٢}{س^2}$ وبوضع م' = صفر

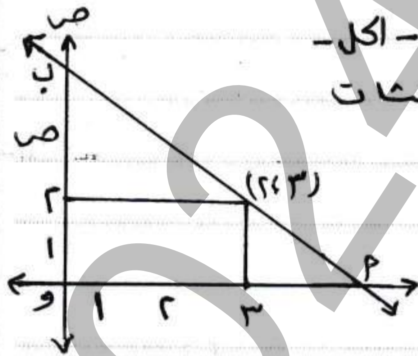
∴ $س^2 = ٨١$ ∴ س = ٩

، م'' عند س = ٩ > صفر قيمة صغرى

∴ أصغر مساحة للمثلث

$= ٢ \times ٩ + ٣٦ + \frac{١٦٢}{٩} = ٧٢$ سم²

(٢٠) في مستوى إحداثي متعامد رسم $\overleftrightarrow{أب}$ يمر بالنقطة ج (٣، ٢) ويقطع محوري الإحداثيات في النقطة أ والنقطة ب، اثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوي ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل (٠، ٠)



— الحل —

من تشابه المثلثات

$\frac{س}{٣} = \frac{٢}{ص}$

∴ $ص = \frac{٦}{س}$

مساحة Δ أ و ب $= \frac{١}{٢}(س+٣)(ص+٢)$

∴ $م = \frac{١}{٢}(س+٣)(\frac{٦}{س}+٢)$

∴ $م = ٦ + س + ٩ س^{-١}$

∴ $م' = ١ - ٩ س^{-٢}$ ∴ $م'' = ١٨ س^{-٣}$

وبوضع $م' =$ صفر ∴ $١ - \frac{٩}{س^٢} =$ صفر

∴ $س^٢ = ٩$ ∴ $س = ٣$

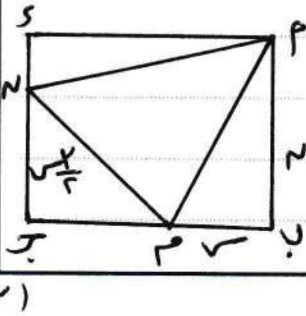
∴ $م''$ عند $س = ٣ >$ صفر أقل ما يمكن

∴ أقل مساحة $= ٦ + ٣ + \frac{٩}{٣}$

$= ١٢$ وحدة مربعة

(٢١) أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم، م ∈ $\overline{بج}$ بحيث ب م = س سم، ن ∈ $\overline{جد}$ بحيث ج ن = $\frac{٣}{٢}$ س أوجد قيمة س التي تجعل مساحة Δ أ م ن أصغر ما يمكن

— الحل —



مساحة Δ أ م ن

م = مساحة المربع أ ب ج د − [م Δ أ ب م + م Δ م ج ن + م Δ أ ن د]

∴ $م = ١٠٠ - [\frac{١}{٢} \times س \times ١٠ + \frac{١}{٢} \times (١٠ - س) \times \frac{٣}{٢} س + \frac{١}{٢} \times ١٠ (١٠ - \frac{٣}{٢} س)]$

∴ $م = \frac{٣}{٤} س^٢ - ٥ س + ٥٠$

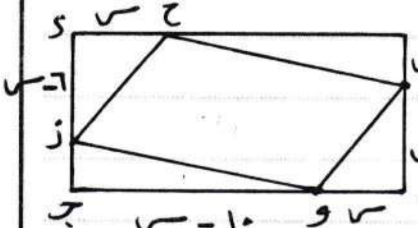
∴ $م' = \frac{٣}{٢} س - ٥$ ∴ $م' =$ صفر

فإن $س = \frac{١٠}{٣}$

، $م'' = \frac{٣}{٢} >$ صفر

∴ عند $س = \frac{١٠}{٣}$ المساحة أصغر ما يمكن

(٢٢) في الشكل المقابل:



أ ب ج د مستطيل

① اثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع مساحته $م = ٢ س^٢ - ١٦ س + ٦٠$

② أوجد أصغر قيمة ممكنة لمساحة م

— الحل —

من تشابه وتطابق ΔΔ هـ ب و ، د ز ح

ينتج أن هـ و = ح ز

ومن تطابق ΔΔ أ هـ ح ، ج ز و ينتج أن هـ ح = و ز

∴ الشكل متوازي أضلاع

مساحته م = مساحة المستطيل − ٢ × مساحة Δ ب و هـ − ٢ × مساحة Δ و ج ز

$= ٦ \times ١٠ - ٢ \times \frac{١}{٢} \times س (٦ - س) - ٢ \times \frac{١}{٢} \times س \times (١٠ - س)$

∴ $م = ٢ س^٢ - ١٦ س + ٦٠$ ①

∴ $م' = ٤ س - ١٦$ وبوضع $م' =$ صفر

∴ $س = ٤$

$م'' = ٤ >$ صفر أصغر ما يمكن

∴ أصغر قيمة ممكنة للمساحة

$= م_{س=٤} = ٢٨$ وحدة مربعة

(٢٣) تعطى شدة التيارات (بالأمبير) في دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة ن (ثانية) بالعلاقة ت = ٢جتان + ٢جان ما أقصى قيمة للتيار في هذه الدائرة

- الحل -

∵ ت = ٢جتان + ٢جان

∴ ت' = -٢جان + ٢جتان

وبوضع ت' = صفر

∴ -٢جان + ٢جتان = صفر

∴ جان = جتان ∴ ن = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

∴ ت'' = -٢جتان - ٢جان

∴ ت''$_{ن=\frac{\pi}{4}}$ = -٢$\sqrt{2}$ < صفر عظمى

∴ ت''$_{ن=\frac{5\pi}{4}}$ = ٢$\sqrt{2}$ > صفر صغرى

∴ أقصى قيمة للتيار عند ن = $\frac{\pi}{4}$

∴ ت = ٢$\sqrt{2}$ أمبير

(٢٤) ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصف دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع ، اذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متراً فاثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها

- الحل -

∵ محيط الملعب = ٤٠٠

∴ ٢ص + ٢πس = ٤٠٠

∴ ص = ٢٠٠ - πس

∴ مساحة سطح الملعب (م)

∴ م = ٢س ص + π نق²

∴ م = ٢س(٢٠٠ - πس) + π نق²

∴ م = ٤٠٠س - ٢πس² + πس²

∴ م = ٤٠٠س - πس²

∴ م' = ٤٠٠ - ٢πس وبوضع م' = صفر

∴ س = $\frac{200}{\pi}$

، م'' = -٢π < صفر عظمى

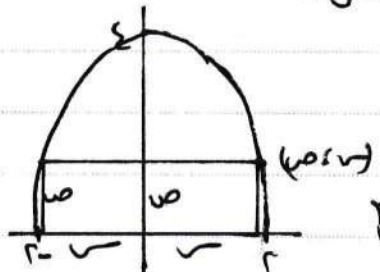
في حالة المساحة أكبر ما يمكن

∴ س = $\frac{200}{\pi}$ ، ص = ٢٠٠ - π × $\frac{200}{\pi}$ = صفر

أى أن البعد ص يتلاشى ويصبح الشكل دائرة نصف قطرها $\frac{200}{\pi}$

(٢٥) مستطيل يقع أحد أضلاعه على محور السينات ويقع الرأسان العلويان للمستطيل على المنحنى ص = ٤ - س² أوجد بعدى المستطيل حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن

- الحل -



مساحة المستطيل

م = ٢س × ص

م = ٢س(٤ - س²)

∴ م = ٨س - ٢س³

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٨ - ٦س²

وبوضع $\frac{دم}{دس}$ = صفر

∴ س = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ والسالب مرفوض

وفى هذه الحالة ص = $\frac{8}{3}$

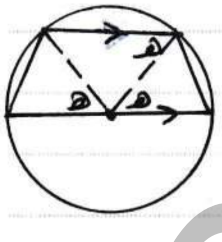
، ∵ $\frac{د^2م}{دس^2}$ = -١٢س < صفر

∴ توجد قيمة عظمى

∴ بعدى المستطيل هما $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{8}{3}$

(٢٦) أوجد مساحة أكبر شبه منحرف يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها الوحدة والذي قاعدته قطر في الدائرة

- الحل -



مساحة شبه المنحرف

م = (½ (١)² جا هـ) × ٢

+ ½ (١)² جا (١٨٠ - ٢هـ)

∴ م = جا هـ + ½ (٢ جا هـ حتا هـ)

∴ م = جا هـ (١ + حتا هـ)

∴ م′ = حتا هـ (١ + حتا هـ) + جا هـ × - جا هـ

∴ م′ = حتا هـ + حتا² هـ - جا² هـ

∴ م′ = ٢ حتا² هـ + حتا هـ - ١

وبوضع م′ = صفر ∴ حتا هـ = ½

ومنها هـ = ٦٠°

أو حتا هـ = -١ ومنها هـ = ١٨٠° مرفوضة

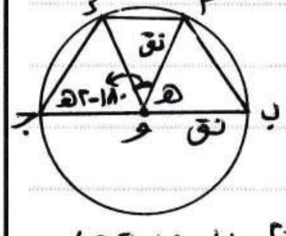
م″ = -٢ حتا هـ جا هـ - جا هـ

م″ عند هـ = ٦٠° = -٣√ < صفر عظمى

∴ أكبر مساحة م = ٣√٣ / ٤ سم²

(٢٧) رسم في نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هي قطر نصف الدائرة، عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

- الحل -



مساحة شبه المنحرف م =

م △ و ب ا + م △ ا و د + م △ د و جـ

∴ م = ½ نق² جا هـ + ½ نق² جا (١٨٠ - ٢هـ) + ½ نق² جا هـ

∴ م = نق² جا هـ + ½ نق² جا ٢هـ

∴ م′ = نق² حتا هـ + ½ نق² حتا ٢هـ × ٢

∴ م′ = نق² حتا هـ + نق² (٢ حتا² هـ - ١)

وبوضع م′ = صفر

∴ نق² (٢ حتا² هـ + حتا هـ - ١) = صفر

∴ حتا هـ = ½ ، حتا هـ = -١ مرفوض

∴ هـ = ٦٠°   م″ عند هـ = ٦٠° < صفر عظمى

ومنها زاوية القاعدة ا ب̂ جـ = (١٨٠ - ٦٠) / ٢ = ٦٠°

(٢٨) خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ م³ وقاعدته مربعة يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة يتكلف القاع ٥٠ جنيهاً لكل متر مربع، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيهاً لكل متر مربع، كما يتكلف الجوانب ٣٠ جنيهاً لكل متر مربع، أوجد أبعاد الصندوق التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن

- الحل -

نفرض أن أبعاده هي س ، س ، ص متر

حجمه = س² ص = ٢٥٢ ∴ ص = ٢٥٢ / س²

تكلفة الطلاء = ٥٠ × س² + ٢٠ × س² + ٣٠ × ٤ س ص

∴ ت = ٧٠ س² + ١٢٠ س ص

∴ ت = ٧٠ س² + ١٢٠ س × ٢٥٢ / س²

∴ ت = (٧٠ س³ + ٣٠٢٤٠) / س

∴ ت′ = (٢١٠ س² × س - ١ (٧٠ س³ + ٣٠٢٤٠)) / س²

وبوضع ت′ = صفر ∴ س = ٦

ت″ > صفر أقل ما يمكن عند س = ٦

∴ أبعاد الصندوق هي ٦ ، ٦ ، ٧ متر

(٢٩) مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي ٨٠ سم اثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي سطحي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يكون مساوياً لطول ضلع المربع

- الحل -

نفرض أن طول ضلع المربع = س

وطول نصف قطر الدائرة = نق

$\therefore ٤\text{س} + ٢\text{ط}\,\text{نق} = ٨٠$

$\therefore \text{س} = ٢٠ - \frac{١}{٢}\text{ط}\,\text{نق}$ (١)

$\because$ مجموع مساحتي الشكلين م

$\therefore \text{م} = \text{س}^٢ + \text{ط}\,\text{نق}^٢$ (٢)

من (١)، (٢)

$\therefore \text{م} = (٢٠ - \frac{١}{٢}\text{ط}\,\text{نق})^٢ + \text{ط}\,\text{نق}^٢$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دنق}} = ٢(٢٠ - \frac{١}{٢}\text{ط}\,\text{نق}) \times -\frac{١}{٢}\text{ط} + ٢\text{ط}\,\text{نق}$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دنق}} = -٢٠\text{ط} + \frac{١}{٢}\text{ط}^٢\text{نق} + ٢\text{ط}\,\text{نق}$

وبوضع $\frac{\text{دم}}{\text{دنق}} = $ صفر $\therefore \frac{١}{٢}\text{ط}\,\text{نق} + ٢\text{نق} = ٢٠$

$\therefore \text{نق}(٢ + \frac{١}{٢}\text{ط}) = ٢٠$

$\therefore \text{نق} = \frac{٢٠}{٢ + \frac{١}{٢}\text{ط}} = \frac{٤٠}{٤ + \text{ط}}$

$\because \frac{\text{د}^٢\text{م}}{\text{دنق}^٢} = \frac{١}{٢}\text{ط}^٢ + ٢\text{ط} >$ صفر

$\therefore$ المساحة قيمة صغرى عندما $\text{نق} = \frac{٤٠}{٤ + \text{ط}}$

$\therefore \text{س} = ٢٠ - \frac{٢٠\text{ط}}{٤ + \text{ط}} = \frac{٨٠ + ٢٠\text{ط} - ٢٠\text{ط}}{\text{ط} + ٤}$

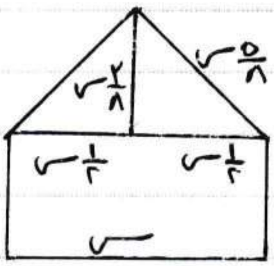
$\text{س} = \frac{٨٠}{\text{ط} + ٤}$ $\therefore \text{س} = ٢\text{نق}$

$\therefore$ عندما يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع قيمة صغرى فإن

طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة

(٣٠) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين تنطبق قاعدته على أحد بعدي المستطيل فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ومحيط النافذة ١٢٠ سم، فأوجد بعدي المستطيل التي تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن

- الحل -



$\text{المحيط} = ٢\text{ص} + \text{س} + ٢ \times \frac{٥}{٨}\text{س}$

$\therefore \text{المحيط} = ٢\text{ص} + \frac{٩}{٤}\text{س} = ١٢٠$

$\therefore \text{ص} = ٦٠ - \frac{٩}{٨}\text{س}$

مساحة النافذة $\text{م} = \text{س}\,\text{ص} + \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \frac{٣}{٨}\text{س}$

$= \text{س}\,\text{ص} + \frac{٣}{١٦}\text{س}^٢$

$\therefore \text{م} = \text{س}(٦٠ - \frac{٩}{٨}\text{س}) + \frac{٣}{١٦}\text{س}^٢$

$\therefore \text{م} = ٦٠\text{س} - \frac{١٥}{١٦}\text{س}^٢$

$\therefore \text{م}' = ٦٠ - \frac{١٥}{٨}\text{س}$ وبوضع $\text{م}' = $ صفر

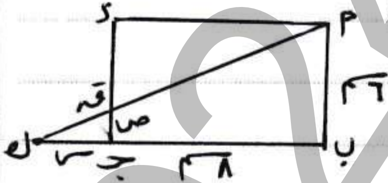
$\therefore \text{س} = ٣٢$ سم

$\therefore \text{م}'' = -\frac{١٥}{٨} <$ صفر عظمى محلية

$\therefore$ بعدي المستطيل هما ٣٢ سم، ٢٤ سم

(٣١) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم رسم $\overrightarrow{\text{أك}}$ فقطع $\overline{\text{جـ د}}$ في ق ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ في ك ، أوجد ظل الزاوية ب أ ك عندما يكون مجموع مساحتي سطحي المثلثين أ د ق ، ق جـ ك أصغر ما يمكن

- الحل -



من تشابه المثلثات $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}+٨}{٦}$

، $\text{ص} = \frac{٦\text{س}}{\text{س}+٨}$

م (مجموع مساحتي المثلثين)

$= \frac{١}{٢}\text{س ص} + \frac{١}{٢}(٦-\text{ص})(٨)$

$= \frac{١}{٢}\text{س}\left(\frac{٦\text{س}}{\text{س}+٨}\right) + \frac{١}{٢} \times ٨ \times \left(٦ - \frac{٦\text{س}}{\text{س}+٨}\right)$

$= \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}+٨} + \frac{٤(٦\text{س}+٤٨-٦\text{س})}{\text{س}+٨}$

$\therefore \text{م} = \frac{٣\text{س}^٢+١٩٢}{\text{س}+٨}$

$\therefore \text{م}' = \frac{٦\text{س}(\text{س}+٨) - ١(٣\text{س}^٢+١٩٢)}{(\text{س}+٨)^٢}$

$\therefore \text{م}' = \frac{٣\text{س}^٢+٤٨\text{س}-١٩٢}{(\text{س}+٨)^٢}$

وبوضع م' = صفر $\therefore \text{س} = -٨ + ٨\sqrt{٢}$

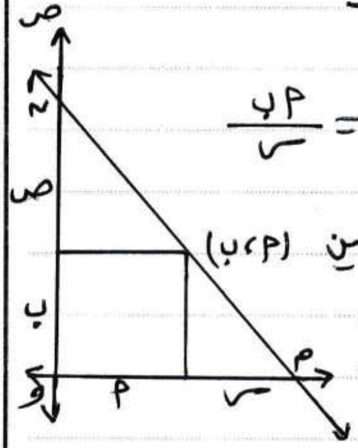
، م'' > صفر قيمة صغرى

$\therefore$ ظل الزاوية $(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{ك}) = \frac{٨ + (-٨ + ٨\sqrt{٢})}{٦}$

$= \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$

(٣٢) رسم مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (أ ، ب) فقطع محوري الإحداثيات $\overrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ص}}$ في النقطتين م ، ن اثبت أن أقل مجموع لطولي الجزئين المقطوعين $\overline{\text{و م}}$ ، $\overline{\text{و ن}}$ من محوري الإحداثيات يساوي $(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}})^٢$ حيث و نقطة الأصل

- الحل -



من تشابه المثلثات

$\frac{\text{س}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{أب}}{\text{س}}$

ومجموع الجزئين المقطوعين (أ ، ب)

$\text{ج} = \text{س} + \text{أ} + \text{ب} + \text{ص}$

$\therefore \text{ج} = \text{س} + \text{أ} + \text{ب} + \frac{\text{أب}}{\text{س}}$

$\therefore \text{ج}' = ١ - \frac{\text{أب}}{\text{س}^٢}$ وبوضع ج' = صفر

$\therefore \text{س} = \sqrt{\text{أب}}$

$\therefore \text{ج}'' = \frac{٢\text{أب}}{\text{س}^٣} >$ صفر صغرى

$\therefore$ أقل مجموع $= \text{س} + \text{ص} + \text{أ} + \text{ب}$

$= \sqrt{\text{أب}} + \frac{\text{أب}}{\sqrt{\text{أب}}} + \text{أ} + \text{ب}$

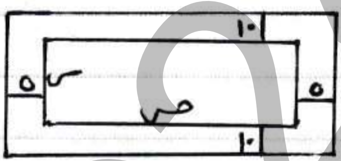
$= \text{أ} + ٢\sqrt{\text{أب}} + \text{ب}$

$= (\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}})^٢$

٣٣) يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم² من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى والسفلى ١٠ سم ، وكل من الهامشين الجانبيين ٥ سم ما أبعاد الملصق الذى يجعل مساحته أصغر ما يمكن

- الحل -

مساحة الملصق



$= س ص = ٨٠٠$

$\therefore ص = \frac{٨٠٠}{س}$

مساحة المستطيل $= (س + ٢٠)(ص + ١٠)$

$\therefore م = س ص + ١٠ س + ٢٠ ص + ٢٠٠$

$\therefore م = ٨٠٠ + ١٠ س + ٢٠ \times \frac{٨٠٠}{س} + ٢٠٠$

$\therefore م' = ١٠ - ١٦٠٠٠ س^{-٢}$

$\therefore م'' = ٣٢٠٠٠ س^{-٣}$

وبوضع $م' = صفر$ $\therefore س = ٤٠$

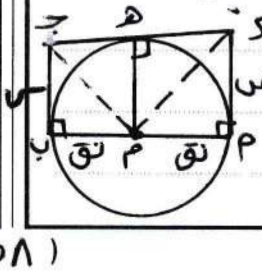
$\therefore م''_{س=٤٠} > صفر$

$\therefore س = ٤٠$ تجعل المساحة أصغر ما يمكن

$\therefore$ أبعاد المستطيل $= ٤٠ + ٢٠ = ٦٠$ سم ، $\frac{٨٠٠}{٤٠} + ١٠ = ٣٠$ سم

٣٤) $\overline{أب}$ قطر فى دائرة طول نصف قطرها نق رسم مماسان للدائرة عند كل من أ ، ب ومن النقطة هـ على الدائرة رسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين فى د ، جـ على الترتيب ، اثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب جـ د تساوى ٢ نق² وحدة مربعة

- الحل -



من تشابه ΔΔ أ م د ، جـ ب م

$\frac{ص}{نق} = \frac{نق}{س}$

$\therefore ص = \frac{نق^٢}{س}$

مساحة شبه المنحرف (م)

