التفاضل و التكامل

الفصل الأول : النهايات و الاتصال

الفصل الثانى : الاشتقاق

الفصل الثالث : تطبيقات التفاضل

الفصل الرابع : سلوك الدالة و رسم منحناها

الفصل الخامس : التكامل

الفصل الأول :

النهايات و الاتصال

أولاً : النهايات

j نهاية كثيرات الحدود

إذا كانت " (س) دالة كثيرة حدود فإن : $\lim_{س \leftarrow ٩}$ " (س) = " (٩) بالتعويض المباشر

---

k نهاية الدوال الكسرية الجبرية

إذا كانت " (س) دالة كسرية جبرية فإنه لمعرفة $\lim_{س \leftarrow ٩}$ " (س) نوجد " (٩) فيكون هناك ٣ حالات :

[٩] $\lim_{س \leftarrow ٩}$ " (س) = عدد حقيقى D *" يكون هو نهاية الدالة "*

[ب] $\lim_{س \leftarrow ٩}$ " (س) = $\frac{\text{عدد حقيقى b صفر}}{\text{صفر}}$ = m D *" الدالة ليس لها نهاية "*

[{] $\lim_{س \leftarrow ٩}$ " (س) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = كمية غير معينة

D *" يلزم التخلص من العامل الصفرى (س ـ ٩) من البسط و المقام إما بالتحليل أو بالقسمة المطولة ، ثم نوجد " (٩) "*

قوانين التحليل :

÷ $س^٢ - ص^٢ = (س - ص) (س + ص)$

÷ $س^٣ - ص^٣ = (س - ص) (س^٢ + س ص + ص^٢)$

÷ $س^٣ + ص^٣ = (س + ص) (س^٢ - س ص + ص^٢)$

---

l نهاية الدوال الكسرية الجبرية التى تحتوى على جذور تربيعية

إذا كانت " (س) دالة كسرية جبرية تحتوى على جذور تربيعية و كان " (٩) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ يلزم التخلص من العامل الصفرى (س ـ ٩) بضرب البسط و المقام فى مرافق البسط أو المقام أو كليهما

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

m نهاية الدوال على صورة النظرية

إذا كانت " (س) على الصورة $\frac{س^ن - أ^ن}{س - أ}$ فإن :

õ $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن \times أ^{ن-1}$

õ $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

---

n نهاية الدوال المثلثية

õ $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{جا\, أ\, س}{ب\, س} = \frac{أ}{ب}$ Z $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{جا\, س}{س} = 1$

õ $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{ظا\, أ\, س}{ب\, س} = \frac{أ}{ب}$ Z $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{ظا\, س}{س} = 1$

تمارين (١) : مراجعة على إيجاد نهاية دالة عند نقطة (كتاب لامى)

أوجد قيمة كلاً من النهايات الآتية :

■ (١) : $\underset{س \leftarrow 2}{نهـــا} (2س^3 - 5س^2 + 7س + 4)$ [١٤]

■ (٢) : $\underset{س \leftarrow -1}{نهـــا} \frac{2س^3 + 7س + 9}{س^2 + 3}$ [صفر]

■ (٣) : $\underset{س \leftarrow \sqrt{5}}{نهـــا} \sqrt{9 - س^2}$ [٢]

■ (٤) : $\underset{س \leftarrow ط/4}{نهـــا}$ حاس حتاس [$\frac{1}{2}$]

■ (٥) : $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا}$ (ظاس + قاس) [١]

■ (٦) : $\underset{س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{10س}{س^2 + 2س}$ [٥]

■ (٧) : $\underset{س \leftarrow 4}{نهـــا} \frac{س^2 - 2س - 8}{س^2 - 16}$ [$\frac{3}{4}$]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٨) السعيدية : $\lim\limits_{\text{س} \to -3} \dfrac{\text{س}^2 + 8\text{س} + 15}{\text{س}^2 - 4\text{س} - 21}$ $\left[-\dfrac{1}{5}\right]$