$م = \frac{١}{٢}(س + ص) \times ٢ نق$

$= نق س + نق ص = نق س + \frac{نق^٣}{س}$

$\therefore م' = نق - \frac{نق^٣}{س^٢}$ وبوضع $م' = صفر$

$\therefore س = نق$

$م'' = \frac{٢ نق^٣}{س^٣}$ $\therefore م''_{س=نق} > صفر$

$\therefore م$ أصغر ما يمكن

$\therefore م = \frac{١}{٢}(نق + \frac{نق^٢}{نق}) \times ٢ نق = ٢ نق^٢$

- تمارين عامة -

١) عددان مجموعهما ١٦ أوجد العددين اذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن (٨ ، ٨)

٢) مجموع ثلاثة أعداد موجبة هو ٣٦ ، وأكبر هذه الأعداد ضعف أصغرها ، أوجد الأعداد الثلاثة بحيث يكون حاصل ضربها أكبر ما يمكن (٨ ، ١٢ ، ١٦)

٣) قطعة من السلك طولها ل صنع منها مستطيل أوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن $(\frac{ل}{٤} ، \frac{ل}{٤})$

٤) قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى مساحته ١٦ سم² ، أوجد طول نصف قطر دائرة القطاع الذى يجعل محيطه أقل ما يمكن ، وما قياس زاويته عندئذ (٤ ، ٢ء)

٥) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^٢ - ص^٢ = ٨$ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٠ ، ٢) أقل ما يمكن (٣ ، ١) ، (−٣ ، ١)

⑥ قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل بعداه ٢٥سم، ٢٤سم، قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية، ثم ثنى الباقي ليكون صندوقاً بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات. أوجد طول ضلع المربع المقطوع الذي يجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن (٣,٥ سم)

⑦ متوازي مستطيلات طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كان مجموع أبعاده الثلاثة ١٨٠سم أوجد هذه الأبعاد التي تجعل حجم متوازي المستطيلات أكبر ما يمكن
(٤٠، ٨٠، ٦٠سم)

⑧ اذا كانت المساحة الكلية لأسطوانة دائرية قائمة هي ١٥٠ ط سم²، أوجد أكبر حجم لهذه الأسطوانة
(٢٥٠ ط سم³)

⑨ وجد أحد مصانع الأجهزة الكهربية أنه يكسب ٣٠ جنيهاً في كل جهاز اذا كان انتاجه في الشهر ٥٠ جهازاً فإذا زاد الانتاج عن هذا العدد فإن الربح في كل جهاز يقل ٥٠ قرشاً عن كل جهاز زيادة أوجد عدد الأجهزة التي ينتجها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن (٥٥ جهاز)

⑩ سلك طوله ٣٤ سم قسم إلى جزئين ثم ثني الجزء الأول على شكل مربع والثاني على شكل دائرة، أوجد طول كل جزء بحيث يكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن
($\frac{١٣٦}{ط+٤}$، $\frac{٣٤ط}{ط+٤}$)

⑪ نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦ أمتار أوجد طول نصف قطر الدائرة الذي يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن
($\frac{٦}{ط+٤}$)

مقدمة عن التكامل - التفاضل

تعريف: يقال أن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د اذا كانت

$\text{ت}'(\text{س}) = \text{د}(\text{س})$ لكل س في مجال د

•• بعض خواص التكامل غير المحدد:

① $\int \text{ا}\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{ا}\int \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

② $\int [\text{د}(\text{س}) \pm \text{ر}(\text{س})]\,\text{ء}\text{س}$
$= \int \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} \pm \int \text{ر}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

③ $\frac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}} \int \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{د}(\text{س})$

④ $\int \frac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}}[\text{د}(\text{س})]\,\text{ء}\text{س} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$

•• بعض التكاملات الأساسية (القياسية)

① $\int \text{ا}\,\text{ء}\text{س} = \text{ا}\text{س} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

③ $\int (\text{ا}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{(\text{ا}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)\times \text{ا}} + \text{ث}$

④ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{ا}^{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{\text{ا}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ا}} + \text{ث}$

⑥ $\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

⑦ $\int \text{هـ}^{\text{ل}\text{س}+\text{ا}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{\text{هـ}^{\text{ل}\text{س}+\text{ا}}}{\text{ل}} + \text{ث}$

•• تفاضل الدالة ص = د(س)

اذا كانت ص = د(س) دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة س والنقطة (س + Δس) تنتمي إلى مجال الدالة فإذا تغيرت س من س إلى س + Δس فإن ص تتغير من ص إلى ص + Δص حيث ص = د(س) ، ص + Δص = د(س + Δس) فيكون

$\Delta\text{ص} = \text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})$

، $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$

ومن تعريف المشتقة نعلم أن

$\text{د}'(\text{س}) = \text{نها}_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{نها}_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$

∴ عندما $\Delta\text{س} \to 0$ فإن $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \to \text{د}'(\text{س})$

أي أن $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \simeq \text{د}'(\text{س})$ عندما $\Delta\text{س} \simeq 0$ ، $\Delta\text{س} \neq$ صفر

∴ $\Delta\text{ص} \simeq \text{د}'(\text{س})\,\Delta\text{س}$

تعريف: اذا كانت ص = د(س) دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوي س وكان Δس يرمز للتغير في س حيث Δس ≠ صفر فإن

① تفاضل ص (ويرمز له بالرمز ءص) $= \text{د}'(\text{س})\,\Delta\text{س}$

② تفاضل س (ويرمز له بالرمز ءس) = Δس

أي أن $\text{ء}\text{ص} = \text{د}'(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

أو $\text{ء}\text{ص} = \text{ص}'\,\text{ء}\text{س}$

مثلاً: اذا كانت $\text{ص} = \text{س}^3$ ∴ $\text{ء}\text{ص} = 3\text{س}^2\,\text{ء}\text{س}$

واذا كانت $\text{ع} = \text{ل}^4$ ∴ $\text{ء}\text{ع} = 4\text{ل}^3\,\text{ء}\text{ل}$

ملاحظة: كان التغير الذي يطرأ على الدالة $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ عندما تتغير س من س إلى $\text{س} + \Delta\text{س}$

نوجد $\Delta\text{ص} = \text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})$

أو نستخدم تفاضل الدالة أي

$\text{دص} = \text{د}'(\text{س})\,\text{دس}$ فنحصل على قيمة تقريبية للتغير في الدالة ويصغر الفرق بين $\Delta\text{ص}$ ، دص كلما صغرت $\Delta\text{س}$

- أمثلة محلولة -

(1) أوجد كلاً مما يأتي:

(1) $\int 5\,\text{دس} = 5\text{س} + \text{ث}$

(2) $\int (\text{س} - 3)(3\text{س} + 7)\,\text{دس}$

$= \int (3\text{س}^2 + \text{س} - 21)\,\text{دس}$

$= \frac{3}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2 - 21\text{س} + \text{ث}$

(3) $\int (5 - 3\text{س})^4\,\text{دس}$

$= \frac{(5 - 3\text{س})^5}{5 \times -3} + \text{ث} = \frac{-1}{15}(5 - 3\text{س})^5 + \text{ث}$

(4) $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{3 - 5\text{س}}} = \int (3 - 5\text{س})^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$= \frac{(3 - 5\text{س})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times -5} + \text{ث}$

$= \frac{-2}{5}(3 - 5\text{س})^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

(5) $\int (\text{هـ}^{5\text{س}+4} + 2^{\text{س}} + 3)\,\text{دس}$

$= \frac{1}{5}\text{هـ}^{5\text{س}+4} + \frac{2^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2} + 3\text{س} + \text{ث}$

(6) $\int (\frac{5}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

$= 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(7) $\int 8\text{س}^6 (5 - \frac{2}{\text{س}})^6\,\text{دس}$

$= 8\int \text{س}^6 (5 - \frac{2}{\text{س}})^6\,\text{دس}$

$= 8\int (5\text{س} - 2)^6\,\text{دس}$

$= 8 \times \frac{(5\text{س} - 2)^7}{7 \times 5} + \text{ث} = \frac{8}{35}(5\text{س} - 2)^7 + \text{ث}$

(8) $\int \text{س}^3 \sqrt[3]{\frac{2}{\text{س}^3} - \frac{1}{\text{س}^2}}\,\text{دس}$

$= \int \sqrt[3]{2 - \text{س}}\,\text{دس} = \int (2 - \text{س})^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$= \frac{(2 - \text{س})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \times -1} + \text{ث} = \frac{-3}{4}(2 - \text{س})^{\frac{4}{3}} + \text{ث}$

(2) أوجد تفاضل كل مما يأتي:

(1) $\text{ص} = 3\text{س}^2 - 1$

$\therefore \text{دص} = 6\text{س}\,\text{دس}$

(2) $\text{ص} = (2\text{س} + 5)^4$

$\text{دص} = 4(2\text{س} + 5)^3 \times 2\,\text{دس}$

$= 8(2\text{س} + 5)^3\,\text{دس}$

(3) $\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س} - 3}$

$\text{دص} = 2\,\text{هـ}^{2\text{س} - 3}\,\text{دس}$

④ $ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

$\therefore دح = \frac{٨}{٣} \pi نق \, د نق$

⑤ $ص = (س + \frac{١}{س})^٣$

$\therefore دص = ٣(س + \frac{١}{س})^٢ \times (١ - \frac{١}{س^٢}) \, دس$

⑥ $ص = هـ^{س^٢ + ٣س}$

$\therefore دص = (٢س + ٣) \times هـ^{س^٢ + ٣س} \, دس$

⑦ $ع = لو_{هـ} (س^٢ + ١)$

$\therefore دع = \frac{١}{س^٢ + ١} \times ٢س \, دس$

$\therefore دع = \frac{٢س}{س^٢ + ١} \, دس$

⑧ $ع = (لو_{هـ} \frac{١٠}{س})^٢$

$\therefore دع = ٢(لو_{هـ} \frac{١٠}{س}) \times \frac{١}{\frac{١٠}{س}} \times \frac{-١٠}{س^٢} \, دس$

$\therefore دع = \frac{-٢}{س} \, لو_{هـ} \frac{١٠}{س} \, دس$

⑨ $ع = لو_{هـ} ظتا(٣س - ١)$

$\therefore دع = \frac{١}{ظتا(٣س - ١)} \times -قتا^٢(٣س - ١) \times ٣ \, دس$

$\therefore دع = \frac{-٣ \, قتا^٢(٣س - ١)}{ظتا(٣س - ١)} \, دس$

③ اذا كانت ع ، ل دوال فى المتغير س أوجد تفاضل كل مما يأتى

① $ص = ع . ل$ ② $ص = \frac{ع}{ل}$

- الحل -

① $\because ص = ع . ل$

$\therefore دص = ل \, دع + ع \, دل$

② $\because ص = \frac{ع}{ل}$

$\therefore دص = \frac{ل . دع - ع . دل}{ل^٢}$

- تمارين عامة -

① أوجد كلاً مما يأتى:

① $\int (س^٣ + ٥س + \frac{١}{س^٢}) \, دس$

② $\int \frac{١٢س^٤ + ٣}{س^٢} \, دس$

③ $\int (٢س + ٣)^٣ \, دس$

④ $\int \sqrt[٣]{٣س + ١} \, دس$ ⑤ $\int \frac{دس}{(٣س - ٤)^٦}$

⑥ $\int (٩س^٢ - ٦س + ١)^٥ \, دس$

⑦ $\int (س) \sqrt{\frac{٥}{س} - \frac{٣}{س^٤}} \, دس$

② أوجد تفاضل كل مما يأتى:

① $ص = \frac{س}{س - ١}$ ② $ص = \sqrt{(٢س + ٣)^٥}$

③ $ص = هـ^{جتا ٢س}$

③ اذا كان $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ أوجد دص بدلالة س ، ص ، دس

طرق التكامل

① التكامل بالتعويض

توجد عدة طرق لتحويل التكاملات التي ليست على الصورة القياسية إلى تكاملات على الصورة القياسية وأبسط هذه الطرق وأكثرها شيوعاً هي ما تسمى بطريقة التعويض مع الأخذ في الاعتبار ما يلي:

① اذا كان التكامل المعطى على الصورة
$\int \text{د}(\text{ر}(\text{س}))\ \text{ر}'(\text{س})\ \text{ء}\text{س}$
نستخدم التعويض $\text{ر}(\text{س}) = \text{ع}$

② إذا احتوى التكامل المعطى على الجذر النوني لدالة أي $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}(\text{س})}$ نستخدم التعويض $\text{ر}(\text{س}) = \text{ع}^{\text{ن}}$ أو $\text{ر}(\text{س}) = \text{ع}$

•• في بعض المسائل نستخدم تعويض معين مناسب لها حتى يتم تبسيط التكامل وكتابته على الصورة القياسية

ملاحظات:

① $\int (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{ء}\text{س} = \dfrac{(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

فمثلاً $\int (\text{س}^5+2)^7 \times 5\text{س}^4\ \text{ء}\text{س} = \dfrac{(\text{س}^5+2)^8}{8} + \text{ث}$

② $\int \dfrac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\ \text{ء}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$

فمثلاً $\int \dfrac{3\text{س}^2+2\text{س}}{\text{س}^3+\text{س}^2+1}\ \text{ء}\text{س}$
$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^3+\text{س}^2+1| + \text{ث}$

③ $\int \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$

فمثلاً $\int \text{هـ}^{7\text{س}^2+3} \times 14\text{س}\ \text{ء}\text{س}$
$= \text{هـ}^{7\text{س}^2+3} + \text{ث}$

④ $\int \dfrac{\text{د}'(\text{س})}{\sqrt{\text{د}(\text{س})}}\ \text{ء}\text{س} = 2\sqrt{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$

فمثلاً $\int \dfrac{2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+15}}\ \text{ء}\text{س} = 2\sqrt{\text{س}^2+15} + \text{ث}$

② التكامل بالتجزئ

نعلم أنه اذا كان ص ، ع دالتين في المتغير س وقابلتين للاشتقاق فإن

$\dfrac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}}(\text{ص}\,\text{ع}) = \text{ص}\dfrac{\text{ء}\text{ع}}{\text{ء}\text{س}} + \text{ع}\dfrac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}}$

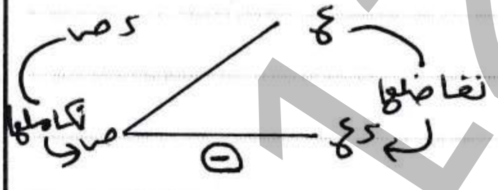
وبتكامل الطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore \int \dfrac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}}(\text{ص}\,\text{ع})\ \text{ء}\text{س} =$

$\int \text{ص}\dfrac{\text{ء}\text{ع}}{\text{ء}\text{س}}\ \text{ء}\text{س} + \int \text{ع}\dfrac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}}\ \text{ء}\text{س}$

$\therefore \text{ص}\,\text{ع} = \int \text{ص}\ \text{ء}\text{ع} + \int \text{ع}\ \text{ء}\text{ص}$

$\therefore \int \text{ع}\ \text{ء}\text{ص} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ص}\ \text{ء}\text{ع}$



أي أن

$\int$ حاصل ضرب دالتين
= الدالة الأولى × تكامل الثانية −
$\int$ تكامل الثانية × تفاضل الأولى

٥- وضح الفرق بين طريقة حل كل من التكاملات الآتية:

① $\int \frac{1}{س\ لو_هـ س}\ د س$ ② $\int \frac{لو_هـ س}{س}\ د س$

③ $\int س\ لو_هـ س\ د س$ حيث أ م

① $\int \frac{1}{س\ لو_هـ س}\ د س = \int \frac{\frac{1}{س}}{لو_هـ س}\ د س$

$= لو_هـ |لو_هـ س| + ث$

البسط تفاضل المقام

② $\int \frac{لو_هـ س}{س}\ د س = \int (لو_هـ س) \times \frac{1}{س}\ د س$

دالة مضروبة في تفاضلها

$= \frac{(لو_هـ س)^2}{2} + ث$

③ $\int س\ لو_هـ س\ د س$

$لو_هـ س \ \oplus \ س$

$\frac{1}{س} \ \ominus \ \longrightarrow \frac{1}{2} س^2$

$= \frac{1}{2} س^2\ لو_هـ س - \int \frac{1}{س} \times \frac{1}{2} س^2\ د س$

$= \frac{1}{2} س^2\ لو_هـ س - \frac{1}{2} \int س\ د س$

$= \frac{1}{2} س^2\ لو_هـ س - \frac{1}{4} س^2 + ث$

- أمثلة محلولة -

① أوجد كلاً مما يأتي:

① $\int ٣س (س^2 + ٣)^4\ د س$

- الحل -

بوضع $ع = س^2 + ٣$ ∴ $دع = ٢س\ د س$

∴ $د س = \frac{دع}{٢س}$

∴ التكامل $= \int ٣س \times ع^4 \times \frac{دع}{٢س}$

$= \int \frac{٣}{٢} ع^4\ دع = \frac{٣}{٢} \times \frac{ع^5}{٥} + ث$

$= \frac{٣}{١٠} ع^5 + ث = \frac{٣}{١٠} (س^2 + ٣)^5 + ث$

② $\int س^3 (٢س^4 - ٧)^5\ د س$

- الحل -

$= \frac{1}{٨} \int ٨ س^3 (٢س^4 - ٧)^5\ د س$

$= \frac{1}{٨} \times \frac{(٢س^4 - ٧)^6}{٦} + ث = \frac{1}{٤٨} (٢س^4 - ٧)^6 + ث$

③ $\int (س^2 - ١)(س^3 - ٣س)^5\ د س$

- الحل -

$= \frac{1}{٣} \int (٣س^2 - ٣)(س^3 - ٣س)^5\ د س$

$= \frac{1}{٣} \times \frac{(س^3 - ٣س)^6}{٦} + ث = \frac{1}{١٨} (س^3 - ٣س)^6 + ث$

④ $\int \frac{س^2}{(س^3 - ٤)^5}\ د س$

- الحل -

$= \frac{1}{٣} \int ٣س^2 (س^3 - ٤)^{-5}\ د س$

$= \frac{1}{٣} \times \frac{(س^3 - ٤)^{-4}}{-٤} + ث$

$= \frac{-1}{١٢} (س^3 - ٤)^{-4} + ث$

⑤ $\int \frac{س}{(س^2 + ٨)^3}\ د س$

- الحل -

$= \frac{1}{٢} \int ٢س (س^2 + ٨)^{-3}\ د س$

$= \frac{1}{٢} \times \frac{(س^2 + ٨)^{-2}}{-٢} + ث$

$= \frac{-1}{٤} (س^2 + ٨)^{-2} + ث$

⑥ $\int \frac{5\text{س}}{3\text{س}^2-1}\,\text{د س}$

- الحل -

$= 5\times\frac{1}{6}\int \frac{6\text{س}}{3\text{س}^2-1}\,\text{د س}$

$= \frac{5}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|3\text{س}^2-1\right| + \text{ث}$

⑦ $\int \frac{2\text{ص}^3}{\text{ص}^4+5}\,\text{د ص}$

- الحل -

$= \frac{1}{2}\int \frac{4\text{ص}^3}{\text{ص}^4+5}\,\text{د ص} = \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{ص}^4+5\right| + \text{ث}$

⑧ $\int \frac{12\text{س}+2}{3\text{س}^2+\text{س}+7}\,\text{د س}$

- الحل -

$= 2\int \frac{6\text{س}+1}{3\text{س}^2+\text{س}+7}\,\text{د س}$

$= 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|3\text{س}^2+\text{س}+7\right| + \text{ث}$

⑨ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{1+3\text{س}^2}}\,\text{د س}$

- الحل -

$= \frac{1}{6}\int \frac{6\text{س}}{\sqrt{1+3\text{س}^2}}\,\text{د س}$

$= \frac{1}{6}\times 2\sqrt{1+3\text{س}^2} + \text{ث}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{1+3\text{س}^2} + \text{ث}$

⑩ $\int \frac{2\text{س}-5}{\sqrt{(\text{س}^2-5\text{س}+7)^3}}\,\text{د س}$

- الحل -

$= \int (2\text{س}-5)(\text{س}^2-5\text{س}+7)^{-\frac{1}{2}}\,\text{د س}$

$= \frac{(\text{س}^2-5\text{س}+7)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= -2(\text{س}^2-5\text{س}+7)^{-\frac{1}{2}} + \text{ث}$

⑪ $\int \frac{1}{\text{س}^2}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^3\,\text{د س}$

- الحل -

$= -\int \frac{-1}{\text{س}^2}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^3\,\text{د س}$

$= \frac{-\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^4}{4} + \text{ث} = \frac{-1}{4}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^4 + \text{ث}$

⑫ $\int \frac{(\sqrt{\text{س}}+3)^5}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$

- الحل -

$= 2\int \frac{(\sqrt{\text{س}}+3)^5}{2\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}(\sqrt{\text{س}}+3)^5\,\text{د س}$

$= \frac{2(\sqrt{\text{س}}+3)^6}{6} + \text{ث} = \frac{1}{3}(\sqrt{\text{س}}+3)^6 + \text{ث}$

⑬ $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\,\text{د س}$

- الحل -

$= 2\int \frac{(1+\sqrt{\text{س}})^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}(1+\sqrt{\text{س}})^{\frac{1}{2}}\,\text{د س}$

$= 2\times\frac{(1+\sqrt{\text{س}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{4}{3}(1+\sqrt{\text{س}})^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

⑭ $\int (2\text{س}-3)^5(4\text{س}+1)^5(8\text{س}-5)\,\text{د س}$

- الحل -

$= \int (8\text{س}-5)(8\text{س}^2-10\text{س}-3)^5\,\text{د س}$

$= \frac{1}{2}\int (16\text{س}-10)(8\text{س}^2-10\text{س}-3)^5\,\text{د س}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{(8\text{س}^2-10\text{س}-3)^6}{6} + \text{ث}$

$= \frac{1}{12}(8\text{س}^2-10\text{س}-3)^6 + \text{ث}$

⑮ $\int س(س-٥)^{٣}\, ءس$

-الحل-

بوضع $ع = س - ٥$ ∴ $س = ع + ٥$

∴ $ءس = ءع$

∴ $\int س(س-٥)^{٣}\, ءس = \int (ع+٥) \times ع^{٣}\, ءع$

$= \int (ع^{٤} + ٥ع^{٣})\, ءع = \frac{١}{٥} ع^{٥} + \frac{٥}{٤} ع^{٤} + ث$

$= \frac{١}{٥}(س-٥)^{٥} + \frac{٥}{٤}(س-٥)^{٤} + ث$

حل آخر:

$\int س(س-٥)^{٣}\, ءس = \int (س-٥+٥)(س-٥)^{٣}\, ءس$

$= \int [(س-٥)^{٤} + ٥(س-٥)^{٣}]\, ءس$

$= \frac{١}{٥}(س-٥)^{٥} + \frac{٥}{٤}(س-٥)^{٤} + ث$

⑯ $\int س\sqrt{س+٤}\, ءس$

-الحل-

بوضع $ع = س + ٤$ ∴ $س = ع - ٤$

∴ $ءس = ءع$

∴ $\int س\sqrt{س+٤}\, ءس = \int (ع-٤)\sqrt{ع}\, ءع$

$= \int (ع^{\frac{٣}{٢}} - ٤ع^{\frac{١}{٢}})\, ءع = \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٥}(س+٤)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣}(س+٤)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑰ $\int س^{٢}\sqrt{س+٢}\, ءس$

-الحل-

بوضع $ع = \sqrt{س+٢}$ ∴ $س = ع^{٢} - ٢$

∴ $ءس = ٢ع\, ءع$

∴ $\int س^{٢}\sqrt{س+٢}\, ءس$

$= \int (ع^{٢}-٢)^{٢} \times ع \times ٢ع\, ءع$

$= \int ٢ع^{٢}(ع^{٤} - ٤ع^{٢} + ٤)\, ءع$

$= \int (٢ع^{٦} - ٨ع^{٤} + ٨ع^{٢})\, ءع$

$= \frac{٢}{٧} ع^{٧} - \frac{٨}{٥} ع^{٥} + \frac{٨}{٣} ع^{٣} + ث$

$= \frac{٢}{٧}(س+٢)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٨}{٥}(س+٢)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٨}{٣}(س+٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑱ $\int س^{٥}(س^{٢}+٢)^{٤}\, ءس$

-الحل-

بوضع $ع = س^{٢} + ٢$ ∴ $س^{٢} = ع - ٢$

∴ $٢س\, ءس = ءع$

∴ $\int س^{٥}(س^{٢}+٢)^{٤}\, ءس$

$= \int س^{٥}(س^{٢}+٢)^{٤} \times \frac{ءع}{٢س}$

$= \frac{١}{٢}\int س^{٤}(س^{٢}+٢)^{٤}\, ءع$

$= \frac{١}{٢}\int (ع-٢)^{٢} \times ع^{٤}\, ءع$

$= \frac{١}{٢}\int (ع^{٢} - ٤ع + ٤) \times ع^{٤}\, ءع$

$= \frac{١}{٢}\int (ع^{٦} - ٤ع^{٥} + ٤ع^{٤})\, ءع$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٧} ع^{٧} - \frac{٢}{٣} ع^{٦} + \frac{٤}{٥} ع^{٥}\right] + ث$

$= \frac{١}{١٤} ع^{٧} - \frac{١}{٣} ع^{٦} + \frac{٢}{٥} ع^{٥} + ث$

$= \frac{١}{١٤}(س^{٢}+٢)^{٧} - \frac{١}{٣}(س^{٢}+٢)^{٦} + \frac{٢}{٥}(س^{٢}+٢)^{٥} + ث$

(١٩) $\int \frac{س}{س+١} \, ءس$

- الحل -

بوضع $ع = س+١ \quad \therefore س = ع-١$

$\therefore ءس = ءع$

$\therefore \int \frac{س}{س+١} \, ءس = \int \frac{ع-١}{ع} \, ءع$

$= \int (١ - \frac{١}{ع}) \, ءع = ع - لو_{هـ}|ع| + ث$

$= س+١ - لو_{هـ}|س+١| + ث$

(٢٠) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س+٢}} \, ءس$

- الحل -

بوضع $٢ع = ٢س+٢ \quad \therefore س = ع-١$

$\therefore ءس = ءع$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{٢س+٢}} \, ءس = \int \frac{ع-١}{\sqrt{٢ع}} \, ءع$

$= \int (\frac{١}{\sqrt{٢}} ع^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} ع^{-\frac{١}{٢}}) \, ءع$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \frac{ع^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٣} (س+١)^{\frac{٣}{٢}} - \sqrt{٢} (س+١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٢١) $\int \frac{(س+٣)^{٣} - ٢٧}{س} \, ءس$

- الحل -

بوضع $ع = س+٣ \quad \therefore س = ع-٣$

$\therefore ءس = ءع$

$\therefore \int \frac{(س+٣)^{٣} - ٢٧}{س} \, ءس = \int \frac{ع^{٣} - ٢٧}{ع-٣} \, ءع$

$= \int (ع^{٢} + ٣ع + ٩) \, ءع = \frac{١}{٣} ع^{٣} + \frac{٣}{٢} ع^{٢} + ٩ع + ث$

$= \frac{١}{٣} (س+٣)^{٣} + \frac{٣}{٢} (س+٣)^{٢} + ٩(س+٣) + ث$

(٢٢) $\int س \, هـ^{س} \, ءس$

- الحل -

$س$	$هـ^{س}$
١	$هـ^{س}$

$= س هـ^{س} - \int هـ^{س} \, ءس$

$= س هـ^{س} - هـ^{س} + ث$

(٢٣) $\int ٤س \, هـ^{٢س} \, ءس$

- الحل -

$٤س$	$هـ^{٢س}$
٤	$\frac{١}{٢} هـ^{٢س}$

$= ٢س هـ^{٢س} - \int ٢ هـ^{٢س} \, ءس$

$= ٢س هـ^{٢س} - هـ^{٢س} + ث$

(٢٤) $\int \frac{س}{هـ^{٢س}} \, ءس$

- الحل -

$= \int س \, هـ^{-٢س} \, ءس$

$س$	$هـ^{-٢س}$
١	$\frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}$

$= \frac{-١}{٢} س هـ^{-٢س} - \int \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س} \, ءس$

$= \frac{-١}{٢} س هـ^{-٢س} - \frac{١}{٤} هـ^{-٢س} + ث$

(٢٥) $\int \frac{٣س+٥}{هـ^{٢س}} \, ءس$

- الحل -

$= \int (٣س+٥) \, هـ^{-٢س} \, ءس$

$٣س+٥$	$هـ^{-٢س}$
٣	$\frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}$

$= \frac{-١}{٢} (٣س+٥) هـ^{-٢س} + \int \frac{٣}{٢} هـ^{-٢س} \, ءس$

$= \frac{-١}{٢} (٣س+٥) هـ^{-٢س} - \frac{٣}{٤} هـ^{-٢س} + ث$

(٢٦) $\int \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \ \text{ء س}$

- الحل -

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$	١
$\frac{1}{\text{س}}$	س

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{ء س}$

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} + \text{ث}$

(٢٧) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \ \text{ء س}$

- الحل -

$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$	١
$\frac{1}{\text{س}+1}$	س

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int \frac{\text{س}}{\text{س}+1} \ \text{ء س}$

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int \frac{\text{س}+1-1}{\text{س}+1} \ \text{ء س}$

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \int \left(1 - \frac{1}{\text{س}+1}\right) \text{ء س}$

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - (\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1|) + \text{ث}$

$= \text{س} \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + \text{ث}$

(٢٨) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2 \ \text{ء س}$

- الحل -

$= 2 \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \ \text{ء س}$ وتكمل الحل كما في مثال رقم (٢٦)

(٢٩) $\int \text{س}^3 \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \ \text{ء س}$

- الحل -

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$	س^3
$\frac{1}{\text{س}}$	$\frac{1}{4}\text{س}^4$

$= \frac{1}{4}\text{س}^4 \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\int \text{س}^3 \ \text{ء س}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^4 \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{16}\text{س}^4 + \text{ث}$

(٣٠) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(5\text{س}) \ \frac{\text{ء س}}{\text{س}}$

- الحل -

$= \int \frac{1}{\text{س}} \ \text{لو}_{\text{هـ}}5\text{س} \ \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}5\text{س})^2 + \text{ث}$

(٣١) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \frac{\text{ء س}}{\text{س}^2}$

- الحل -

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$	س^{-2}
$\frac{1}{\text{س}}$	$-\text{س}^{-1}$

$= -\text{س}^{-1} \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{1}{\text{س}^2} \ \text{ء س}$

$= \frac{-1}{\text{س}} \ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}^{-1} + \text{ث}$

(٣٢) $\int 2\text{س} \ \text{هـ}^{3\text{س}^2+1} \ \text{ء س}$

- الحل -

$= \frac{1}{3}\int 6\text{س} \ \text{هـ}^{3\text{س}^2+1} \ \text{ء س}$

$= \frac{1}{3} \ \text{هـ}^{3\text{س}^2+1} + \text{ث}$

(٣٣) $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+3} \ \text{ء س}$

- الحل -

$= \frac{1}{2}\int (2 \ \text{هـ}^{2\text{س}}) \times \frac{1}{\text{هـ}^{2\text{س}}+3} \ \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{2\text{س}}+3| + \text{ث}$

$= \frac{1}{2} \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{2\text{س}}+3) + \text{ث}$

(٣٤) $\int \text{س}^2 \ \text{هـ}^{\text{س}} \ \text{ء س}$

- الحل -

تفاضل		تكامل
س^2	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
2س	−	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٢	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر		$\text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{س}^2 \ \text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{س} \ \text{هـ}^{\text{س}} + 2 \ \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

(٣٥) $\int س^{2}\, هـ^{-3س}\, ءس$

- الحل -

تفاضل	تكامل
$س^{2}$ (+)	$هـ^{-3س}$
$2س$ (−)	$\frac{-1}{3}هـ^{-3س}$
2 (+)	$\frac{1}{9}هـ^{-3س}$
صفر	$\frac{-1}{27}هـ^{-3س}$

$= \frac{-1}{3}س^{2}هـ^{-3س} - \frac{2}{9}س\,هـ^{-3س} - \frac{2}{27}هـ^{-3س} + ث$

(٣٦) $\int س^{3}\, هـ^{س^{2}}\, ءس$

- الحل -

$= \int س^{2} . س\, هـ^{س^{2}}\, ءس$

$س^{2}$	$س\,هـ^{س^{2}}$
$2س$	$\frac{1}{2}هـ^{س^{2}}$

$= \frac{1}{2}س^{2}هـ^{س^{2}} - \frac{1}{2}\int 2س\,هـ^{س^{2}}\, ءس$

$= \frac{1}{2}س^{2}هـ^{س^{2}} - \frac{1}{2}\int 2س\,هـ^{س^{2}}\, ءس$ مكررة

$= \frac{1}{2}س^{2}هـ^{س^{2}} - \frac{1}{2}هـ^{س^{2}} + ث$

(٣٧) $\int (س+1)^{2}\, هـ^{2س}\, ءس$

- الحل -

تفاضل	تكامل
$(س+1)^{2}$ (+)	$هـ^{2س}$
$2(س+1)$ (−)	$\frac{1}{2}هـ^{2س}$
2 (+)	$\frac{1}{4}هـ^{2س}$
صفر	$\frac{1}{8}هـ^{2س}$

$= \frac{1}{2}(س+1)^{2}هـ^{2س} - \frac{1}{2}(س+1)هـ^{2س} + \frac{1}{4}هـ^{2س} + ث$

(٣٨) $\int \frac{س\,هـ^{س}}{(س+1)^{2}}\, ءس$

- الحل -

$س\,هـ^{س}$	$(س+1)^{-2}$
$س\,هـ^{س} + هـ^{س}$	$-(س+1)^{-1}$

$= هـ^{س}(1+س)$

$= -(س+1)^{-1} \times س\,هـ^{س} + \int هـ^{س}\, ءس$

$= -س(س+1)^{-1}هـ^{س} + هـ^{س} + ث$

(٣٩) $\int (لو_{هـ} س)^{2}\, ءس$

- الحل -

$(لو_{هـ} س)^{2}$	1
$2(لو_{هـ} س) \times \frac{1}{س}$	$س$

$= س(لو_{هـ} س)^{2} - \int 2\, لو_{هـ} س\, ءس$

$لو_{هـ} س$	2
$\frac{1}{س}$	$2س$

$= س(لو_{هـ} س)^{2} - [2س\, لو_{هـ} س - \int 2\, ءس]$

$= س(لو_{هـ} س)^{2} - 2س\, لو_{هـ} س + 2س + ث$

(٢) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة م(٢، ٣) وميل العمودي عليه عند أي نقطة (س، ص) هو ٣ − س

- الحل -

$\because$ ميل العمودي $= 3 - س$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{-1}{3-س} = \frac{1}{س-3}$

وبالتكامل

$\therefore ص = \int \frac{1}{س-3}\, ءس = لو_{هـ}|س-3| + ث$

$\because$ م(٢، ٣) $\in$ للمنحنى $\therefore$ تحققه

$\therefore 3 = لو_{هـ}|2-3| + ث$

$\therefore 3 = لو_{هـ} 1 + ث \quad \therefore ث = 3$

$لو_{هـ} 1 = صفر$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$ص = لو_{هـ}|س-3| + 3$

③ اذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة (س، ص) واقعة عليه هو $\text{س}\sqrt{\text{س}+1}$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $(0 ، \frac{11}{15})$

- الحل -

$\because$ ميل المماس $= \text{س}\sqrt{\text{س}+1}$

$\therefore \text{ص} = \int \text{س}\sqrt{\text{س}+1}\ \text{دس}$

$\therefore \text{ص} = \int (\text{س}+1-1)(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\therefore \text{ص} = \int (\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} - (\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\therefore \text{ص} = \frac{2}{5}(\text{س}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$\because$ النقطة $(0 ، \frac{11}{15}) \in$ للمنحنى

$\therefore \frac{11}{15} = \frac{2}{5}(0+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = 1$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$\text{ص} = \frac{2}{5}(\text{س}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + 1$

④ اذا كان ميل العمودي لمنحنى عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي $\frac{-2\text{ص}}{\text{س}}$ فأوجد معادلة هذا المنحنى اذا كان يقطع من محور الصادات الموجب جزءاً طوله ٣ وحدات

- الحل -

$\because$ ميل العمودي $= \frac{-2\text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{\text{س}}{2\text{ص}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{2\text{ص}}$

$\therefore 2\text{ص دص} = \text{س دس}$ وبالتكامل

$\therefore \int 2\text{ص دص} = \int \text{س دس}$

$\therefore \text{ص}^2 = \frac{1}{2}\text{س}^2 + \text{ث}$

$\because (0 ، 3) \in$ للمنحنى

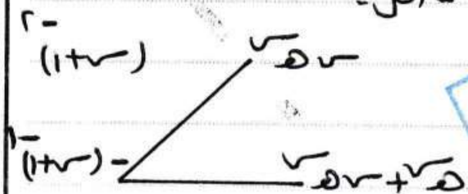
$\therefore 9 = \frac{1}{2}(0)^2 + \text{ث} \qquad \therefore \text{ث} = 9$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$\text{ص}^2 = \frac{1}{2}\text{س}^2 + 9$

⑤ اذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}$ فأوجد معادلة المنحنى اذا كان يمر بالنقطة (1 ، 2هـ)

- الحل -



$\because$ ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}$

$\therefore \text{ص} = \int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\ \text{دس}$

$\therefore \text{ص} = \frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} - \int \frac{(\text{س}+1)\text{هـ}^{\text{س}}}{-(\text{س}+1)}\ \text{دس}$

$\therefore \text{ص} = \frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة (1 ، 2هـ)

$\therefore 2\text{هـ} = \frac{-\text{هـ}}{2} + \text{هـ} + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = \frac{3}{2}\text{هـ}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$\text{ص} = \frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{3}{2}\text{هـ}$

⑥ إناء مملوء بسائل يتسرب من ثقب صغير لقاع الإناء، فإذا كان حجم السائل في الإناء يتغير بمعدل (٤ن − ٤٠) $سم^٣$/ث حيث ن تمثل الزمن بالثانية وكان حجم السائل بعد ٣٠ ث من بدء التسرب ٩٨٠ $سم^٣$ أوجد سعة الإناء وبين بعد كم ثانية يصبح الإناء فارغاً

- الحل -

∵ $\frac{دح}{دن}$ = ٤ن − ٤٠

∴ ح = ٢$ن^٢$ − ٤٠ن + ث

∵ ح = ٩٨٠ عندما ن = ٣٠

∴ ٩٨٠ = ٢ × $(٣٠)^٢$ − ٤٠ × ٣٠ + ث

∴ ث = ٢٠٠٠

∴ ح = ٢$ن^٢$ − ٤٠ن + ٢٠٠٠

وعندما ن = صفر نحصل على السعة

∴ سعة الإناء = ٢٠٠٠ $سم^٣$

ويصبح الإناء فارغاً عندما يكون حجم السائل = صفر

∴ ٢$ن^٢$ − ٤٠ن + ٢٠٠٠ = صفر

∴ ن = ١٠٠ ثانية

⑦ أوجد معادلة المنحنى ص = د(س) إذا كان $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = م س + ب حيث م، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة (٠، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى

- الحل -

∵ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = م س + ب

∵ للمنحنى نقطة انقلاب عند س = ٠

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = صفر ∴ صفر = صفر + ب

∴ ب = صفر

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ∫ م س دس = $\frac{م}{٢}$ $س^٢$ + $ث_١$

∵ لها قيمة صغرى محلية عند (١، ٠)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = صفر عند س = ١

∴ صفر = $\frac{م}{٢}$ + $ث_١$

ومنها م = −٢ $ث_١$ ①

∴ ص = ∫($\frac{م}{٢}$ $س^٢$ + $ث_١$) دس

∴ ص = $\frac{م}{٦}$ $س^٣$ + $ث_١$ س + $ث_٢$

∵ المنحنى يمر بالنقطتين (٠، ٢)، (١، ٠)

∴ ٢ = $\frac{م}{٦}$ (٠) + $ث_١$ (٠) + $ث_٢$

∴ $ث_٢$ = ٢

، صفر = $\frac{م}{٦}$ (١) + $ث_١$ (١) + ٢ ×٦

∴ م + ٦ $ث_١$ = −١٢ ②

بالتعويض من ① في ②

∴ −٢ $ث_١$ + ٦ $ث_١$ = −١٢

∴ $ث_١$ = −٣ ∴ م = ٦

∴ معادلة المنحنى هي

ص = $س^٣$ − ٣س + ٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٣$س^٢$ − ٣ وبوضع $\frac{دص}{دس}$ = صفر

∴ س = ±١

∵ عند س = ١ توجد قيمة صغرى

، ∵ $\left(\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right)_{س=-١}$ < صفر

∴ عندها قيمة عظمى محلية

∴ القيمة العظمى المحلية هي

$(ص)_{س=-١}$ = ٤

⑧ أوجد معادلة المنحنى $ص = د(س)$
اذا علم أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{٢}{س^٣}$ وأن معادلة
المماس للمنحنى عند النقطة $(٢ ، \frac{٥}{٢})$
الواقعة عليه هي $٣س - ٤ص + ٤ = ٠$

- الحل -

$\because \frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{٢}{س^٣}$ وبتكامل الطرفين

$\therefore \frac{دص}{دس} = \int ٢ س^{-٣} \, دس$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^2} + ث_١$

$\because$ ميل المماس عند $(٢ ، \frac{٥}{٢}) = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{٣}{٤} = \frac{-١}{٤} + ث_١ \quad \therefore ث_١ = ١$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^2} + ١$ وبتكامل الطرفين

$\therefore ص = \frac{١}{س} + س + ث_٢$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة $(٢ ، \frac{٥}{٢})$

$\therefore \frac{٥}{٢} = \frac{١}{٢} + ٢ + ث_٢ \quad \therefore ث_٢ =$ صفر

$\therefore$ معادلة المنحنى هي

$ص = \frac{١}{س} + س$

⑨ اذا كان ميل المماس للمنحنى
$ص = د(س)$ عند أي نقطة عليه
يساوي $٦س^2 + ب س$ وكان $د(٠) = ٥$
، $د(٢) = -٣$ ، أوجد قيمة الثابت ب
ثم ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

- الحل -

$\because$ ميل المماس $\frac{دص}{دس} = ٦س^2 + ب س$

$\therefore ص = \int (٦س^2 + ب س) \, دس$

$\therefore ص = ٢س^٣ + \frac{ب}{٢} س^2 + ث$

، $\because د(٠) = ٥ \quad \therefore ٥ = ٠ + ٠ + ث$

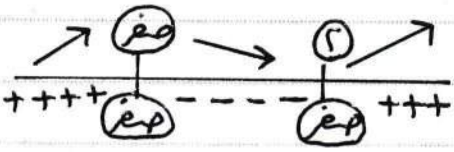
$\therefore ث = ٥$

، $\because د(٢) = -٣$

$\therefore -٣ = ١٦ + ٢ب + ٥ \quad \therefore ب = -١٢$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٦س^2 - ١٢س$ وبوضع $\frac{دص}{دس} = ٠$