■ (٩) السودان (٦٦) : $\lim\limits_{\text{س} \to 7} \dfrac{2\text{س}^2 - 9\text{س} - 35}{3\text{س}^2 - 19\text{س} - 14}$ $\left[\dfrac{19}{23}\right]$

■ (١٠) : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{(\text{س} + 3)^2 - 4\text{س}^2}{\text{س}^2 - 3\text{س}}$ $[-4]$

■ (١١) مصر (٦٦) : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{3}{2}} \dfrac{8\text{س}^3 - 27}{2\text{س}^2 + 3\text{س} - 9}$ $[6]$

■ (١٢) : $\lim\limits_{\text{س} \to -3} \dfrac{(\text{س} + 2)^3 + 1}{\text{س}^2 - 9}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

■ (١٣) : $\lim\limits_{\text{س} \to 9} \dfrac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - 12}{\text{س} - 9}$ $\left[\dfrac{7}{6}\right]$

■ (١٤) : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{3^{2\text{س}} + 4(3)^{\text{س}} - 5}{3^{2\text{س}} - 1}$ $[3]$

■ (١٥) مصر (٦٨) : $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^3 - \text{س}^2 + 5\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 1}$ $[3]$

■ (١٦) : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{2\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 4}{\text{س}^3 - 2\text{س} - 4}$ $\left[\dfrac{6}{5}\right]$

■ (١٧) : $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\sqrt{4 + \text{س} + \text{س}^2} - 2}{\text{س} + 1}$ $\left[-\dfrac{1}{4}\right]$

■ (١٨) : $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\sqrt{2\text{س} + 5} - \sqrt{\text{س} + 4}}{\text{س} + 1}$ $\left[\dfrac{1}{6}\sqrt{3}\right]$

■ (١٩) : $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 15}{\sqrt{2\text{س} - 1} - \sqrt{\text{س} + 4}}$ $[12]$

■ (٢٠) : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}(\text{س} - 3)}{\text{س} - \sqrt{\text{س} + 1} - 1}$ $[4]$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

أوجد قيمة كلاً من النهايات الآتية مستخدما النظرية :

نهـا (سⁿ − أⁿ) ÷ (س − أ) = ن أ^(ن−١) عندما س ← أ ، أ ، تتائجها.

(١) : $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٦٢٥}{\text{س} - ٥}$ [٥٠٠]

(٢) : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^{١٩} + ١}{\text{س} + ١}$ [١٩]

(٣) : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٣} - ٨}$ [$\frac{٢٠}{٣}$]

(٤) : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^{-٩} + ١}{\text{س}^{-١٣} + ١}$ [$\frac{٩}{١٣}$]

(٥) : $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}^{٧} + ٢١٨٧}{\text{س}^{٣} + ٢٧}$ [١٨٩]

(٦) : $\lim\limits_{\text{س} \to \sqrt{٣}} \dfrac{\text{س}^{٦} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣}$ [٢٧]

(٧) : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^{-٥} - ٣^{-٥}}{\text{س}^{-٩} - ٣^{-٩}}$ [٤٥]

(٨) : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{١٩/٢} - \text{س}^{١/٢}}{\text{س}^{٩/٢} - \text{س}^{١/٢}}$ [$\frac{٩}{٤}$]

(٩) : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{١}{٢}} \dfrac{٤\text{س}^{٥} - \frac{١}{٨}}{٣\text{س} - \frac{٣}{٢}}$ [$\frac{٥}{١٢}$]

(١٠) : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{٣} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - \text{س}}$ [٨]

(١١) : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{(\text{س}^{١٧} + ١)(\text{س}^{٩} + ١)}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$ [١٥٣]

(١٢) : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{(\sqrt[٥]{\text{س}} - ١)(\sqrt[٨]{\text{س}} - ١)}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} + ١}$ [$\frac{١}{١٠}$]