$\therefore س =$ صفر ، $س = ٢$



، $\because \frac{د^2ص}{دس^2} = ١٢س - ١٢$

$\therefore \left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)_{س = صفر} = -١٢$ لها قيمة عظمى

، $\left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)_{س = ٢} = ١٢$ لها قيمة صغرى

وبوضع $\frac{د^2ص}{دس^2} =$ صفر $\therefore س = ١$

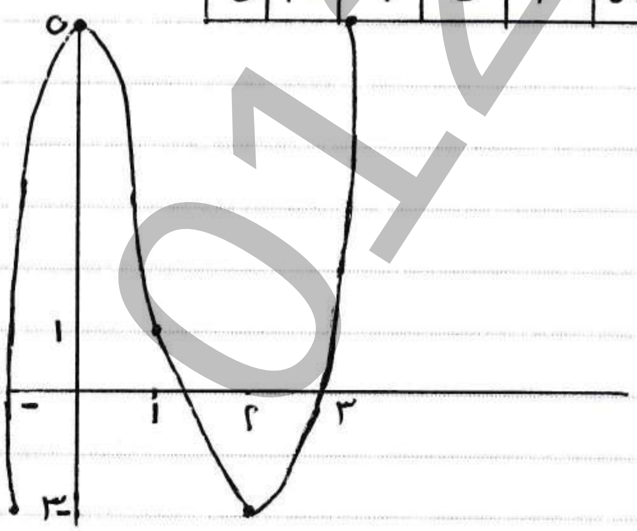
، $\because ص = ٢س^٣ - ٦س^2 + ٥$

نعين نقط مساعدة عند $س =$

عند $س = ٣ \quad \therefore ص = ٥$

وعند $س = -١ \quad \therefore ص = -٣$

س	−١	٠	١	٢	٣
ص	−٣	٥	١	−٣	٥



تمارين عامة

① أوجد كلاً مما يأتي:

(١) $\int (س^{٢} - ٤س + ١)^{-٣}(س - ٢)\, ءس$

(٢) $\int \frac{س^{٤}}{(س^{٥} + ١)^{٧}}\, ءس$

(٣) $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt{٢س^{٤} + ٣}}\, ءس$

(٤) $\int \sqrt{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ٤}\,(س - ١)^{٢}\, ءس$

(٥) $\int س\,(٢س + ٣)^{٤}\, ءس$

(٦) $\int (س^{٢} - ١)\sqrt{س + ١}\, ءس$

(٧) $\int س^{٣}(س^{٢} - ١)^{٥}\, ءس$

(٨) $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س - ١}}\, ءس$

(٩) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س - ١}}\, ءس$

(١٠) $\int س\, هـ^{-س}\, ءس$

(١١) $\int \frac{١}{س\, لو_{هـ} س}\, ءس$

(١٢) $\int (لو_{هـ} س)^{٣} \frac{ءس}{س}$

(١٣) $\int س^{٢}\, لو_{هـ} س\, ءس$

(١٤) $\int س^{٢}\, هـ^{س^{٣}}\, ءس$

(١٥) $\int (٣ - س)\, هـ^{٦س - س^{٢}}\, ءس$

(١٦) $\int ٩س^{٢}\, هـ^{-س^{٣}}\, ءس$

(١٧) $\int س^{٢}\, هـ^{س + ٢}\, ءس$

② أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠ ، ١) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى $س\sqrt{س^{٢} + ١}$

$\left(ص = \frac{١}{٣}(س^{٢} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٣}\right)$

③ اذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أى نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص}$ فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٢)

$(ص^{٢} = س^{٢} + ٣)$

④ اذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = د(س) يساوى $٣س^{٢} - ٦س - ٩$ والقيمة العظمى المحلية للدالة د هى ١٧ أوجد القيمة الصغرى المحلية للدالة د

(-١٥)

⑤ اذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو ٦س − ٢ وكان ميل المماس له عند النقطة (٣ ، ١) الواقعة عليه مساوياً ٢ فأوجد معادلة هذا المنحنى

$(ص = س^{٣} - س^{٢} - ١٩س + ٤٠)$

تكامل الدوال المثلثية

درسنا فيما سبق اشتقاق الدوال المثلثية وكانت كالآتي:

① $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{جا}\,\text{س} = \text{جتا}\,\text{س}$

② $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{جتا}\,\text{س} = -\text{جا}\,\text{س}$

③ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{ظا}\,\text{س} = \text{قا}^2\,\text{س}$

④ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{ظتا}\,\text{س} = -\text{قتا}^2\,\text{س}$

⑤ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{قا}\,\text{س} = \text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}$

⑥ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{قتا}\,\text{س} = -\text{قتا}\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س}$

وباستخدام تعريف المشتقة العكسية على استنتاج قواعد تكامل بعض الدوال المثلثية كما يلي:

① $\int \text{جا}\,\text{س}\,\text{ءس} = -\text{جتا}\,\text{س} + \text{ث}$

② $\int \text{جتا}\,\text{س}\,\text{ءس} = \text{جا}\,\text{س} + \text{ث}$

③ $\int \text{قا}^2\,\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظا}\,\text{س} + \text{ث}$

④ $\int \text{قتا}^2\,\text{س}\,\text{ءس} = -\text{ظتا}\,\text{س} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}\,\text{ءس} = \text{قا}\,\text{س} + \text{ث}$

⑥ $\int \text{قتا}\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س}\,\text{ءس} = -\text{قتا}\,\text{س} + \text{ث}$

نتائج:

① $\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

② $\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

③ $\int \text{قا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

④ $\int \text{قتا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-1}{\text{أ}}\,\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

⑤ $\int \text{قا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{قا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

⑥ $\int \text{قتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}$

$= \frac{-1}{\text{أ}}\,\text{قتا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{ث}$

∴ تذكر أن:

① $\int (\text{د}(\text{س}))^{ن}\,\text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{(\text{د}(\text{س}))^{ن+1}}{ن+1} + \text{ث}$

② $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$

③ $\int \text{ظا}\,\text{س}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{جتا}\,\text{س}}\,\text{ءس}$

$= -\int \frac{-\text{جا}\,\text{س}}{\text{جتا}\,\text{س}}\,\text{ءس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\,\text{س}| + \text{ث}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا}\,\text{س}| + \text{ث}$ (البسط مشتقة المقام)

④ $\int \text{ظتا}\,\text{س}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}\,\text{س}| + \text{ث}$

⑤ $\int \text{قا}\,\text{س}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قا}\,\text{س}(\text{قا}\,\text{س}+\text{ظا}\,\text{س})}{\text{قا}\,\text{س}+\text{ظا}\,\text{س}}\,\text{ءس}$

وذلك بالضرب بسطاً ومقاماً في $\text{قا}\,\text{س}+\text{ظا}\,\text{س}$

$= \int \frac{\text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س}+\text{قا}^2\,\text{س}}{\text{قا}\,\text{س}+\text{ظا}\,\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا}\,\text{س}+\text{ظا}\,\text{س}| + \text{ث}$

⑥ ∫ قتاس دس = ∫ $\frac{\text{قتاس (قتاس + ظتاس)}}{\text{قتاس + ظتاس}}$ دس

وذلك بالضرب بسطاً ومقاماً في قتاس + ظتاس

= ∫ $\frac{\text{قتاس ظتاس + قتا}^2\text{س}}{\text{قتاس + ظتاس}}$ دس

= − ∫ $\frac{\text{− قتاس ظتاس − قتا}^2\text{س}}{\text{قتاس + ظتاس}}$ دس

= − لوهـ | قتاس + ظتاس | + ث

⑦ قوانين هامة جداً:

جا²س + جتا²س = ١

١ + ظا²س = قا²س

١ + ظتا²س = قتا²س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

جتا٢س = { جتا²س − جا²س ، ٢ جتا²س − ١ ، ١ − ٢ جا²س }

ومنها

جتا²س = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جتا٢س

جا²س = $\frac{1}{2}$ − $\frac{1}{2}$ جتا٢س

- أمثلة محلولة -

① أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

① ∫ جا(٢س − ٥) دس = $\frac{-1}{2}$ جتا(٢س − ٥) + ث

② ∫ (جاس + جتاس) دس = − جتاس + جاس + ث

③ ∫ قا²(٥ − ٣س) دس = $\frac{-1}{3}$ ظا(٥ − ٣س) + ث

④ ∫ قتا²(٢س + ٣) دس = $\frac{-1}{2}$ ظتا(٢س + ٣) + ث

⑤ ∫ (جا٣س − قا²٢س) دس = $\frac{-1}{3}$ جتا٣س − $\frac{1}{2}$ ظا٢س + ث

⑥ ∫ قا٢س ظا٢س دس = $\frac{1}{2}$ قا٢س + ث

⑦ ∫ قاس (قاس − ظاس) دس

= ∫ (قا²س − قاس ظاس) دس

= ظاس − قاس + ث

⑧ ∫ ٦ قا٢س (ظا٢س + جتا²٢س) دس

= ∫ (٦ قا٢س ظا٢س + ٦ جتا٢س) دس

= ٦ × $\frac{1}{2}$ قا٢س + ٦ × $\frac{1}{2}$ جا٢س + ث

= ٣ قا٢س + ٣ جا٢س + ث

⑨ ∫ (جتا²س − جا²س) دس

= ∫ جتا٢س دس = $\frac{1}{2}$ جا٢س + ث

⑩ ∫ جا٣س جتا٣س دس

= $\frac{1}{2}$ ∫ ٢ جا٣س جتا٣س دس

= $\frac{1}{2}$ ∫ جا٦س دس

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{-1}{6}$ جتا٦س + ث

= $\frac{-1}{12}$ جتا٦س + ث

(١١) $\int (1+\text{ظا}^2\text{س})\,\text{حتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{حتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

(١٢) $\int (\text{جاس} - \text{حتاس})^2\ \text{ءس}$

$= \int (\text{جا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س} - 2\,\text{جاس}\,\text{حتاس})\ \text{ءس}$

$= \int (1 - \text{جا}2\text{س})\ \text{ءس}$

$= \text{س} + \frac{1}{2}\,\text{حتا}2\text{س} + \text{ث}$

(١٣) $\int [1 + \text{ظتا}^2(3\text{س}-1)]\ \text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^2(3\text{س}-1)\ \text{ءس}$

$= \frac{-1}{3}\,\text{ظتا}(3\text{س}-1) + \text{ث}$

(١٤) $\int \frac{4}{\text{جا}^2 5\text{س}}\ \text{ءس} = \int 4\,\text{قتا}^2 5\text{س}\ \text{ءس}$

$= \frac{-4}{5}\,\text{ظتا}\,5\text{س} + \text{ث}$

(١٥) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{حتا}2\text{س}\ \text{ظتا}2\text{س}}$

$= \int \text{قا}2\text{س}\ \text{ظا}2\text{س}\ \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\,\text{قا}2\text{س} + \text{ث}$

(١٦) $\int \frac{1}{1-\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = -\text{ظتاس} + \text{ث}$

(١٧) $\int \frac{\text{حتا}^2\text{س}}{1-\text{جاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{1-\text{جا}^2\text{س}}{1-\text{جاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{(1-\text{جاس})(1+\text{جاس})}{1-\text{جاس}}\ \text{ءس}$

$= \int (1+\text{جاس})\ \text{ءس} = \text{س} - \text{حتاس} + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{1+\text{جا}^2\text{س}}{1-\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{1+\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س} + 1)\ \text{ءس}$

$= -\text{ظتاس} + \text{س} + \text{ث}$

(١٩) $\int \frac{\text{حتا}2\text{س}}{\text{حتاس} + \text{جاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{حتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{حتاس} + \text{جاس}}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{حتاس} - \text{جاس})\ \text{ءس}$

$= \text{جاس} + \text{حتاس} + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{\text{حتاس}}{1-\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{حتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قتاس}\ \text{ظتاس}\ \text{ءس} = -\text{قتاس} + \text{ث}$

(٢١) $\int \frac{\text{حتا}^3\text{س} - 4}{\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int (\text{حتاس} - 4\,\text{قا}^2\text{س})\ \text{ءس}$

$= \text{جاس} - 4\,\text{ظاس} + \text{ث}$

(٢٢) $\int \frac{\text{جا}^2(2\text{س}-3)}{1-\text{حتا}(2\text{س}-3)}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1-\text{حتا}^2(2\text{س}-3)}{1-\text{حتا}(2\text{س}-3)}\ \text{ءس}$

$= \int (1+\text{حتا}(2\text{س}-3))\ \text{ءس}$

$= \text{س} + \frac{1}{2}\,\text{جا}(2\text{س}-3) + \text{ث}$

(٢٣) $\int \frac{1}{1-\text{حتاس}}\ \text{ءس}$ بالضرب × $1+\text{حتاس}$

$= \int \frac{1}{1-\text{حتاس}} \times \frac{1+\text{حتاس}}{1+\text{حتاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1+\text{حتاس}}{1-\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{1+\text{حتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

= ∫ (قتا² س + قتا س ظتا س) ءس

= − ظتا س − قتا س + ث

(٢٤) ∫ جا² س ءس = ∫ (١/٢ − ١/٢ جتا ٢س) ءس

= ١/٢ س − ١/٤ جا ٢س + ث

(٢٥) ∫ (١ + جتا س)² ءس

= ∫ (١ + ٢ جتا س + جتا² س) ءس

= ∫ (١ + ٢ جتا س + ١/٢ + ١/٢ جتا ٢س) ءس

= ∫ (٣/٢ + ٢ جتا س + ١/٢ جتا ٢س) ءس

= ٣/٢ س + ٢ جا س + ١/٤ جا ٢س + ث

(٢٦) ∫ (جا س + قتا س)² ءس

= ∫ (جا² س + ٢ جا س قتا س + قتا² س) ءس

= ∫ (١/٢ − ١/٢ جتا ٢س + ٢ + قتا² س) ءس

= ∫ (٥/٢ − ١/٢ جتا ٢س + قتا² س) ءس

= ٥/٢ س − ١/٤ جا ٢س − ظتا س + ث

(٢٧) ∫ (ظا² س + ٢ جا² س) ءس

= ∫ (قا² س − ١ + ١ − جتا ٢س) ءس

= ∫ (قا² س − جتا ٢س) ءس

= ظا س − ١/٢ جا ٢س + ث

(٢٨) ∫ ظا (٣س + ١) ءس

= −١/٣ لوهـ |جتا (٣س + ١)| + ث

= ١/٣ لوهـ |قا (٣س + ١)| + ث

(٢٩) ∫ قا (٥ − ٢س) ءس

= −١/٢ لوهـ |قا (٥ − ٢س) + ظا (٥ − ٢س)| + ث

(٣٠) ∫ (قا² س / ظا س) ءس = لوهـ |ظا س| + ث

(٣١) ∫ ((١ − ظا س) / (١ + ظا س)) ءس   بالضرب × (جتا س / جتا س)

= ∫ ((جتا س − جا س) / (جتا س + جا س)) ءس

= لوهـ |جتا س + جا س| + ث

(٣١) ∫ (قا س ظا س / (قا س − ١)) ءس

بالضرب × ((قا س + ١) / (قا س + ١))

= ∫ ((قا² س ظا س + قا س ظا س) / (قا² س − ١)) ءس

= ∫ ((قا² س ظا س + قا س ظا س) / ظا² س) ءس

= ∫ (قا² س / ظا س + قا س / ظا س) ءس

= ∫ (قا² س / ظا س + قتا س) ءس

= لوهـ |ظا س| − لوهـ |قتا س + ظتا س| + ث

(٣٢) ∫ س جا س² ءس

الحل

بوضع ع = س²   ∴ ءع = ٢س ءس

التكامل = ∫ س جا س² ءس

= ١/٢ ∫ ٢س جا س² ءس

= ١/٢ ∫ جا ع ءع = −١/٢ جتا ع + ث

= −١/٢ جتا س² + ث

(٣٣) ∫ س^{٢} جتا (س^{٣} + ٥) ء س

- الحل -

= $\frac{١}{٣}$ ∫ ٣س^{٢} جتا (س^{٣} + ٥) ء س

= $\frac{١}{٣}$ جا (س^{٣} + ٥) + ث

(٣٤) ∫ $\frac{١}{س^{٢}}$ جا ($\frac{١}{س}$) ء س

- الحل -

= - ∫ $\frac{-١}{س^{٢}}$ جا $\frac{١}{س}$ ء س

= - (- جتا $\frac{١}{س}$) + ث

= جتا $\frac{١}{س}$ + ث

(٣٥) ∫ جا^{٥}س جتا س ء س

= $\frac{١}{٦}$ جا^{٦}س + ث

(٣٦) ∫ (٣ + جا س)^{٥} جتا س ء س

= $\frac{١}{٦}$ (٣ + جا س)^{٦} + ث

(٣٧) ∫ $\sqrt{١ + جا س}$ × جتا س ء س

= ∫ (١ + جا س)$^{\frac{١}{٢}}$ × جتا س ء س

= $\frac{٢}{٣}$ (١ + جا س)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(٣٨) ∫ قا^{٥}س ظا س ء س

= ∫ قا^{٤}س (قا س ظا س) ء س

= $\frac{١}{٥}$ قا^{٥}س + ث

(٣٩) ∫ ظتا س قتا^{٣}س ء س

= - ∫ قتا^{٢}س (- ظتا س قتا س) ء س

= $\frac{-١}{٣}$ قتا^{٣}س + ث

(٤٠) ∫ هـ$^{جا س}$ × جتا س ء س

= هـ$^{جا س}$ + ث

(٤١) ∫ جا^{٤}س جتا^{٣}س ء س

= ∫ جا^{٤}س جتا^{٢}س جتا س ء س

= ∫ جا^{٤}س (١ - جا^{٢}س) جتا س ء س

= ∫ (جا^{٤}س - جا^{٦}س) جتا س ء س

= ∫ (جا^{٤}س جتا س - جا^{٦}س جتا س) ء س

= $\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س - $\frac{١}{٧}$ جا^{٧}س + ث

(٤٢) ∫ ظتا^{٣}س ء س = ∫ ظتا^{٢}س ظتا س ء س

= ∫ (قتا^{٢}س - ١) ظتا س ء س

= ∫ (ظتا س قتا^{٢}س - ظتا س) ء س

= - $\frac{١}{٢}$ ظتا^{٢}س + لو$_{هـ}$ | قتا س | + ث

(٤٣) ∫ (١ + جا س) هـ$^{(س - جتا س)}$ ء س

= هـ$^{س - جتا س}$ + ث

(٤٤) ∫ هـ^{س} (ظتا س - قتا^{٢}س) ء س

= ∫ (هـ^{س} ظتا س - هـ^{س} قتا^{٢}س) ء س

= ∫ هـ^{س} ظتا س ء س - ∫ هـ^{س} قتا^{٢}س ء س

هـ^{س} ظتا س

هـ^{س} - قتا^{٢}س

= هـ^س ظا س + ∫ هـ^س × قا² س ء س
- ∫ هـ^س قا² س ء س
= هـ^س ظا س + ث

(٤٥) ∫ ٢^(جا س) جتا س ء س
= ٢^(جا س) / لو_هـ ٢ + ث

(٢) اذا كان ءص/ءس = ٧ - جا ٢س
أوجد ص بدلالة س اذا كان ص = ٥ عند س = صفر
- الحل -
∵ ءص/ءس = ٧ - جا ٢س بالتكامل
∴ ص = ٧س + ١/٢ جتا ٢س + ث
وعند ص = ٥ ، س = صفر
∴ ٥ = ٧ × ٠ + ١/٢ جتا ٠ + ث
∴ ث = ٩/٢
∴ ص = ٧س + ١/٢ جتا ٢س + ٩/٢

(٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) تعطى بالعلاقة ءص/ءس = جا س جتا س
أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (π/٦ ، ١)
- الحل -
∵ ءص/ءس = جا س جتا س بالتكامل
∴ ص = ∫ جا س جتا س ء س
∴ ص = ١/٢ جا² س + ث
وعند س = π/٦ ، ص = ١
∴ ١ = ١/٢ جا² π/٦ + ث ∴ ث = ٧/٨

∴ معادلة المنحنى هى
ص = ١/٢ جا² س + ٧/٨

(٤) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، -٢) وميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو
ءص/ءس = ٣π جتا πس - ٢π جا πس
- الحل -
∵ ءص/ءس = ٣π جتا πس - ٢π جا πس
∴ ص = ∫ (٣π جتا πس - ٢π جا πس) ء س
∴ ص = ٣ جا πس + ٢ جتا πس + ث
∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، -٢)
∴ -٢ = ٣ جا π + ٢ جتا π + ث
∴ ث = صفر
∴ ص = ٣ جا πس + ٢ جتا πس

(٥) أوجد معادلة المنحنى ص = د(س) اذا علم أن ص'' = ٢ جتا ٢س وأن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ١) هى ص = س + ١
- الحل -
∵ ص'' = ٢ جتا ٢س بالتكامل
∴ ص' = جا ٢س + ث١
∵ معادلة المماس هى ص = س + ١
∴ الميل = ١ عند س = صفر
∴ ١ = جا ٠ + ث١ ∴ ث١ = ١
∴ ص' = جا ٢س + ١ وبالتكامل
∴ ص = -١/٢ جتا ٢س + س + ث٢
∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)
∴ ١ = -١/٢ جتا ٠ + ٠ + ث٢ ∴ ث٢ = ٣/٢
∴ ص = -١/٢ جتا ٢س + س + ٣/٢

٦ منحنى ميل المماس عند أى نقطة يساوى م $\text{قتا}^2\text{س}$ حيث م ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{4} ، 5)$ ، $(\frac{3\pi}{4} ، 1)$ أوجد معادلة المنحنى

- الحل -

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{م قتا}^2\text{س}$ بالتكامل

$\therefore \text{ص} = -\text{م ظتا س} + \text{ث}$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4} ، 5)$ ، $(\frac{3\pi}{4} ، 1)$

$\therefore 5 = -\text{م} + \text{ث}$ ①

، $1 = \text{م} + \text{ث}$ ②

من ① ، ② ينتج أن

$\text{ث} = 3$ ، $\text{م} = -2$

$\therefore$ المعادلة هى $\text{ص} = 2\,\text{ظتا س} + 3$

٧ أوجد معادلة المنحنى ص = د(س) اذا كان ميل المماس عند أى نقطة عليه يساوى $\text{قتا}^2\text{س ظتا س}$ والمنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4} ، 2\frac{1}{2})$

- الحل -

$\because \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قتا}^2\text{س ظتا س}$ بالتكامل

$\therefore \text{ص} = -\int(-\text{قتا}^2\text{س})\,\text{ظتا س دس}$

$\therefore \text{ص} = \frac{-1}{2}\,\text{ظتا}^2\text{س} + \text{ث}$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4} ، 2\frac{1}{2})$

$\therefore \frac{5}{2} = \frac{-1}{2}\,\text{ظتا}^2\frac{\pi}{4} + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = 3$

$\therefore \text{ص} = \frac{-1}{2}\,\text{ظتا}^2\text{س} + 3$

٨ اذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{ص}^2}$ عند أى نقطة من نقط منحنى للدالة ص = د(س) وكان هذا المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١) فاثبت أن

$4\,\text{ص}^3 = 3\,(2\text{س} - \text{جا}\,2\text{س}) + 4$

- الحل -

طرفين × وسطين

$\therefore \text{ص}^2\,\text{دص} = \text{جا}^2\text{س دس}$

$\therefore \int \text{ص}^2\,\text{دص} = \int \text{جا}^2\text{س دس}$

$\therefore \frac{1}{3}\text{ص}^3 = \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}\,2\text{س} + \text{ث}$

حيث أن $\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{حتا}\,2\text{س}$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4}\,\text{جا}\,0 + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3}\text{ص}^3 = \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}\,2\text{س} + \frac{1}{3}$

بالضرب × ١٢

$\therefore 4\,\text{ص}^3 = 6\text{س} - 3\,\text{جا}\,2\text{س} + 4$

$\therefore 4\,\text{ص}^3 = 3\,(2\text{س} - \text{جا}\,2\text{س}) + 4$

⑨ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة (س ، ص) عليه هو جتا س − جا س وكانت له نقطة قيمة صغرى محلية تساوي $-٢\sqrt{٢}$ أوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن س ∈ [٠ ، ٢ط]

الحل

∴ $\frac{دص}{دس}$ = جتا س − جا س بالتكامل

∴ ص = جا س + جتا س + ث ①

ولإيجاد النقطة الحرجة نضع $\frac{دص}{دس}$ = صفر

∴ جتا س − جا س = صفر

ومنها س = $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٥ط}{٤}$

∴ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = −جا س − جتا س

$\left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)_{س=\frac{ط}{٤}}$ < صفر عندها قيمة عظمى

$\left(\frac{د^2ص}{دس^2}\right)_{س=\frac{٥ط}{٤}}$ > صفر عندها قيمة صغرى

∴ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{٥ط}{٤}$ ، $-٢\sqrt{٢}$)

∴ من ① ∴ ث = $-\sqrt{٢}$

∴ المعادلة هي

ص = جا س + جتا س $-\sqrt{٢}$

⑩ أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية

① ∫ س جا س دس

الحل

س ، جا س

١ ، −جتا س

= −س جتا س − ∫ −جتا س دس

= −س جتا س + جا س + ث

② ∫ (٣س+٢) جا س دس

الحل

٣س+٢ ، جا س

٣ ، −جتا س

= −(٣س+٢) جتا س + ٣ ∫ جتا س دس

= −(٣س+٢) جتا س + ٣ جا س + ث

③ ∫ س $قا^2$ س دس

الحل

س ، $قا^2$ س

١ ، ظا س

= س ظا س − ∫ ظا س دس

= س ظا س − $لو_{هـ}$ |قا س| + ث

④ ∫ $هـ^{س}$ جا س دس

الحل

$هـ^{س}$ ، جا س

$هـ^{س}$ ، −جتا س

ل = −$هـ^{س}$ جتا س − ∫ −$هـ^{س}$ جتا س دس

ل = −$هـ^{س}$ جتا س + ∫ $هـ^{س}$ جتا س دس

$هـ^{س}$ ، جتا س

$هـ^{س}$ ، جا س

ل = −$هـ^{س}$ جتا س + $هـ^{س}$ جا س − ∫ $هـ^{س}$ جا س دس

∴ ل = −$هـ^{س}$ جتا س + $هـ^{س}$ جا س − ل

بإضافة ل للطرفين

∴ ٢ل = −$هـ^{س}$ جتا س + $هـ^{س}$ جا س + ث

∴ التكامل = $-\frac{١}{٢}$ $هـ^{س}$ جتا س + $\frac{١}{٢}$ $هـ^{س}$ جا س + ث

= $\frac{١}{٢}$ $هـ^{س}$ (−جتا س + جا س) + ث

⑤ $\int \frac{\text{س}}{\text{جا}^{٢}\,\text{٥س}}\ \text{د س}$

- الحل -

$= \int \text{س}\ \text{قتا}^{٢}\,\text{٥س}\ \text{د س}$

س ، قتا² ٥س

١ ، $-\frac{١}{٥}$ ظتا ٥س

$= -\frac{١}{٥}\,\text{س ظتا ٥س} - \int -\frac{١}{٥}\,\text{ظتا ٥س}\ \text{د س}$

$= -\frac{١}{٥}\,\text{ظتا ٥س س} + \frac{١}{٥} \times -\frac{١}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{قتا ٥س}|$ + ث

$= -\frac{١}{٥}\,\text{ظتا ٥س س} - \frac{١}{٢٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{قتا ٥س}| + \text{ث}$

- تمارين عامة -

① أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

① $\int (٣ - \text{س} - \text{جا ٤س})\ \text{د س}$

② $\int \text{قتا}^{٢}\left(\frac{\text{س}+٣}{٢}\right)\ \text{د س}$

③ $\int \left(٤\,\text{جتا ٢س} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\text{س}} + ١\right)\ \text{د س}$

④ $\int \text{قتا س}\,(\text{ظتا س} - \text{قتا س})\ \text{د س}$

⑤ $\int (١ + \text{ظتا}^{٢}\,\text{س})\ \text{جا}^{٢}\,\text{س}\ \text{د س}$

⑥ $\int \text{ظا س جتا س}\ \text{د س}$

⑦ $\int \frac{٥}{\text{جتا}^{٢}\,\text{٣س}}\ \text{د س}$

⑧ $\int \frac{\text{جا}^{٣}\,\text{س} + \text{جتا}^{٣}\,\text{س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\ \text{د س}$

⑨ $\int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\,\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\,\text{س}}\ \text{د س}$

⑩ $\int \text{جتا}^{٢}\,\text{س}\ \text{د س}$

⑪ $\int \text{ظتا}^{٢}\,(٢\text{س} - ١)\ \text{د س}$

⑫ $\int \frac{\text{ظا س}}{\text{قا}^{٢}\,\text{س}}\ \text{د س}$

⑬ $\int \text{س ظا ٣س}^{٢}\ \text{د س}$

⑭ $\int \text{قا}^{٢}\,\text{س ظا س}\ \text{د س}$

⑮ $\int \text{جا س جتا}^{٣}\,\text{س}\ \text{د س}$

⑯ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا هـ}^{\text{س}}\ \text{د س}$

⑰ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{قتا س}\,(١ - \text{ظتا س})\ \text{د س}$

② اذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أى نقطة عليه يساوى قا²س - جاس أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

(ص = ظاس + جتاس - ١)

③ اذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}}{١ + \text{جتا ص}}$

أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بنقطة الأصل (ص + جاص = $\frac{١}{٢}$ س²)

④ أوجد معادلة المنحنى ص = د(س) اذا كان ميل العمودى عليه عند أى نقطة على المنحنى هو (٢ص + ١) قتاس والمنحنى يمر بنقطة الأصل (ص² + ص = جتاس - ١)

⑤ أوجد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int \text{س جتا ٤س}\ \text{د س}$

② $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا س}\ \text{د س}$

التكامل المحدد.

النظرية الأساسية في التفاضل:

اذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ٮ أي مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة فإن

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = ٮ(ب) - ٮ(أ)$$

•• خواص التكامل المحدد:

اذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] ، جـ ∈]أ ، ب[فإن

① $\int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس = - \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$

② $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس =$ صفر

③ $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\, ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\, ءس$

•• خواص التكامل المحدد للدوال الفردية و الدوال الزوجية

① اذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [-أ ، أ] فإن

$\int_{-أ}^{أ} د(س)\, ءس =$ صفر

② اذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [-أ ، أ] فإن

$\int_{-أ}^{أ} د(س)\, ءس = ٢ \int_{٠}^{أ} د(س)\, ءس$

•• تذكر أن : في الدالة الزوجية تكون $د(-س) = د(س)$ والفردية $د(-س) = -د(س)$

- أمثلة محلولة -

① أوجد التكامل المحدد للدالة د من س = -٢ إلى س = ٤ حيث $د(س) = ٣س^{٢} - ٢$

-الحل-

$\int_{-٢}^{٤} (٣س^{٢} - ٢)\, ءس = [س^{٣} - ٢س]_{-٢}^{٤}$

$= ٦٠$

② أوجد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\, ءس = [س^{٢} + ٣س]_{-١}^{٢}$

$= ١٢$

② $\int_{-١}^{١} (٣س^{٢} - ٤س + ٥)\, ءس$

$= [س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س]_{-١}^{١} = ١٢$

③ $\int_{٢}^{٤} (س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})\, ءس$

$= \int_{٢}^{٤} (س^{٢} + س^{-٢})\, ءس$

$= [\frac{١}{٣}س^{٣} - س^{-١}]_{٢}^{٤} = \frac{٢٢٧}{١٢}$

④ $\int_{١}^{٣} \frac{٦ - س^{٤}}{٢س^{٢}}\, ءس$

$= \int_{١}^{٣} (٣س^{-٢} - \frac{١}{٢}س^{٢})\, ءس$

$= [-٣س^{-١} - \frac{١}{٦}س^{٣}]_{١}^{٣} = \frac{-٧}{٣}$

⑤ $\int_{٠}^{٤} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\, ءس = [\frac{١}{٥}(٢س + ١)^{\frac{٥}{٢}}]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٢٤٣}{٥} - \frac{١}{٥} = \frac{٢٤٢}{٥}$

(٦) $\int_{0}^{5} \frac{3}{\sqrt{ن+4}}\, dن$

$= \int_{0}^{5} 3(ن+4)^{-\frac{1}{2}}\, dن = \left[6(ن+4)^{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{5}$

$= 18 - 12 = 6$

(٧) $\int_{1}^{4} \frac{س-1}{\sqrt{س}-1}\, dس$

$= \int_{1}^{4} \frac{(\sqrt{س}-1)(\sqrt{س}+1)}{\sqrt{س}-1}\, dس$

$= \int_{1}^{4} (\sqrt{س}+1)\, dس = \int_{1}^{4} (س^{\frac{1}{2}}+1)\, dس$

$= \left[\frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + س\right]_{1}^{4} = \frac{23}{3}$

(٨) $\int_{-1}^{1} \frac{س+8}{\sqrt[3]{س}+2}\, dس$

- الحل -

$= \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt[3]{س}+2)(\sqrt[3]{س^2} - 2\sqrt[3]{س} + 4)}{(\sqrt[3]{س}+2)}\, dس$

$= \int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{س^2} - 2\sqrt[3]{س} + 4)\, dس$

$= \left[\frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}س^{\frac{4}{3}} + 4س\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{46}{5}$

(٩) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}\,\theta\, d\theta = \left[\text{جا}\,\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$

(١٠) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{قتا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta\, d\theta = \left[-\text{قتا}\,\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$

= صفر

(١١) $\int_{0}^{1} 2\,\text{جا}\,\pi ع\, dع = \left[\frac{-2}{\pi}\text{جتا}\,\pi ع\right]_{0}^{1}$

$= \frac{4}{\pi}$

(١٢) $\int_{-\pi}^{\pi} (4 + \pi\,\text{جتا}\,2س)\, dس$

$= \left[4س + \frac{\pi}{2}\text{جا}\,2س\right]_{-\pi}^{\pi} = 8\pi$

(١٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}\,ع\ \text{قا}^2 ع\, dع = \left[\frac{1}{2}\text{ظا}^2 ع\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} -$ صفر $= \frac{1}{2}$

(١٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{جا}\,س}{\text{جتا}^2 س}\, dس = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \text{قا}\,س\ \text{ظا}\,س\, dس$

$= \left[\text{قا}\,س\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = 2 - 1 = 1$

(٣) إذا كان $\int_{1}^{5} د(س)\, dس = 10$ ،

$\int_{1}^{5} ر(س)\, dس = -2$ اوجد قيمة كل من

(١) $\int_{1}^{5} [د(س) + ر(س)]\, dس$

(٢) $\int_{1}^{5} [د(س) - ر(س)]\, dس$

(٣) $\int_{5}^{1} 3\,ر(س)\, dس$

- الحل -

(١) $\int_{1}^{5} [د(س) + ر(س)]\, dس$

$= \int_{1}^{5} د(س)\, dس + \int_{1}^{5} ر(س)\, dس$

$= 10 + (-2) = 8$

② $\int_{1}^{5} [\text{د}(\text{س}) - \text{ر}(\text{س})]\, \text{دس}$

$= \int_{1}^{5} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} - \int_{1}^{5} \text{ر}(\text{س})\, \text{دس}$

$= ١٠ - (-٢) = ١٢$

③ $\int_{5}^{1} ٣\, \text{ر}(\text{س})\, \text{دس} = -٣ \int_{1}^{5} \text{ر}(\text{س})\, \text{دس}$

$= -٣ \times -٢ = ٦$

④ اذا كان $\int_{2}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٥$ ، $\int_{2}^{4} \text{ر}(\text{س})\, \text{دس} = -٣$ فأوجد

① $\int_{2}^{4} ٣\, \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$ ② $\int_{4}^{2} ٢\, \text{ر}(\text{س})\, \text{دس}$

③ $\int_{2}^{4} [٣\, \text{د}(\text{س}) - ٢\, \text{ر}(\text{س})]\, \text{دس}$

④ $\int_{2}^{4} [٣\, \text{ر}(\text{س}) + ٤\text{س}]\, \text{دس}$

- الحل -

① $\int_{2}^{4} ٣\, \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٣ \int_{2}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$

$= ٣ \times ٥ = ١٥$

② $\int_{4}^{2} ٢\, \text{ر}(\text{س})\, \text{دس} = -٢ \int_{2}^{4} \text{ر}(\text{س})\, \text{دس}$

$= -٢ \times -٣ = ٦$

③ $\int_{2}^{4} [٣\, \text{د}(\text{س}) - ٢\, \text{ر}(\text{س})]\, \text{دس}$

$= ٣ \int_{2}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} - ٢ \int_{2}^{4} \text{ر}(\text{س})\, \text{دس}$

$= ٣ \times ٥ - ٢ \times -٣ = ١٥ + ٦ = ٢١$

④ $\int_{2}^{4} [٣\, \text{ر}(\text{س}) + ٤\text{س}]\, \text{دس}$

$= ٣ \int_{2}^{4} \text{ر}(\text{س}) + \int_{2}^{4} ٤\text{س}\, \text{دس}$

$= ٣ \times -٣ + [٢\text{س}^{٢}]_{2}^{4}$

$= -٩ + [٣٢ - ٨] = ١٥$

⑤ اذا كان $\int_{-2}^{3} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٩$ ، $\int_{5}^{3} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٤$ أوجد قيمة

$\int_{-2}^{5} [٣\, \text{د}(\text{س}) - ٦\text{س}]\, \text{دس}$

- الحل -

$\because \int_{-2}^{5} [٣\, \text{د}(\text{س}) - ٦\text{س}]\, \text{دس}$

$= ٣ \int_{-2}^{5} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} - [٣\text{س}^{٢}]_{-2}^{5}$

$= ٣ \left[\int_{-2}^{3} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{3}^{5} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}\right]$

$- [٣ \times ٢٥ - ٣ \times ٤]$

$= ٣[٩ + (-٤)] - ٦٣ = -٤٨$

⑥ اذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{-1}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = ٢٥٥$ ، $\int_{-1}^{2} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = -١٥$

فأوجد $\int_{2}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$

- الحل -

$\int_{2}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{-1}^{4} \text{د}(\text{س})\, \text{دس} - \int_{-1}^{2} \text{د}(\text{س})\, \text{دس}$

$= ٢٥٥ - (-١٥) = ٢٤٠$

⑦ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & \text{س} < ٢ \\ \text{س} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

فأوجد $\int_{٠}^{٦} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

- الحل -

$\int_{٠}^{٦} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{٠}^{٢} ٢\,\text{ء}\text{س} + \int_{٢}^{٦} \text{س}\,\text{ء}\text{س}$

$= [٢\text{س}]_{٠}^{٢} + [\tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢}]_{٢}^{٦}$

$= (٤ - \text{صفر}) + (١٨ - ٢) = ٢٠$

⑧ إذا كانت

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + \text{س}^{٢} & \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} - \text{س}^{٢} & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

أوجد $\int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

- الحل -

$\int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{-١}^{٠} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} + \int_{٠}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

$= \int_{-١}^{٠} (٢\text{س} + \text{س}^{٢})\,\text{ء}\text{س} + \int_{٠}^{٣} (٢\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{ء}\text{س}$

$= [\text{س}^{٢} + \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣}]_{-١}^{٠} + [\text{س}^{٢} - \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣}]_{٠}^{٣}$

$= \frac{-٢}{٣} + \text{صفر} = \frac{-٢}{٣}$

⑨ أوجد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{-١}^{٣} |\text{س} - ١|\,\text{ء}\text{س}$

- الحل -

$\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - ١| = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{س} \geq ١ \\ -\text{س} + ١ & \text{س} < ١ \end{cases}$

$\therefore \int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{-١}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} + \int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

$= \int_{-١}^{١} (-\text{س} + ١)\,\text{ء}\text{س} + \int_{١}^{٣} (\text{س} - ١)\,\text{ء}\text{س}$

$= [\tfrac{-١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}]_{-١}^{١} + [\tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}]_{١}^{٣}$

$= ٢ + ٢ = ٤$

② $\int_{-٤}^{٢} |\text{س} + ١|\,\text{ء}\text{س}$

- الحل -

$\text{د}(\text{س}) = |\text{س} + ١| = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{س} \geq -١ \\ -\text{س} - ١ & \text{س} < -١ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٤}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{-٤}^{-١} (-\text{س} - ١)\,\text{ء}\text{س} + \int_{-١}^{٢} (\text{س} + ١)\,\text{ء}\text{س}$

$\therefore \int_{-٤}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = [\tfrac{-١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}]_{-٤}^{-١} + [\tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}]_{-١}^{٢}$

$= \frac{٩}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٩$

③ $\int_{-٣}^{١} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}\,\text{ء}\text{س}$

- الحل -

$\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤} = |\text{س} + ٢|$

$= \begin{cases} \text{س} + ٢ & \text{س} \geq -٢ \\ -\text{س} - ٢ & \text{س} < -٢ \end{cases}$

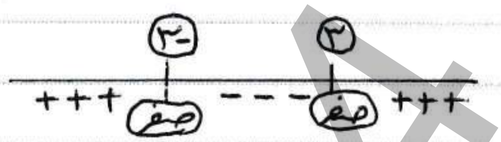
$\therefore \int_{-٣}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{-٣}^{-٢} (-\text{س} - ٢)\,\text{ء}\text{س} + \int_{-٢}^{١} (\text{س} + ٢)\,\text{ء}\text{س}$

$= [\tfrac{-١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}]_{-٣}^{-٢} + [\tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س}]_{-٢}^{١}$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٥$

④ $\int_{-1}^{1} |\text{س}^2-9|\,d\text{س}$

- الحل -



$\because \text{د}(\text{س}) = |\text{س}^2-9|$

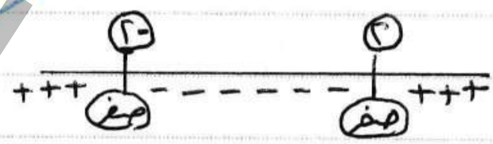
$= \begin{cases} \text{س}^2-9 & \text{س} \le -3 \\ -\text{س}^2+9 & -3 < \text{س} < 3 \\ \text{س}^2-9 & \text{س} \ge 3 \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1} \text{د}(\text{س})\,d\text{س} = \int_{-1}^{1} (-\text{س}^2+9)\,d\text{س}$

$= \left[-\frac{1}{3}\text{س}^3 + 9\text{س}\right]_{-1}^{1} = \frac{52}{3}$

⑤ $\int_{-3}^{3} |\text{س}^2-4|\,d\text{س}$

- الحل -



$\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^2-4|$

$= \begin{cases} \text{س}^2-4 & \text{س} \le -2 \\ -\text{س}^2+4 & -2 < \text{س} < 2 \\ \text{س}^2-4 & \text{س} \ge 2 \end{cases}$