(١٣) : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{(٢\text{س} - ٣)^{٥} - ٢٤٣}{\text{س} - ٣}$ [٨١٠]

(١٤) : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\sqrt[٥]{٤ - \text{س}} - ١}{\text{س} - ٣}$ [$-\frac{١}{٥}$]

(١٥) : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt[٣]{٣\text{س} + ٨} - ٢}{\text{س}}$ [$\frac{١}{٤}$]

(١٦) : $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{(٢ + ٣\text{هـ})^{٨} - ٢٥٦}{٤\text{هـ}}$ [٧٦٨]

■ (١٧) : $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{(١ - ٢\text{هـ})^{٧}} - ١}{٧\text{هـ}}$ $\left[-\dfrac{١}{٢}\right]$

■ (١٨) : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢ - \text{س})^{٥} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$ $[-٣]$

■ (١٩) : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٤]{\text{س}} - ٤}{\text{س} - ١}$ $\left[\dfrac{٥}{٤}\right]$

■ (٢٠) : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣}(\text{س} - ٢)^{٥} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$ $[١٦٢]$

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية باستخدام النظرية نهـا $\dfrac{\text{حاس}}{\text{س}} = ١$ عندما س ← ٠ ونتائجها

■ (١) : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}٨\text{س}}{٤\text{س}}$ $[٢]$

■ (٢) : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حاس}}{\text{طا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)}$ $[٢]$

■ (٣) : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١٥}{\text{س}} \text{ حا } \dfrac{\text{س}}{٥}$ $[٣]$

■ (٤) : $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } ٢(\text{س} - ٥)}{\text{س} - ٥}$ $[٢]$

■ (٥) : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}٥\text{س}}{\text{طا}٣\text{س}}$ $\left[\dfrac{٥}{٣}\right]$

■ (٦) : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } (\text{س} - ٣)^{٢}}{\text{س} - ٣}$ [صفر]

■ (٧) : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} ١٥\text{س}^{٢} \text{ قتا}٣\text{س طتا}٥\text{س}$ $[١]$

■ (٨) : نهـا $\dfrac{\text{طتا س}}{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}}$ عندما س ← $\dfrac{\text{ط}}{٢}$ $[١]$

■ (٩) : نهـا $\dfrac{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}}{\text{جتا س}}$ عندما س ← $\dfrac{\text{ط}}{٢}$ $[١]$

■ (١٠) : نهـا س (طتا٢س + قتا٣س) عندما س ← ٠ $\left[\dfrac{٥}{٦}\right]$

■ (١١) : نهـا س حا $\dfrac{٣}{\text{س}}$ عندما س ← ∞ $[٣]$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (١٢) : نهــا $\frac{\text{س حا ٣ س}}{\text{حا ٥ س طا ٢ س}}$ عندما س ← ٠ [$\frac{٣}{١٠}$]

■ (١٣) : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{٤ س + حا ٩س − طا ٧ س}}{\text{حا ٢ س}}$ [٣]

■ (١٤) : نهــا $\frac{\text{٥ س + طا ٢ س}}{\text{حا ٣ س − طا س}}$ عندما س ← ٠ [$\frac{٧}{٢}$]

■ (١٥) : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ $\frac{\text{١ − حتا ٢ س}}{\text{س}^٢}$ [٢]

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

إذا كانت " (س) معرفة بقاعدتين حول نقطة ﻡ فإن :

الدالة " (س) تؤول إلى النهاية ل عندما س ! ﻡ إذا و فقط إذا كان :

(١) نهايتها اليمنى " (ﻡ$^+$) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ﻡ}^+}{\text{نهــا}}$ " (س) = ل

(٢) نهايتها اليسرى " (ﻡ$^-$) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ﻡ}^-}{\text{نهــا}}$ " (س) = ل

(٣) نهايتها اليمنى " (ﻡ$^+$) = نهايتها اليسرى " (ﻡ$^-$) أى أن : " (ﻡ$^+$) = " (ﻡ$^-$) = ل

ملاحظة هامة :

عند إيجا د نهاية دالة عند نقطة لا يشترط أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة .

/ **مثال** (١) :

إذا كانت " (س) = $\begin{cases} \text{س + ١} & \text{عندما س) ٢} \\ \text{س − ١} & \text{عندما س) ٢} \end{cases}$ فأوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ " (س)

$ **الحل** : " (٢$^+$) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}}$ " (س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}}$ (س + ١) = ٢ + ١ = ٣

" (٢$^-$) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}}$ " (س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}}$ (س − ١) = ٢ − ١ = ١

• " (٢$^+$) b " (٢$^-$) € الدالة ليس لها نهاية عندما س ! ٢

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

/ **مثال** (٢) :

إذا كانت " (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\,|\,\text{س}\,|}{\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} + ٣}$ أوجد :

أولاً : $\lim_{\text{س} \to ٠}$ " (س)   ثانياً : $\lim_{\text{س} \to -٣}$ " (س)   ثالثاً : $\lim_{\text{س} \to ٣}$ " (س)

$ **الحل** :

نعيد تعريف الدالة بعد فك المقياس

• | س | = $\begin{cases} \text{س} & \text{س F ٠} \\ -\text{س} & \text{س) ٠} \end{cases}$

€ " (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣} & \text{س F ٠} \\ \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣} & \text{س) ٠} \end{cases}$

• العدد صفر هو نقطة اختلاف التعريف للدالة

• " (٠^{+}) = $\frac{٠}{٣}$ = ٠ ، " (٠^{-}) = $\frac{٠}{٣}$ = ٠ ، € $\lim_{\text{س} \to ٠}$ " (س) = $\boxed{\text{صفر}}$ # أولاً

$\lim_{\text{س} \to -٣}$ " (س) = $\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}$ *نلاحظ أننا ا ستخدمنا القاعدة اليسرى للدالة*

= $\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س} (\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣) (\text{س} + ١)}$ = $\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}}{(\text{س} + ١)}$ = $\boxed{\frac{٣}{٢}}$ # ثانياً

$\lim_{\text{س} \to ٣}$ " (س) = $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}$ *نلاحظ أننا ا ستخدمنا القاعدة اليمنى للدالة*

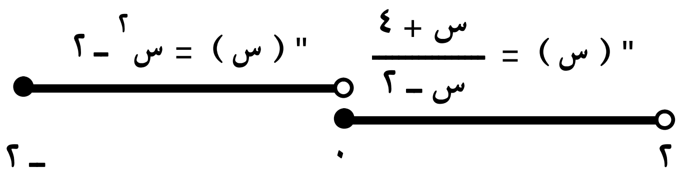
= $\frac{٩ - ٩}{٩ + ١٢ + ٣}$ = $\frac{\text{صفر}}{٢٤}$ = $\boxed{\text{صفر}}$ # ثالثاً

/ **مثال** (٣) :

إذا كانت " (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢ & \text{عندما } -٢ \text{ G س) ٠} \\ \frac{\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢} & \text{عندما ٠ G س) ٢} \end{cases}$ ابحث وجود

أولاً : $\lim_{\text{س} \to -٢}$ " (س)   ثانياً : $\lim_{\text{س} \to ٠}$ " (س)   ثالثاً : $\lim_{\text{س} \to ٢}$ " (س)

$ **الحل** :



أولاً : عندما س o - ٢

• الدالة " معرفة على يمين العدد - ٢ فقط

€ يكتفى ببحث النهاية اليمنى فقط

" (٢^{+}) = $\lim_{\text{س} \to -٢^{+}}$ (س^{٢} - ٢) = ٤ - ٢ = ٢ € $\lim_{\text{س} \to -٢}$ " (س) = $\boxed{٢}$ # أولاً