$\therefore \int_{-3}^{3} \text{د}(\text{س})\,d\text{س}$

$= \int_{-3}^{-2} (\text{س}^2-4)\,d\text{س} + \int_{-2}^{2} (-\text{س}^2+4)\,d\text{س}$

$+ \int_{2}^{3} (\text{س}^2-4)\,d\text{س}$

$= \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{1}{3}\text{س}^3 + 4\text{س}\right]_{-2}^{2}$

$+ \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}\right]_{2}^{3} = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3}$

$= \frac{46}{3}$

⑩ باستخدام خواص الدوال الفردية والزوجية أوجد قيمة كل مما يأتي

① $\int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}\,d\text{س}$

- الحل -

$\because \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}$ دالة فردية

$\therefore \int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2} = $ صفر

② $\int_{-3}^{3} (\text{س}^2-1)\,d\text{س}$

- الحل -

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^2-1$ دالة زوجية

$\therefore \int_{-3}^{3} (\text{س}^2-1)\,d\text{س} = 2\int_{0}^{3} (\text{س}^2-1)\,d\text{س}$

$= 2\left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - \text{س}\right]_{0}^{3} = 12$

③ $\int_{-2}^{2} \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^2+3}\,d\text{س}$

- الحل -

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^2+3}$ دالة فردية

$\therefore \int_{-2}^{2} \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^2+3} = $ صفر

④ $\int_{-4}^{4} (4-|\text{س}|)\,d\text{س}$

- الحل -

$\because \text{د}(\text{س}) = 4-|\text{س}|$ دالة زوجية

$\therefore \int_{-4}^{4} (4-|\text{س}|)\,d\text{س} = 2\int_{0}^{4} (4-|\text{س}|)\,d\text{س}$

$= 2\int_{0}^{4} (4-\text{س})\,d\text{س}$

$= 2\left[4\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{4} = 2 \times 8 = 16$

⑩ $\int_{-1}^{1} \sqrt{\text{س}^4+\text{س}^2}\;\text{ءس}$

- الحل -

$\because\ \text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^4+\text{س}^2}$ دالة زوجية

$\therefore \int_{-1}^{1} \sqrt{\text{س}^4+\text{س}^2}\;\text{ءس} = 2\int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}^4+\text{س}^2}\;\text{ءس}$

$= 2\int_{0}^{1} |\text{س}|\sqrt{\text{س}^2+1}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} 2|\text{س}|\sqrt{\text{س}^2+1}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} 2\text{س}\sqrt{\text{س}^2+1}\;\text{ءس}$

$= \left[\frac{2}{3}(\text{س}^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right]$

$= \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

---

⑪ اذا كان $\int_{0}^{2} \text{س}^3\;\text{ءس} = 4$

أوجد قيمة كل مما يأتي موضحاً السبب

① $\int_{-2}^{0} \text{س}^3\;\text{ءس}$ ② $\int_{-2}^{2} \text{س}^3\;\text{ءس}$

③ $\int_{0}^{2} 3\text{س}^3\;\text{ءس}$

- الحل -

$\because\ \text{د}(\text{س}) = \text{س}^3$ دالة فردية

① $\int_{-2}^{0} \text{س}^3\;\text{ءس} = -\int_{0}^{2} \text{س}^3\;\text{ءس} = -4$

---

② $\int_{-2}^{2} \text{س}^3\;\text{ءس} =$ صفر

---

③ $\int_{0}^{2} 3\text{س}^3\;\text{ءس} = 3\int_{0}^{2} \text{س}^3\;\text{ءس}$

$= 3 \times 4 = 12$

---

⑫ اذا كان د دالة متصلة على الفترة $[-4, 4]$ ، $\int_{0}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس} = 3$ احسب قيمة

① $\int_{0}^{4} [\text{د}(\text{س}) - 2]\;\text{ءس}$

② $\int_{-4}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس}$ ، د فردية

③ $\int_{-4}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس}$ ، د زوجية

- الحل -

① $\int_{0}^{4} [\text{د}(\text{س}) - 2]\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس} - \int_{0}^{4} 2\;\text{ءس}$

$= 3 - [2\text{س}]_{0}^{4} = 3 - (8 - 0) = -5$

---

② $\int_{-4}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس} =$ صفر

---

③ $\int_{-4}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس} = 2\int_{0}^{4} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس}$

$= 2 \times 3 = 6$

---

⑬ اذا كانت د دالة فردية متصلة على الفترة $[-3, 5]$ ، $\int_{3}^{5} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس} = 9$

ما قيمة $\int_{-3}^{5} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس}$

- الحل -

$\int_{-3}^{5} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس} = \int_{-3}^{3} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس}$

$+ \int_{3}^{5} \text{د}(\text{س})\;\text{ءس}$

$=$ صفر $+ 9 = 9$

(١٤) أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $\int_{1}^{هـ} \frac{2}{س} \, د س = [2 \, لو_{هـ} |س|]_{1}^{هـ}$

$= 2 لو_{هـ} هـ - 2 لو_{هـ} 1 = 2$

② $\int_{-5}^{-1} \frac{3}{س} \, د س = [3 \, لو_{هـ} |س|]_{-5}^{-1}$

$= 3 [لو_{هـ} 1 - لو_{هـ} 5] = -3 لو_{هـ} 5$

③ $\int_{0}^{2} هـ^{-2س} \, د س = [\frac{-1}{2} هـ^{-2س}]_{0}^{2}$

$= \frac{-1}{2} [هـ^{-4} - هـ^{0}] = \frac{-1}{2} (هـ^{-4} - 1)$

④ $\int_{0}^{3} (2س - 7هـ^{س}) \, د س$

$= [س^2 - 7هـ^{س}]_{0}^{3}$

$= [9 - 7هـ^{3}] - [-7]$

$= 16 - 7هـ^{3}$

⑤ $\int_{0}^{2} س (س^2 - 3)^2 \, د س$

- الحل -

$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2} 2س (س^2 - 3)^2 \, د س$

$= \frac{1}{2} [\frac{1}{3} (س^2 - 3)^3]_{0}^{2}$

$= \frac{1}{6} (1 - (-27)) = \frac{14}{3}$

⑥ $\int_{0}^{2} \frac{س^2 + 2س}{\sqrt{س^3 + 3س^2 + 16}} \, د س$

- الحل -

$= \frac{1}{3} \int_{0}^{2} (3س^2 + 6س)(س^3 + 3س^2 + 16)^{-\frac{1}{2}} \, د س$

$= \frac{1}{3} [2 (س^3 + 3س^2 + 16)^{\frac{1}{2}}]_{0}^{2}$

$= \frac{2}{3} [6 - 4] = \frac{4}{3}$

⑦ $\int_{-4}^{0} س (س + 4)^3 \, د س$

- الحل -

$= \int_{-4}^{0} (س + 4 - 4)(س + 4)^3 \, د س$

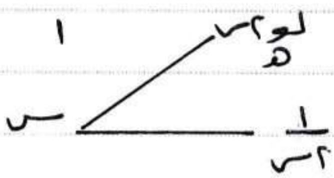
$= \int_{-4}^{0} (س + 4)^4 - 4 (س + 4)^3 \, د س$

$= [\frac{1}{5} (س + 4)^5 - (س + 4)^4]_{-4}^{0}$

$= \frac{-256}{5}$

⑧ $\int_{1}^{10} (لو_{هـ} 2س) \, د س$

- الحل -



$= [س \, لو_{هـ} 2س]_{1}^{10} - \int_{1}^{10} س \times \frac{1}{2س} \, د س$

$= (10 لو_{هـ} 20 - لو_{هـ} 2) - [\frac{1}{2} س]_{1}^{10}$

$= 10 لو_{هـ} 20 - لو_{هـ} 2 - \frac{9}{2}$

- تمارين عامة -

① أوجد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{1}^{3} (3س^{2} - 2)\, دس$ (٢٢)

② $\int_{-1}^{3} (4س^{3} - 6س^{2} + 5)\, دس$ (٤٤)

③ $\int_{0}^{5} \sqrt{3س + 1}\, دس$ (١٤)

④ $\int_{4}^{0} \frac{دس}{\sqrt{8 - س}}$ (٤ - ٤√٢)

⑤ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} قاس\, ظاس\, دس$ (١ - √٢)

⑥ $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} قا^{2}س\, دس$ (√٣)

⑦ $\int_{1}^{4} 7\, دس$ (٢١)

② اذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} س^{2} & س \le 2 \\ 3س - 2 & س > 2 \end{cases}$$

أوجد $\int_{0}^{3} د(س)\, دس$ ($\frac{49}{6}$)

③ اذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} س^{2} + 1 & س \le 1 \\ 3س - 1 & س > 1 \end{cases}$$

أوجد $\int_{0}^{2} د(س)\, دس$ ($\frac{29}{6}$)

④ أوجد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{0}^{5} |س - 3|\, دس$ ($\frac{13}{2}$)

② $\int_{-1}^{3} س|س|\, دس$ ($\frac{26}{3}$)

③ $\int_{-1}^{5} |س^{2} - 4س|\, دس$ ($\frac{46}{3}$)

⑤ باستخدام خواص الدوال الفردية والزوجية أوجد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{-2}^{2} \frac{س^{3} - 3س}{س^{2} + 1}\, دس$ (صفر)

② $\int_{-2}^{2} س^{2}(3 - 2|س|)\, دس$ (صفر)

③ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |جاس|\, دس$ (٢)

⑥ اذا كان $\int_{0}^{2} س^{2}\, دس = \frac{8}{3}$ أوجد قيمة كل مما يأتي موضحاً السبب

① $\int_{-2}^{0} س^{2}\, دس$ ② $\int_{-2}^{2} س^{2}\, دس$

③ $\int_{0}^{2} -س^{2}\, دس$ ($\frac{8}{3}$ ، $\frac{16}{3}$ ، $-\frac{8}{3}$)

⑦ اذا كانت د دالة زوجية متصلة على الفترة [-٤ ، ٤] ، $\int_{-4}^{4} د(س)\, دس = 20$ ، $\int_{0}^{2} د(س)\, دس = 6$ فما قيمة $\int_{-4}^{2} د(س)\, دس$

(١٦)

⑧ أوجد قيمة كل مما يأتي:

① $\int_{هـ}^{1} \frac{دس}{س}$ (-١) ② $\int_{0}^{لو_{هـ}3} هـ^{س}\, دس$ (٢)

③ $\int_{0}^{3} س\sqrt{س^{2} + 3}\, دس$ ($\frac{10}{3}\sqrt{10} - \frac{1}{3}$)

④ $\int_{0}^{3} س\sqrt{25 - س^{2}}\, دس$ ($\frac{61}{3}$)

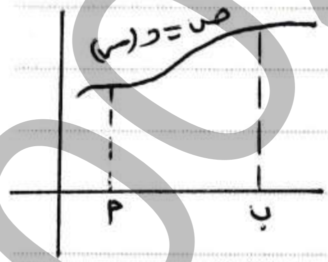
المساحات في المستوى

① مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب وكان

(أ) $د(س) \geq صفر$

أي أن المنطقة فوق محور السينات

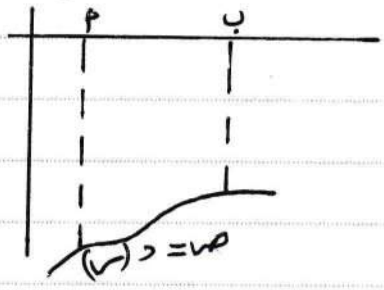


فإن

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, دس$$

(ب) $د(س) \leq صفر$

أي أن المنطقة تحت محور السينات



فإن

$$م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\, دس = \left|\int_{أ}^{ب} د(س)\, دس\right|$$

.. ملاحظات :

① يفضل الاستعانة برسم منحنى الدالة المعطاة لتحديد المناطق التي تقع فوقه أو تحت محور السينات

② نظراً لصعوبة رسم كثير من المسائل بيانياً فيفضل إيجاد أصفار الدالة حتى إذا كانت حدود التكامل والتي تجزئ مجال الدالة [أ ، ب] فإنه وجدت إلى فترات جزئية ثم نحدد إشارة الدالة في كل فترة جزئية ومنها نحدد المناطق التي تقع فوقه أو تحت محور السينات

③ قيمة التكامل المحدد قد تكون موجبة أو سالبة أما المساحة تكون دائماً موجبة

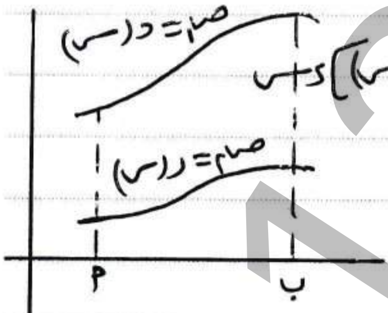
④ بصفة عامة مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى أي دالة متصلة ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هي

$$م = \int_{أ}^{ب} |د(س)|\, دس$$

② مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين :

إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] وكانت $د(س) \geq ر(س)$ لكل $س \in [أ ، ب]$ فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص_1 = د(س)$ ، $ص_2 = ر(س)$ والمستقيمان س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة

$$م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\, دس$$



.. ملاحظات :

① سوف نتعرف على الدالة الأكبر $ص_1 > ص_2$ لكل $س \in [أ ، ب]$ باستخدام الرسم أو بأخذ قيمة اختيارية (اختيارية) لـ $س \in [أ ، ب]$ والتعويض بها في معادلتي الدالتين ويمكن الاستغناء عن معرفة ذلك بوضع علامة القيمة

للمنطقة كما يلي

$$المساحة\ (م) = \left| \int_{أ}^{ب} (أي\ دالة - الدالة\ الأخرى)\, ءس \right|$$

٢) عندما تنحصر منطقة بين منحنيين متقاطعين فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هي الإحداثيات السينية لنقط التقاطع والتي نوجدها بحل معادلتي المنحنيين جبرياً

- أمثلة محلولة -

١) أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة ص وفوق الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

١) $ص = ٢س + ٣$ فوق الفترة $[-١ ، ٤]$

- الحل -

$$المساحة = \int_{-1}^{4} (2س + 3)\, ءس$$

$$= [س^2 + 3س]_{-1}^{4} = 28 + 2$$

$$= 30 \text{ وحدة مربعة}$$

٢) $ص = |س - ٣|$ فوق الفترة $[٢ ، ٥]$

- الحل -

$$المساحة = \int_{2}^{5} |س - 3|\, ءس$$

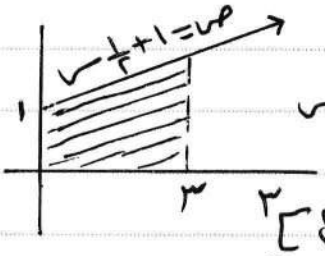
$$= \int_{2}^{3} (-س + 3)\, ءس + \int_{3}^{5} (س - 3)\, ءس$$

$$= \left[-\frac{1}{2} س^2 + 3س\right]_{2}^{3} + \left[\frac{1}{2} س^2 - 3س\right]_{3}^{5}$$

$= ٥و٢$ وحدة مربعة

٣) اكتب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة للمنطقة في كل مما يأتي واحسب قيمته

١)

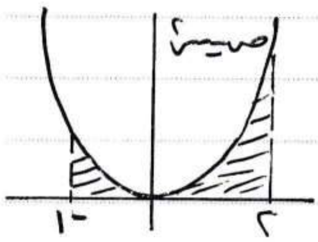


$$م = \int_{0}^{3} \left(1 + \frac{1}{2} س\right) ءس$$

$$\therefore م = \left[س + \frac{1}{4} س^2\right]_{0}^{3}$$

$\therefore$ المساحة $= \frac{21}{4}$ وحدة مربعة

٢)

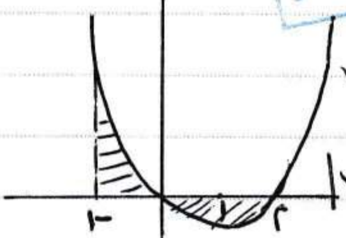


$$م = \int_{-1}^{2} س^2\, ءس$$

$$م = \left[\frac{1}{3} س^3\right]_{-1}^{2}$$

$\therefore م = ٣$ وحدة مربعة

٣)



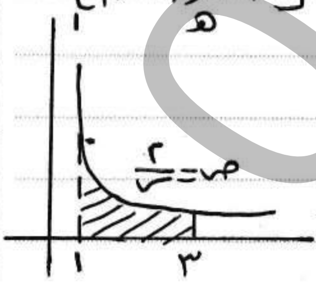
$$م = \int_{-1}^{0} (س^2 - 2س)\, ءس + \left| \int_{0}^{2} (س^2 - 2س)\, ءس \right|$$

$$م = \left[\frac{1}{3} س^3 - س^2\right]_{-1}^{0} + \left| \left[\frac{1}{3} س^3 - س^2\right]_{0}^{2} \right|$$

$\therefore م = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

٤)

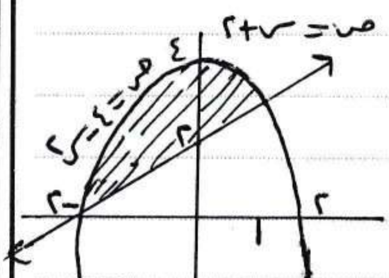
$$م = \int_{1}^{3} \frac{2}{س}\, ءس = \left[2\, لو_{هـ} |س|\right]_{1}^{3}$$



$$م = 2\,(لو_{هـ} 3 - لو_{هـ} 1)$$

$م = 2\, لو_{هـ} 3$ وحدة مربعة

⑤



$$\text{م} = \int_{-2}^{1} (4-\text{س}^2)\,\text{ءس} - \int_{-2}^{1} (\text{س}+2)\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \int_{-2}^{1} (4-\text{س}^2-\text{س}-2)\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \int_{-2}^{1} (2-\text{س}^2-\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \left[2\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{-2}^{1}$$

$= \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

③ أوجد فى كل مما يأتى مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين :

① المستقيمات $\text{س}+2\text{ص}=9$ ، $\text{س}=1$ ، $\text{س}=3$ ، $\text{ص}=$ صفر

- الحل -

$\because \text{س}+2\text{ص}=9 \quad \therefore \text{ص} = -\frac{1}{2}\text{س} + \frac{9}{2}$

$$\therefore \text{المساحة} = \int_{1}^{3} \left(-\frac{1}{2}\text{س} + \frac{9}{2}\right)\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \left[-\frac{1}{4}\text{س}^2 + \frac{9}{2}\text{س}\right]_{1}^{3}$$

$= 7$ وحدة مربعة

② المنحنى $\text{ص} = \text{س}^2 - 5\text{س}$ ومحور السينات

- الحل -

نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

$\text{س}^2 - 5\text{س} =$ صفر $\quad \therefore \text{س} = 0 ، 5$

$\because$ المنحنى يقع تحت محور السينات فى الفترة $[0 ، 5]$

$$\therefore \text{المساحة م} = \left|\int_{0}^{5} (\text{س}^2 - 5\text{س})\,\text{ءس}\right|$$

$$\therefore \text{م} = \left|\left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{5}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{5}\right| = \frac{125}{6}$$

وحدة مربعة

③ المنحنى $\text{ص} = 3 - 2\text{س} - \text{س}^2$ ومحور السينات

- الحل -

نقط التقاطع مع محور السينات

$3 - 2\text{س} - \text{س}^2 =$ صفر

$\therefore \text{س} = -3 \quad ، \quad \text{س} = 1$

$$\therefore \text{المساحة م} = \int_{-3}^{1} (3 - 2\text{س} - \text{س}^2)\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \left[3\text{س} - \text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-3}^{1}$$

$\therefore \text{م} = \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

④ المنحنى $\text{ص} = \text{س}^2 + 3$ ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم $\text{س} = 3$

- الحل -

$$\therefore \text{المساحة م} = \int_{0}^{3} (\text{س}^2 + 3)\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 + 3\text{س}\right]_{0}^{3} = 18$$

وحدة مربعة

⑤ المنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+4}$ والمستقيمات $\text{س} =$ صفر ، $\text{س} = 5$ ، $\text{ص} =$ صفر

- الحل -

$$\text{المساحة م} = \int_{0}^{5} \sqrt{\text{س}+4}\,\text{ءس}$$

$$\therefore \text{م} = \left[\frac{2}{3}(\text{س}+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{5} = \frac{38}{3}$$ وحدة مربعة

⑥ المنحنى $\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ والمستقيمات

$\text{س} = ١ \,،\, \text{س} = ٤ \,،\, \text{ص} = \text{صفر}$

- الحل -

المساحة $\text{م} = \int_{١}^{٤} \frac{٤}{\text{س}^{٢}} \, \text{دس}$

$\text{م} = \int_{١}^{٤} ٤\,\text{س}^{-٢} \, \text{دس} = [-٤\,\text{س}^{-١}]_{١}^{٤}$

∴ المساحة = ٣ وحدة مربعة

⑦ المنحنى $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ والمستقيمين

$\text{س} = \text{صفر} \,،\, \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٤$

- الحل -

المساحة $\text{م} = \int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤} \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس}$

$∴ \text{م} = [\text{هـ}^{\text{س}}]_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٤} - \text{هـ}^{٠}$

$= ٤ - ١ = ٣$

⑧ المنحنى ص = جاس والمستقيمين

$\text{س} = \text{صفر} \,،\, \text{س} = \frac{\pi}{٢} \,،\, \text{ص} = \text{صفر}$

- الحل -

المساحة $\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس} \, \text{دس}$

$∴ \text{م} = [-\text{جتاس}]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = ١$ وحدة مربعة

⑨ المنحنى $\text{ص} = ٢ - \text{س}^{٢}$ والمستقيم

$\text{س} + \text{ص} = \text{صفر}$

- الحل -

بحل المعادلتين معاً جبرياً

$∴ \text{س} = ٢ \,،\, \text{س} = -١$

$∴ \text{المساحة} = \int_{-١}^{٢} [(٢ - \text{س}^{٢}) - (-\text{س})] \, \text{دس}$

$∴ \text{م} = \int_{-١}^{٢} (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س}) \, \text{دس}$

$∴ \text{م} = [٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}]_{-١}^{٢}$

$∴ \text{م} = \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

⑩ المنحنيين $\text{ص} + \text{س}^{٢} = ٦ \,،$

$\text{ص} + ٢\text{س} - ٣ = \text{صفر}$

- الحل -

$∵ \text{ص} + \text{س}^{٢} = ٦ \quad ∴ \text{ص} = ٦ - \text{س}^{٢}$ ①

$∵ \text{ص} + ٢\text{س} - ٣ = \text{صفر} \quad ∴ \text{ص} = ٣ - ٢\text{س}$ ②

وبحل المعادلتين ① ، ②

$∴ \text{س} = ٣ \,،\, \text{س} = -١$

$∴ \text{المساحة} = \int_{-١}^{٣} (٦ - \text{س}^{٢}) - (٣ - ٢\text{س}) \, \text{دس}$

$∴ \text{المساحة} = \int_{-١}^{٣} (-\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣) \, \text{دس}$

$∴ \text{المساحة} = [-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٣\text{س}]_{-١}^{٣}$

$∴ \text{م} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

⑪ منحنيي الدالتين $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} \,،$

$\text{ر}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٤$

- الحل -

بجعل $\text{د}(\text{س}) = \text{ر}(\text{س})$

$∴ ٢\text{س}^{٢} = ٢\text{س} + ٤$

$∴ ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٤ = \text{صفر}$ ومنها

$\text{س} = ٢ \,،\, \text{س} = -١$

$∴ \text{المساحة م} = \int_{-١}^{٢} [(٢\text{س} + ٤) - (٢\text{س}^{٢})] \, \text{دس}$

$∴ \text{م} = \int_{-١}^{٢} (-٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤) \, \text{دس}$

$∴ \text{م} = [\frac{-٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س}]_{-١}^{٢}$

= ٩ وحدة مربعة

(١٢) المنحنى $\text{ص} = ٩ - \text{س}^{٢}$ والمستقيم $\text{ص} = ٥$

- الحل -

نقط تقاطع المنحنيين بحل المعادلتين $\text{ص} = ٩ - \text{س}^{٢}$ ، $\text{ص} = ٥$

$\therefore ٩ - \text{س}^{٢} = ٥ \quad \therefore \text{س}^{٢} = ٤$

$\therefore \text{س} = \pm ٢$

$\therefore$ المساحة $\text{م} = \int_{-٢}^{٢} [(٩ - \text{س}^{٢}) - ٥] \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \int_{-٢}^{٢} (-\text{س}^{٢} + ٤) \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \left[-\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٤\text{س} \right]_{-٢}^{٢}$

$\therefore \text{م} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(١٣) منحنيي الدالتين $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} - ٢$ ، $\text{ر(س)} = ٣ - (\text{س}+١)^{٢}$

- الحل -

بحل المعادلتين معاً $\therefore \text{س} = -٢ ، ١$

$\therefore$ المساحة $= \int_{-٢}^{١} ((٣ - (\text{س}+١)^{٢}) - (\text{س}^{٢} - ٢)) \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \int_{-٢}^{١} (٣ - (\text{س}+١)^{٢} - \text{س}^{٢} + ٢) \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \int_{-٢}^{١} (٥ - (\text{س}+١)^{٢} - \text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \left[٥\text{س} - \frac{١}{٣}(\text{س}+١)^{٣} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{-٢}^{١}$

$= ٩$ وحدة مربعة

(٤) صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته $\text{ص} = \frac{-١}{٢}(\text{س}-١)(\text{س}-٧)$ حيث س بالأمتار فإذا غطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥٠٠ جنيه. كم تكون تكلفة الزجاج

- الحل -

مساحة مدخل الفندق

$= \int_{١}^{٧} \frac{-١}{٢}(\text{س}-١)(\text{س}-٧) \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \frac{-١}{٢}\int_{١}^{٧} (\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٧) \, \text{ءس}$

$\therefore \text{م} = \frac{-١}{٢}\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٧\text{س} \right]_{١}^{٧}$

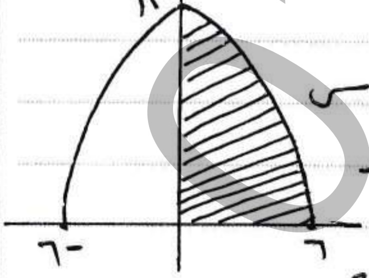
$\therefore \text{م} = ١٨$ متر مربع

$\therefore$ تكلفة المدخل $= ١٨ \times ١٥٠٠$

$= ٢٧٠٠٠$ جنيهاً

(٥) إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه وتم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د ، ر والمستقيمين س = صفر ، ص = صفر حيث $\text{د(س)} = ١٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^{٢}$ أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة

- الحل -



مساحة الممر الواحد

$= \int_{٠}^{٦} (١٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

$= \left[١٢\text{س} - \frac{١}{٩}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٦}$

$= ٤٨$ متر مربع

$\therefore$ تكلفة الخمس ممرات $= ٥ \times ٤٠٠ \times ٤٨$

$= ٩٦٠٠٠$ جنيهاً

⑥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $د(س) = \frac{٤س}{س^{٢}+١}$ والمستقيم $س = ٤$ وتقع فوق محور السينات

- الحل -

بوضع $د(س) = صفر$ ∴ $س = صفر$

∴ المساحة $= \int_{٠}^{٤} \frac{٤س}{س^{٢}+١} \, ءس$

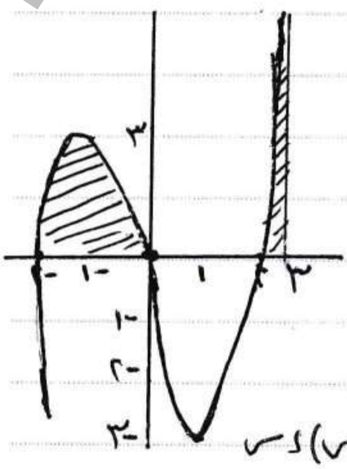
∴ $م = ٢ \int_{٠}^{٤} \frac{٢س}{س^{٢}+١} \, ءس$

∴ $م = ٢ \left[لو_{هـ} (س^{٢}+١) \right]_{٠}^{٤}$

∴ $م = ٢ \, لو_{هـ} ١٧$ وحدة مربعة

⑦ اذا كانت $د :]-\infty ، ٣] \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = س^{٣} - ٤س$ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات

- الحل -



المساحة م $= \int_{-٢}^{٠} (س^{٣} - ٤س) \, ءس + \int_{٢}^{٣} (س^{٣} - ٤س) \, ءس$

∴ $م = \left[\frac{١}{٤}س^{٤} - ٢س^{٢} \right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{١}{٤}س^{٤} - ٢س^{٢} \right]_{٢}^{٣}$

∴ $م = ٤ + \frac{٢٥}{٤} = \frac{٤١}{٤}$ وحدة مربعة

⑧ اذا كانت $د(س) = س^{٣} - ٣س + ٣$

أوجد:

① القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة $[٠ ، ٢]$

② مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمات $س = صفر$ ، $س = ٢$ ، $ص = صفر$

- الحل -

∵ $د(س) = س^{٣} - ٣س + ٣$

∴ $دَ(س) = ٣س^{٢} - ٣$ وبوضع $دَ(س) = صفر$

∴ $س = ١ ، -١$

∴ $د(٠) = ٣$ ، $د(١) = ١$ ، $د(٢) = ٥$

∴ القيمة الصغرى المطلقة $= ١$

، القيمة العظمى المطلقة $= ٥$

∴ المساحة $= \int_{٠}^{٢} (س^{٣} - ٣س + ٣) \, ءس$

∴ $م = \left[\frac{١}{٤}س^{٤} - \frac{٣}{٢}س^{٢} + ٣س \right]_{٠}^{٢}$

∴ $م = ٤$ وحدة مربعة

⑨ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$ والمستقيمين $س = صفر$ ، $ص = صفر$

- الحل -

∵ $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$ ∴ $\sqrt{ص} = ١ - \sqrt{س}$

∴ $ص = ١ - ٢\sqrt{س} + س$ وبوضع ص = صفر

∴ $س = ١$

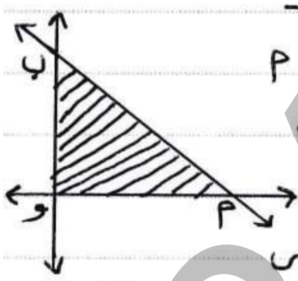
∴ المساحة $= \int_{٠}^{١} (١ - ٢س^{\frac{١}{٢}} + س) \, ءس$

∴ $م = \left[س - \frac{٤}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}س^{٢} \right]_{٠}^{١}$

∴ $م = \frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

(١٠) باستخدام التكامل المحدد اثبت أن مساحة المثلث الذى طول قاعدته يساوى أ وارتفاعه يساوى ب هى $\frac{1}{2}$ أ ب

-الحل-



أى مثلث طول قاعدته أ وارتفاعه ب مساحته تساوى مساحة المثلث القائم الذى طول ضلعى القائمة فيه أ ، ب على الترتيب علن حساب مساحته بإيجاد المساحة أسفل المستقيم الذى معادلته $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$

∴ $ص = \frac{-ب}{أ} س + ب$

∴ المساحة $= \int_{0}^{أ} \left(\frac{-ب}{أ} س + ب\right) ء س$

∴ $م = \left[\frac{-ب}{2أ} س^2 + ب س\right]_{0}^{أ}$

∴ $م = \frac{-ب}{2أ} \times أ^2 + ب أ = \frac{-1}{2} أ ب + أ ب$

∴ $م = \frac{1}{2} أ ب$

(١١) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومنحنى الدالة ر : حيث

$د(س) = س^3 - 3س^2 + 5$ ، $ر(س) = س + 2$

- الحل -

نعين الاحداثيات السينية لنقط التقاطع وذلك بوضع $د(س) = ر(س)$

∴ $س^3 - 3س^2 + 5 = س + 2$

∴ $س^3 - 3س^2 - س + 3 =$ صفر

∴ $س^2(س - 3) - (س - 3) =$ صفر

∴ $(س - 3)(س^2 - 1) =$ صفر

∴ $(س - 3)(س - 1)(س + 1) =$ صفر

∴ $س = 3$ ، $س = 1$ ، $س = -1$

∴ مساحة المنطقة المطلوبة

$= \left|\int_{-1}^{1} [د(س) - ر(س)] ء س\right| + \left|\int_{1}^{3} [د(س) - ر(س)] ء س\right|$

$= \left|\int_{-1}^{1} (س^3 - 3س^2 - س + 3) ء س\right| + \left|\int_{1}^{3} (س^3 - 3س^2 - س + 3) ء س\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{4} س^4 - س^3 - \frac{1}{2} س^2 + 3س\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{1}{4} س^4 - س^3 - \frac{1}{2} س^2 + 3س\right]_{1}^{3}\right|$

$= \left|\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\right| + \left|\frac{-9}{4} - \frac{7}{4}\right| = 4 + 4$

$= 8$ وحدات مربعة

(١٢) أوجد المساحة المحدودة بالمنحنى $ص = س(س - 1)^2$ ومحور السينات

-الحل-

بوضع ص = صفر ∴ س = صفر ، ١

∴ المساحة $= \int_{0}^{1} س(س - 1)^2 ء س$

∴ $م = \int_{0}^{1} س(س^2 - 2س + 1) ء س$

∴ $م = \int_{0}^{1} (س^3 - 2س^2 + س) ء س$

∴ $م = \left[\frac{1}{4} س^4 - \frac{2}{3} س^3 + \frac{1}{2} س^2\right]_{0}^{1}$

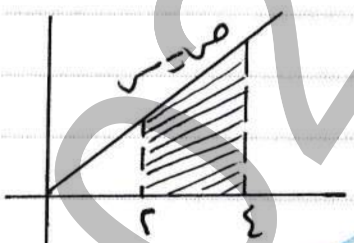
∴ $م = \frac{1}{12}$ وحدة مربعة

- تمارين عامة -

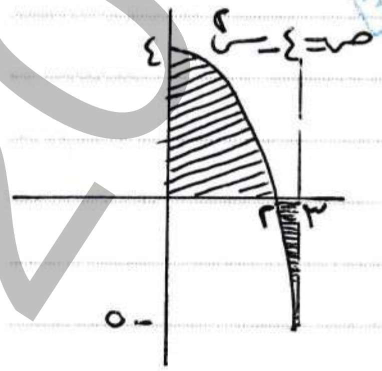
① أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة ص وفوقه الفترة المعطاة للدالة ص = ٣ س² فوق الفترة [-٣ ، ١]

② اكتب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة المظللة في كل مما يأتي واحسب قيمته

(١)



(٢)



③ أوجد في كل مما يأتي مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

(١) المنحنى ص = ٥ - س² ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١

(٢) المنحنى ص = ٦ س - س² والمستقيم ص = صفر

(٣) المنحنى ص = ٣ + ٢ س - س³ والمستقيمات س = -١ ، س = ٤ ، ص = صفر

(٤) المنحنى ص = هـ^س والمستقيمين س = صفر ، س = لو_هـ ٣

(٥) المنحنيين ص = س² ، ص = ٢ - س

(٦) المنحنى ص = س² - س والمستقيم ص = ٢ س والمستقيمين س = -٢ ، س = ٣

(٧) المنحنى ص = √س ، المستقيم ص = س - ٢ ومحور الصادات

(٨) المنحنيين ص = ٩ - س² ، ص = س² + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣

④ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س³ - ٦ س² + ٨ س ومحور السينات

⑤ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) = (٣ - س) (س - ١)² ومحور الإحداثيات حيث د(س) ≥ صفر

⑥ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د :
د(س) = (س - ١) (س - ٢) (س - ٣)
والمستقيمين س = ٤ ، ص = صفر
حيث د(س) ≥ صفر

حجوم الأجسام الدورانية

الجسم الدوراني :

هو الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها يسمى محور الدوران فمثلاً :

(١) اذا دارت منطقة على شكل مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة كان الجسم الناتج أسطوانة

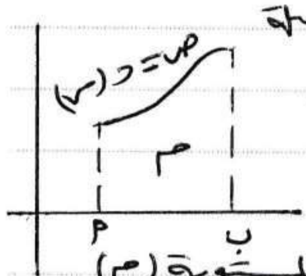
(٢) اذا دارت منطقة على شكل نصف دائرة حول قطرها دورة كاملة كان الجسم الناتج كرة

(٣) اذا دارت منطقة على شكل مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعي القائمة دورة كاملة كان الجسم الناتج مخروط دائري قائم

(١) حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

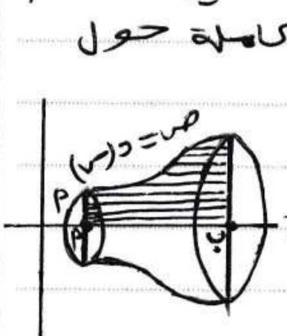
(أ) الدوران حول محور السينات

لنفرض د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] ، د(س) ≥ صفر لكل س ∈ [أ ، ب]



اذا دارت المنطقة المستوية (م) المحصورة بين منحنى الدالة ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات

ولنفرض ح هو حجم الجسم الدوراني الناشئ فإن

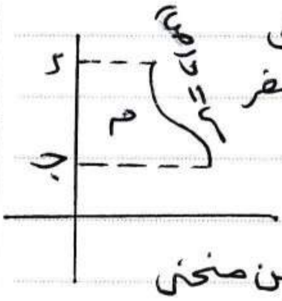


$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}^2 \, \text{د س}$$

$$\therefore \text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)}]^2 \, \text{د س}$$

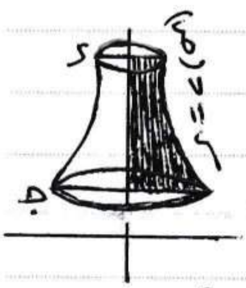
(ب) الدوران حول محور الصادات

لنفرض د دالة متصلة على [جـ ، ء] ، د(ص) ≥ صفر لكل ص ∈ [جـ ، ء]



اذا دارت المنطقة المستوية م المحصورة بين منحنى الدالة س = د(ص) ومحور الصادات والمستقيمين ص = جـ ، ص = ء دورة كاملة حول محور الصادات

ونفرض ح هو حجم الجسم الدوراني الناشئ فإن

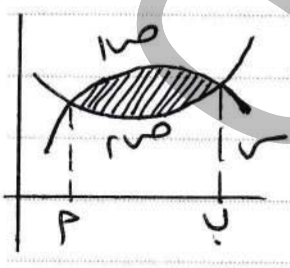


$$\text{ح} = \pi \int_{\text{جـ}}^{\text{ء}} \text{س}^2 \, \text{د ص}$$

$$\therefore \text{ح} = \pi \int_{\text{جـ}}^{\text{ء}} [\text{د(ص)}]^2 \, \text{د ص}$$

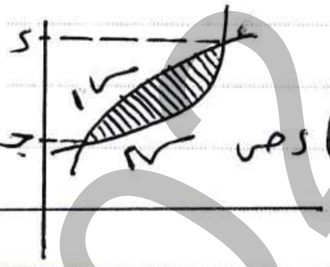
(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين

(أ) اذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين $\text{ص}_1 = \text{د(س)}$ ، $\text{ص}_2 = \text{ر(س)}$ حيث $\text{ص}_1 \geq \text{ص}_2$ لكل س ∈ [أ ، ب] دورة كاملة حول محور السينات فإن الاحداثيين السينيين لنقطتي التقاطع للمنحنيين هما حدود التكامل أ ، ب حيث أ < ب ويكون



$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ص}_1^2 - \text{ص}_2^2) \, \text{د س}$$

(ب) اذا دارت المنطقة المحدودة بالمنحنيين المتقاطعين $س_1 = د(ص)$ ، $س_2 = ر(ص)$ حيث $س_1 > س_2$ لكل $ص \in [جـ ، د]$ دورة كاملة حول محور الصادات فإن الاحداثيين الصاديين لنقطتي تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل جـ ، د حيث جـ < د ويكون



$$ح = \pi \int_{جـ}^{د} (س_1^2 - س_2^2) \, ء ص$$

- أمثلة محلولة -

① أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات في كل مما يأتي:

① ص = س ، س = ٣ ، ص = صفر

- الحل -

$$ح = \pi \int_{0}^{3} ص^2 \, ءس = \pi \int_{0}^{3} س^2 \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \left[\tfrac{1}{3} س^3\right]_{0}^{3} = 9\pi \text{ وحدة حجم}$$

② ص = ٣ − س ، س = صفر ، ص = صفر

- الحل -

$$ح = \pi \int_{0}^{3} ص^2 \, ءس = \pi \int_{0}^{3} (3 - س)^2 \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \left[\tfrac{-1}{3} (3 - س)^3\right]_{0}^{3}$$

$$= 9\pi \text{ وحدة حجم}$$

③ $د(س) = س^2 + 1$ ، ص = صفر ، س = −١ ، س = ١

- الحل -

$$ح = \pi \int_{-1}^{1} ص^2 \, ءس = \pi \int_{-1}^{1} (س^2 + 1)^2 \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \int_{-1}^{1} (س^4 + 2س^2 + 1) \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \left[\tfrac{1}{5} س^5 + \tfrac{2}{3} س^3 + س\right]_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{56}{15} \pi \text{ وحدة حجم}$$

④ $ص = \sqrt{س + 5}$ ، ص = صفر ، س = ١ ، س = ٣

- الحل -

$$ح = \pi \int_{1}^{3} ص^2 \, ءس = \pi \int_{1}^{3} (س + 5) \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \left[\tfrac{1}{2} س^2 + 5س\right]_{1}^{3}$$

$$= 14\pi \text{ وحدة حجم}$$

⑤ $ص = \frac{1}{س}$ ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = صفر

- الحل -

$$ح = \pi \int_{1}^{4} ص^2 \, ءس = \pi \int_{1}^{4} \tfrac{1}{س^2} \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \int_{1}^{4} س^{-2} \, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \left[- س^{-1}\right]_{1}^{4}$$

$$= \tfrac{3}{4} \pi \text{ وحدة حجم}$$

(٦) $ص = هـ^{س}$ ، ص = صفر ، س = صفر ، س = ٢

- الحل -

$ح = \pi \int_{٠}^{٢} ص^{٢} \, دس = \pi \int_{٠}^{٢} هـ^{٢س} \, دس$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{١}{٢} هـ^{٢س} \right]_{٠}^{٢}$

$= \pi \left(\frac{١}{٢} هـ^{٤} - \frac{١}{٢} \right)$ وحدة حجم

(٧) $ص = |س|$ ، س = −٢ ، س = ٤ ، ص = صفر

- الحل -

$ح = \pi \int_{-٢}^{٤} ص^{٢} \, دس = \pi \int_{-٢}^{٤} (|س|)^{٢} \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{-٢}^{٤} س^{٢} \, دس = \pi \left[\frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{-٢}^{٤}$