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

ثانياً : عندما س o صفر

• قاعدة تعريف الدالة تتغير على جانبى س = صفر

€ يجب بحث وجود النهايتين اليمنى و اليسرى و المقارنة بينهما

" ($^+$٠) = نهـــا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\left(\frac{س + ٤}{س - ٢} \right)$ = $\frac{٤}{-٢}$ = -٢

" ($^-$٠) = نهـــا$_{س \leftarrow ٠^-}$ (س^٢ - ٢) = ٠ - ٢ = -٢

• " ($^+$٠) = " ($^-$٠) = -٢ € نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ = $\boxed{-٢}$ # ثانياً

ثالثاً : عندما س o ٢

• الدالة " معرفة على يسار العدد ٢ فقط € يكتفى ببحث النهاية اليسرى فقط

" ($^-$٢) = نهـــا$_{س \leftarrow ٢^-}$ $\left(\frac{س + ٤}{س - ٢} \right)$ = $\frac{٢ + ٤}{٢ - ٢}$ = $\frac{٦}{صفر}$ غير معرف € نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ " (س) غير موجودة # ثالثاً

/ مثال (٤) :

إذا كانت " (س) = $\begin{cases} ٣ س - ٢ & ، \quad س) -١ \\ A س + ب & ، \quad -١ (س) ٣ \\ ٦ - س & ، \quad س) ٣ \end{cases}$

لها نهاية عند س = -١ ، عند س = ٣ فأوجد قيمتى A ، ب

$ الحل : • الدالة " (س) لها نهاية عند س = -١ € " ($^+$-١) = " ($^-$-١)

€ A (-١) + ب = ٣ (-١) - ٢ € - A + ب = -٣ - ٢ € $\boxed{- A + ب = -٥}$ Z (١)

، • الدالة " (س) لها نهاية عند س = ٣ € " ($^+$٣) = " ($^-$٣)

€ ٦ - ٣ = A (٣) + ب € $\boxed{٣ A + ب = ٣}$ Z (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) € ٤ A = ٨ Z $\boxed{A = ٢}$ ، بالتعويض فى (١) € $\boxed{ب = -٣}$

/ مثال (٥) :

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{٧ س + ٢} - ٣}{س^٢ - ١} & ، \quad س > ١ \\ \dfrac{جا \frac{ط س}{٢} - ط}{٨ ظا \frac{ط س}{٤} - ط} & ، \quad س < ١ \end{cases}$ أوجد نهـا$_{س \leftarrow ١}$ د(س)

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

$ الحل :

$$\because \text{د}(1^+) = \underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+3}-2}{\text{س}^2-1} \times \frac{\sqrt{\text{س}+3}+2}{\sqrt{\text{س}+3}+2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)(\sqrt{\text{س}+3}+2)} = \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{، } \because \text{د}(1^-) = \underset{\text{س}\to 1^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{س}}{8\,\text{ظا}\,\frac{5\text{ط}}{4}\,\text{س}} \quad \text{بالتعويض المباشر} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{ط}}{2}}{8\,\text{ظا}\,\frac{5\text{ط}}{4}} = \frac{1}{8}$$

$$\because \text{د}(1^+) = \text{د}(1^-) = \frac{1}{8} \qquad \therefore \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \frac{1}{8}$$

تمارين (٢) : على إيجاد نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة (كتاب الوزارة)

(١) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{س} \geq 1 \\ 3 - 2\text{س} & \text{س} < 1 \end{cases}$ فابحث وجود $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

(٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3 + \text{س} & \text{س} > 2 \\ 2\text{س}^2 + 1 & \text{س} < 2 \end{cases}$ فابحث وجود $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

(٣) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} & \text{س} > 1 \\ \dfrac{2}{5 - \text{س}} & \text{س} < 1 \end{cases}$ فابحث وجود $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