$\therefore ح = ٢٤ \pi$ وحدة حجم

حل آخر:

$ص = |س| = \begin{cases} س & ، س \geq صفر \\ -س & ، س < صفر \end{cases}$

$\therefore ح = \pi \int_{-٢}^{٠} (-س)^{٢} \, دس + \pi \int_{٠}^{٤} (س)^{٢} \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{-٢}^{٠} س^{٢} \, دس + \pi \int_{٠}^{٤} س^{٢} \, دس$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{-٢}^{٠} + \pi \left[\frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{٤}$

$\therefore ح = \frac{٨}{٣} \pi + \frac{٦٤}{٣} \pi = ٢٤ \pi$

وحدة حجم

(٨) ص = جا ٢س ، ص = صفر ، س = صفر ، $س = \frac{\pi}{٢}$

- الحل -

$ح = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ص^{٢} \, دس = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا^{٢} ٢س \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} جتا ٤س \right) دس$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{١}{٢} س - \frac{١}{٨} جا ٤س \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$\therefore ح = \frac{١}{٤} \pi^{٢}$ وحدة حجم

(٢) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات في كل مما يأتي:

(١) ص = س ، ص = ١ ، س = صفر

- الحل -

$ح = \pi \int_{٠}^{١} س^{٢} \, دص = \pi \int_{٠}^{١} ص^{٢} \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{١}{٣} ص^{٣} \right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٣} \pi$ وحدة حجم

(٢) س + ٢ص = صفر ، س = صفر ، ص = صفر ، ص = ٣

- الحل -

$\because$ س + ٢ص = صفر $\therefore$ س = −٢ص

$\therefore ح = \pi \int_{٠}^{٣} س^{٢} \, دص = \pi \int_{٠}^{٣} ٤ص^{٢} \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{٤}{٣} ص^{٣} \right]_{٠}^{٣} = ٣٦ \pi$ وحدة حجم

③ $ص = س^2$ ، $س = صفر$ ، $ص = ٨$ وتقع في الربع الأول

- الحل -

$\because ص = س^2$ يقطع الصادات في صفر

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{8} س^2 \, دص = \pi \int_{0}^{8} ص \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{1}{2} ص^2\right]_{0}^{8} = ٣٢\pi$ وحدة حجم

④ $ص = \sqrt{س}$ ، $س = صفر$ ، $ص = ١$ ، $ص = ٢$

- الحل -

$\because ص = \sqrt{س}$ $\therefore س = ص^2$

$\therefore ح = \pi \int_{1}^{2} س^2 \, دص = \pi \int_{1}^{2} ص^4 \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[\frac{1}{5} ص^5\right]_{1}^{2} = \frac{31}{5}\pi$ وحدة حجم

⑤ $س ص = ٤$ ، $ص = ١$ ، $ص = ٤$ ، $س = صفر$

- الحل -

$\because س ص = ٤$ $\therefore س = \frac{4}{ص}$

$\therefore ح = \pi \int_{1}^{4} س^2 \, دص = \pi \int_{1}^{4} \frac{16}{ص^2} \, دص$

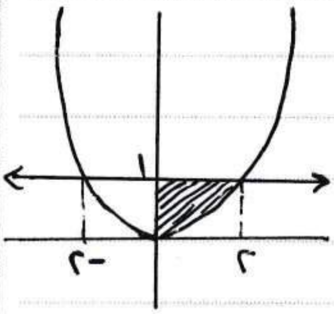
$\therefore ح = \pi \int_{1}^{4} ١٦ ص^{-2} \, دص = \pi \left[-١٦ ص^{-1}\right]_{1}^{4}$

$\therefore ح = ١٢\pi$ وحدة حجم

③ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{1}{4} س^2$ ، والمستقيم $ص = ١$ والواقعة في الربع الأول دورة كاملة حول :

① محور الصادات ② محور السينات

- الحل -



① حول محور الصادات

$ح = \pi \int_{0}^{1} س^2 \, دص$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{1} ٤ص \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[٢ص^2\right]_{0}^{1} = ٢\pi$ وحدة حجم

② حول محور السينات

عند $ص = ١$ فإن $س = ٢$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} ص^2 \, دس = \pi \int_{0}^{2} (١ - ص^2) \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} \left(١ - (\frac{1}{4} س^2)^2\right) دس$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} \left(١ - \frac{1}{16} س^4\right) دس$

$\therefore ح = \pi \left[س - \frac{1}{80} س^5\right]_{0}^{2} = \frac{8}{5}\pi$ وحدة حجم

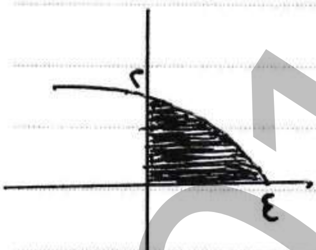
④ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \sqrt{٤ - س}$ ومحوري الإحداثيات دورة كاملة حول

① محور السينات ② محور الصادات

- الحل -

$\because ص = \sqrt{٤ - س}$

ومنها $س = ٤ - ص^2$



① $ح = \pi \int_{0}^{4} ص^2 \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{4} (٤ - س) \, دس$

$\therefore ح = \pi \left[٤س - \frac{1}{2} س^2\right]_{0}^{4} = ٨\pi$ وحدة حجم

④ $ح = \pi \int_{0}^{2} س^2 \, دص$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} (4 - ص^2)^2 \, دص$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} (16 - 8ص^2 + ص^4) \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[16ص - \frac{8}{3}ص^3 + \frac{1}{5}ص^5\right]_{0}^{2}$

$\therefore ح = \frac{256}{15}\pi$ وحدة حجم

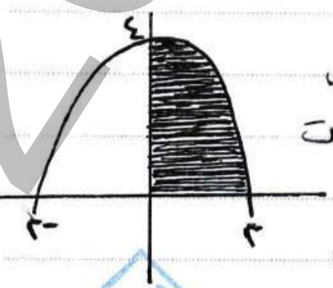
⑤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = 4 - س^2$ والجزأين الموجبين من محوري الاحداثيات دورة كاملة حول:

① محور السينات ② محور الصادات

- الحل -

$\because ص = 4 - س^2$

ومنها $س^2 = 4 - ص$



① حول محور السينات

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} ص^2 \, دس$

$ح = \pi \int_{0}^{2} (4 - س^2)^2 \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} (16 - 8س^2 + س^4) \, دس$

$\therefore ح = \pi \left[16س - \frac{8}{3}س^3 + \frac{1}{5}س^5\right]_{0}^{2}$

$\therefore ح = \frac{256}{15}\pi$ وحدة حجم

② حول محور الصادات

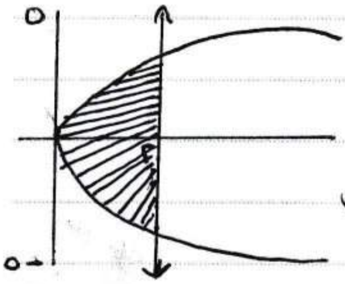
$ح = \pi \int_{0}^{4} س^2 \, دص = \pi \int_{0}^{4} (4 - ص) \, دص$

$\therefore ح = \pi \left[4ص - \frac{1}{2}ص^2\right]_{0}^{4}$

$= 8\pi$ وحدة حجم

⑥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص^2 = 8س$ والمستقيم $س = 2$ نصف دورة حول محور السينات

- الحل -



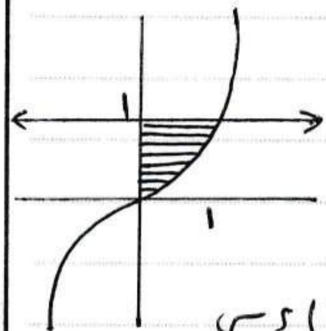
$ح = \pi \int_{0}^{2} ص^2 \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{2} 8س \, دس$

$\therefore ح = \pi \left[4س^2\right]_{0}^{2} = 16\pi$ وحدة حجم

⑦ إذا كان حجم الجسم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^3$ والمستقيمين $س =$ صفر ، $ص = 1$ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك أسطواني الشكل طوله ٤٢ وحدة فما طول نصف قطر السلك

- الحل -



$ص_1 = 1$ ، $ص_2 = س^3$

$\because ص_1 > ص_2$ في $[0 ، 1]$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{1} (ص_1^2 - ص_2^2) \, دس$

$\therefore ح = \pi \int_{0}^{1} (1 - س^6) \, دس$

$\therefore ح = \pi \left[س - \frac{1}{7}س^7\right]_{0}^{1}$

$\therefore ح = \frac{6}{7}\pi$ وحدة حجم

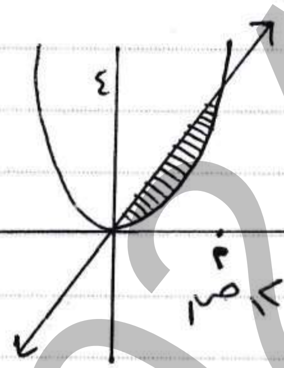
$\because$ حجم الاسطوانة $= \pi$ نق^2 ع

$\therefore \pi$ نق$^2 \times 42 = \frac{6}{7}\pi$

$\therefore$ نق $= \frac{1}{7}$

⑧ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^{٢}$ والمستقيم $ص = ٢س$ دورة كاملة حول محور السينات

-الحل-



$ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٢س$

يتقاطعان عند $س = صفر$ ، $س = ٢$

، في هذه الفترة $ص_{٢} > ص_{١}$

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٢} (ص_{٢}^{٢} - ص_{١}^{٢})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٢} ((٢س)^{٢} - (س^{٢})^{٢})\, ءس$$

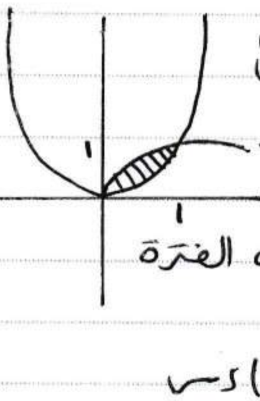
$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٢} (٤س^{٢} - س^{٤})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \left[\frac{٤}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٥}س^{٥}\right]_{٠}^{٢}$$

$$\therefore ح = \frac{٦٤}{١٥} ط \text{ وحدة حجم}$$

⑨ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $ص = \sqrt{س}$ ، $ص = س^{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات

-الحل-



$ص_{١} = \sqrt{س}$ ، $ص_{٢} = س^{٢}$

يتقاطعان عند $س = صفر$ ، $س = ١$

$\because ص_{١} > ص_{٢}$ في هذه الفترة

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{١} (ص_{١}^{٢} - ص_{٢}^{٢})\, ءس$$

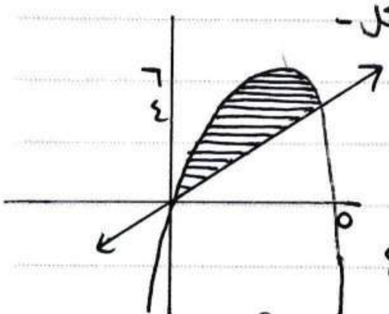
$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{١} (س - س^{٤})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \left[\frac{١}{٢}س^{٢} - \frac{١}{٥}س^{٥}\right]_{٠}^{١}$$

$$\therefore ح = \frac{٣}{١٠} ط \text{ وحدة حجم}$$

⑩ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = ٥س - س^{٢}$ والمستقيم $ص = س$ دورة كاملة حول محور السينات

-الحل-



$ص_{١} = ٥س - س^{٢}$ ، $ص_{٢} = س$

يتقاطعان عند $س = صفر$ ، $س = ٤$

وفي هذه الفترة $ص_{١} > ص_{٢}$

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٤} (ص_{١}^{٢} - ص_{٢}^{٢})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٤} ((٥س - س^{٢})^{٢} - س^{٢})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٤} (٢٥س^{٢} - ١٠س^{٣} + س^{٤} - س^{٢})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \int_{٠}^{٤} (٢٤س^{٢} - ١٠س^{٣} + س^{٤})\, ءس$$

$$\therefore ح = ط \left[٨س^{٣} - \frac{٥}{٢}س^{٤} + \frac{١}{٥}س^{٥}\right]_{٠}^{٤}$$

$$\therefore ح = \frac{٣٨٤}{٥} ط \simeq ٧٦,٨ ط \text{ وحدة حجم}$$

⑪ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{٤}{س}$ والمستقيم $س + ص = ٥$ دورة كاملة حول محور السينات

-الحل-

$ص_{١} = \frac{٤}{س}$ ، $ص_{٢} = ٥ - س$

يتقاطعان في $س = ١$ ، $س = ٤$

وتكون ص١ ≥ ص٢ في هذه الفترة

∴ $ح = \pi \int_{1}^{4} (\text{ص}_2^2 - \text{ص}_1^2)\, \text{د}س$

∴ $ح = \pi \int_{1}^{4} \left((5 - س)^2 - \left(\frac{4}{س}\right)^2\right) \text{د}س$

∴ $ح = \pi \int_{1}^{4} \left(25 - 10س + س^2 - \frac{16}{س^2}\right) \text{د}س$

∴ $ح = \pi \left[25س - 5س^2 + \frac{1}{3}س^3 + 16س^{-1}\right]_{1}^{4}$

∴ $ح = 9\pi$ وحدة حجم

(١٢) إذا كانت م هي المنطقة المحدودة بالمنحنى س ص = ٤ + س² والمستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = صفر أوجد

(١) مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة

(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات

- الحل -

∴ س ص = ٤ + س² ∴ $ص = \frac{4}{س} + س$

(١)

∴ المساحة = $\int_{1}^{4} ص\, \text{د}س = \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{س} + س\right) \text{د}س$

∴ المساحة = $\left[4 \text{لو}_{هـ} |س| + \frac{1}{2}س^2\right]_{1}^{4}$

∴ المساحة = $4 \text{لو}_{هـ} 4 + \frac{15}{2}$

(٢) $ح = \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{س} + س\right)^2 \text{د}س$

∴ $ح = \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{16}{س^2} + 8 + س^2\right) \text{د}س$

∴ $ح = \pi \left[-16س^{-1} + 8س + \frac{1}{3}س^3\right]_{1}^{4}$

$= 57\pi$ وحدة حجم

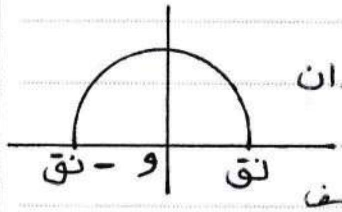
(١٣) باستخدام التكامل اثبت أن:

(١) حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق³

(٢) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق² ع

(٣) حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}\pi$ نق² ع

- الحل -



(١) الكرة تنشأ عن دوران نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق حول محور السينات

∴ معادلتها س² + ص² = نق²

∴ ص² = نق² − س²

∴ حجم الكرة = $\pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} ص^2\, \text{د}س$

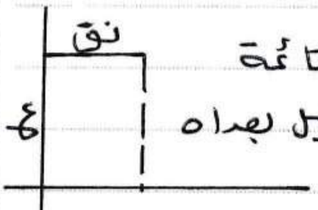
∴ حجم الكرة = $2\pi \int_{0}^{\text{نق}} ص^2\, \text{د}س$

∴ حجم الكرة = $2\pi \int_{0}^{\text{نق}} (\text{نق}^2 - س^2)\, \text{د}س$

$= 2\pi \left[\text{نق}^2 س - \frac{1}{3}س^3\right]_{0}^{\text{نق}}$

$= 2\pi \left[\text{نق}^3 - \frac{1}{3}\text{نق}^3\right]$

∴ حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق³



(٢) الأسطوانة الدائرية القائمة تنشأ عن دوران مستطيل بعداه نق ، ع حول محور الصادات

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{ع} س^2\, \text{د}ص$

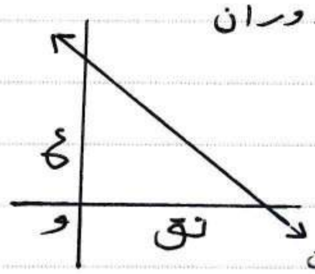
$= \pi \int_{0}^{ع} \text{نق}^2\, \text{د}ص$

$= \pi \left[\text{نق}^2 ص\right]_{0}^{ع}$

$= \pi$ نق² ع

(13) المخروط الناشئ عن دوران مستقيم معادلته

$\frac{س}{نق} + \frac{ص}{ع} = 1$ حول محور الصادات



$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{ع} س^2 \, ءص$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{ع} \left(نق - \frac{نق\, ص}{ع}\right)^2 ءص$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{ع} \left(نق^2 - 2\frac{نق^2 ص}{ع} + \frac{نق^2 ص^2}{ع^2}\right) ءص$

$\therefore$ الحجم $= \pi \left[نق^2 ص - \frac{نق^2 ص^2}{ع} + \frac{1}{3}\frac{نق^2 ص^3}{ع^2}\right]_{0}^{ع}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \left[نق^2 ع - نق^2 ع + \frac{1}{3} نق^2 ع\right]$

$\therefore$ الحجم $= \frac{1}{3} \pi \, نق^2 ع$

(14) أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س^2$ ، $ص = س^3$ حول محور الصادات دورة كاملة

- الحل -

$\because س_1 = \sqrt{ص}$ ، $س_2 = \sqrt[3]{ص}$

والمنحنيان يتقاطعان في

$ص = صفر$ ، $ص = 1$

$\because س_2 > س_1$ في هذه الفترة

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_{0}^{1} (س_2^2 - س_1^2) ءص$

$= \pi \int_{0}^{1} (ص^{\frac{2}{3}} - ص) ءص$

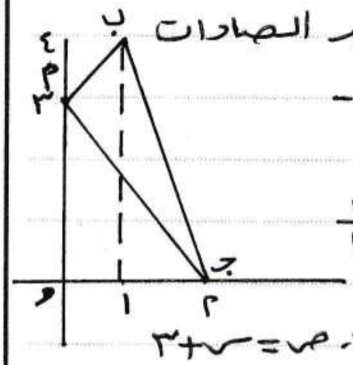
$= \pi \left[\frac{3}{5} ص^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} ص^2\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{10} \pi$ وحدة حجم

(15) إذا كانت أ(0 ، 3) ، ب(1 ، 4) ، ج(2 ، 0) أوجد باستخدام التكامل

① مساحة سطح Δ أ ب ج

② حجم الجسم الناشئ من دوران Δ أ و ج دورة كاملة حول محور الصادات



- الحل -

معادلة $\overleftrightarrow{أب}$:

$\frac{ص-3}{س-0} = \frac{4-3}{1-0} = \frac{1}{1}$

$\therefore ص - 3 = س \quad \therefore ص = س + 3$

معادلة $\overleftrightarrow{بج}$:

$\frac{ص-0}{س-2} = \frac{4-0}{1-2} = -4$

$\therefore ص = -4س + 8$

معادلة $\overleftrightarrow{أج}$:

$\frac{ص-3}{س-0} = \frac{3-0}{0-2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore ص = \frac{-3}{2} س + 3$

$\therefore$ مساحة سطح Δ أ ب ج

= مساحة Δ أ ب ء + مساحة Δ ء ب ج

$= \int_{0}^{1} \left((س+3) - (\frac{-3}{2}س + 3)\right) ءس$

$+ \int_{1}^{2} \left((-4س+8) - (\frac{-3}{2}س + 3)\right) ءس$

$= \int_{0}^{1} \frac{5}{2} س \, ءس + \int_{1}^{2} (\frac{-5}{2} س + 5) ءس$

$= \left[\frac{5}{4} س^2\right]_{0}^{1} + \left[\frac{-5}{4} س^2 + 5س\right]_{1}^{2}$

$= \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$ وحدة مساحة

② $\because ص = \frac{-3}{2} س + 3$

$\therefore س = \frac{-2}{3} ص + 2$

∴ الحجم الناشئ من دوران Δ م و جـ حول محور الصادات

$= \pi \int_{0}^{3} س^2 \, دص = \pi \int_{0}^{3} (\frac{-2}{3} ص + 2)^2 \, دص$

$∴ ح = \pi \left[\frac{-1}{2} (\frac{-2}{3} ص + 2)^3 \right]_{0}^{3}$

∴ ح = ٤π وحدة حجم

- تمارين عامة -

① أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات في كل مما يأتي:

① ص = ٢س + ١ ، ص = صفر ، س = صفر ، س = ٤

② ص = $س^2$ ، ص = صفر ، س = ١ ، س = ٥

③ د(س) = قاس ، ص = صفر ، س = صفر ، س = $\frac{\pi}{4}$

② أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات في كل مما يأتي:

① ص = $س^2$ + ١ ، س = صفر ، ص = ٥ وتقع في الربع الأول

② ص = $س^3$ ، س = صفر ، ص = ٨

③ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $س^2$ ومحور السينات والمستقيم س = ٢ دورة كاملة حول:
① محور السينات ② محور الصادات

④ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٥س - $س^2$ والمستقيم ص = ٤ دورة كاملة حول محور السينات

⑤ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص^2$ = ٨س ، ص = $س^2$ دورة كاملة حول محور السينات

⑥ أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٤ - $س^2$ ، والمستقيم ٢س + ص = ٤ دورة كاملة حول محور الصادات

⑦ إذا كانت النقط أ(-٢ ، صفر) ، ب(١ ، ٥) ، جـ(٤ ، ٠) هي رؤوس Δ أ ب جـ فأوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران Δ أ ب جـ دورة كاملة حول محور السينات