(٤) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} + \dfrac{|\text{س} - 3|}{3 - \text{س}} & \text{س} < 3 \\ \text{س} + 4 & \text{س} > 3 \end{cases}$ فأبحث وجود $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

(٥) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + \text{س}}{|\text{س} + 1|}$ فأبحث وجود كل من :

أولاً : $\underset{\text{س}\to -3}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ ثانيًا : $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ ثالثًا : $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٦) إذا كان د(س) = س |س − ٢| + ١

أولاً: أثبت أن: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س)   ثانياً– أبحث وجود: $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}$ د(س)

(٧) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا } ٣ \text{ س}}{\text{س}} & \text{س} < ٠ \\ \text{جتا } ٣ \text{ س} + ٢ & \text{س} > ٠ \end{cases}$ فأبحث وجود $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

(٨) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٥ \text{ س} + \text{ظا } ٢ \text{ س}}{٦ \text{ س} + \text{جا س}} & \text{س} < ٠ \\ \text{جتا س} & \text{س} > ٠ \end{cases}$ فأبحث وجود $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

(٩) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ٢\text{س} & -٢ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} - ٤ & ١ \le \text{س} < ٤ \\ \text{س} + ٣ & ٤ \le \text{س} < ٧ \end{cases}$ فابحث وجود:

أولاً: $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}$ د(س)   ثانياً: $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}}$ د(س)

ثالثاً: $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س)   رابعاً: $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}$ د(س)

(١٠) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣ \text{ س}}{\text{ظا س}} & -\dfrac{\text{ط}}{٣} < \text{س} < ٠ \\ ٣ \text{ جتا س} & ٠ < \text{س} < \dfrac{\text{ط}}{٣} \end{cases}$ فأبحث وجود:

أولاً: $\underset{\text{س}\to -\frac{\text{ط}}{٣}}{\text{نهـا}}$ د(س)   ثانياً: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)   ثالثاً: $\underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٣}}{\text{نهـا}}$ د(س)

(١١) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} & \text{س} < ١ \\ \text{ظا } \dfrac{\text{ط س}}{٤} & \text{س} > ١ \end{cases}$

فأبحث وجود $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س)

تمارين (٣) : على إيجاد نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة (دليل التقويم)

ابحث وجود نهاية لكل من الدوال الآتيه عند النقط المبينه :

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢}{٣} & \text{عندما س} < ١ \\ ٢\text{س} - \frac{١}{٢} & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند $\text{س} = ١$

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} - ٢ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٥\text{س} - ٤ & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٢$

(٤) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٣}{\text{س}} + ١ & \text{عندما س} < ٣ \\ \frac{٥ - \text{س}}{\text{س} - ٣} & \text{عندما س} > ٣ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٣$

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما س} < ٠ \\ \frac{٥}{٣} & \text{عند } ٠ < \text{س} < ٢ \\ \frac{٥}{\text{س} + ١} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$ ، عند $\text{س} = ٢$

(٦) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}} & \text{عندما س} < ٠ \\ -٣ & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

(٧) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٨\text{س}^{٣} - ٢٧}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣} & \text{عندما س} < \frac{٣}{٢} \\ ٤\text{س}^{٢} - ١ & \text{عندما س} > \frac{٣}{٢} \end{cases}$ عند $\text{س} = \frac{٣}{٢}$

(٨) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١} & \text{عندما س} < ١ \\ \frac{٣}{\text{س} + ٥} & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند $\text{س} = ١$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٩) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س + \sqrt{س} - 6}{س - 4} & \text{عندما } س > 4 \\ \dfrac{5}{س} & \text{عندما } س < 4 \end{cases}$$ عند س = ٤

(١٠) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س + \sqrt{س}}{\sqrt{س}} & \text{عندما } س > 0 \\ س^{2} + 1 & \text{عندما } س < 0 \end{cases}$$ عند س = ٠

(١١) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س - 1}{\sqrt{3س - 2} - \sqrt{س}} & \text{عندما } س > 1 \\ 2س^{2} - 1 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$$ عند س = ١

(١٢) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2 + س} - \sqrt{1 + 2س}}{س - 1} & \text{عندما } س > 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}\, س & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$$ عند س = ١

(١٣) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + 1} - 2}{\sqrt{س + 6} - 3} & \text{عندما } س > 3 \\ \dfrac{1}{2}\, س & \text{عندما } س < 3 \end{cases}$$ عند س = ٣

(١٤) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{14} - 2س^{7} + 1}{س^{2} - 2س + 1} & \text{عندما } س > 1 \\ 7س + 2 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$$ عند س = ١

(١٥) $$د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{س^{2}} - 2\sqrt[3]{س} + 1}{(س - 1)^{2}} & \text{عندما } س > 1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$$ عند س = ١

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(١٦) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س} + \sqrt{س - ١} - ١}{\sqrt{س^{٢} - ١}} & \text{عندما س > ١} \\[2ex] \dfrac{س - \sqrt{س}}{س - ١} & \text{عندما س < ١} \end{cases}$ عند س = ١

(١٧) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢^{س} + ٢^{٢-س} - ٦}{١ - ٢^{٢-س}} & \text{عندما س > ٢} \\[2ex] ٣س - ٤ & \text{عندما س < ٢} \end{cases}$ عند س = ٢

(١٨) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س - ١}{\sqrt[٣]{٢٦ + س} - ٣} & \text{عندما س > ١} \\[2ex] ٢س^{٢} + ١ & \text{عندما س < ١} \end{cases}$ عند س = ١

(١٩) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٥} + ٢٤٣}{س + ٣} & \text{عندما س > -٣} \\[2ex] ٥س^{٤} + ٤س + ١٢ & \text{عندما س < -٣} \end{cases}$ عند س = -٣

(٢٠) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س^{٧} + ١٢٨} & \text{عندما س > -٢} \\[2ex] \dfrac{١}{١٤} & \text{عندما س < -٢} \end{cases}$ عند س = -٢

(٢١) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٩} + ٨١\sqrt{٣}}{س^{٦} - ٢٧} & \text{عندما س > } -\sqrt{٣} \\[2ex] \dfrac{١}{٢} س^{٥} & \text{عندما س < } -\sqrt{٣} \end{cases}$ عند س = $-\sqrt{٣}$

(٢٢) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{(٣ + ٢س)^{٥} - ٢٤٣}{٣س} & \text{عندما س > ٠} \\[2ex] ٢٧٠ & \text{عندما س < ٠} \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٣) $د(س) = \dfrac{س}{|س|}$ عند س = ٠

(٢٤) $د(س) = س^{٢} + \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عند $س = ٣$

(٢٥) $د(س) = \begin{cases} س\,|س| + ٢ & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٢٦) $د(س) = |س^{٢} - ٤س + ٣|$ عند $س = ١$ ، عند $س = ٣$

(٢٧) $د(س) = \begin{cases} ٦ - |٢س + ٤| & \text{عندما } س < ١ \\ س^{٢} - ٤س + ٣ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

عند $س = -٢$ ، عند $س = ٣$ ، عند $س = ١$

(٢٨) $د(س) = \begin{cases} \frac{حا\,٢س}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٢\,حتا\,س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٢٩) $د(س) = \begin{cases} \frac{حا\,٥س}{طا\,س} & \text{عندما } س < ٠ \\ حتا\,٢س + ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٣٠) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{طا\,\frac{س}{٢}}{حا\,\frac{س}{٢}} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٢}{٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٣١) $د(س) = \begin{cases} \frac{حا\,(س - ٢)^{٢}}{س - ٢} & \text{عندما } س < ٢ \\ ٤ - ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

(٣٢) $د(س) = \begin{cases} \frac{حا\,(٢س - ٦)}{س - ٣} & \text{عندما } س < ٣ \\ ٢\,حا\,\frac{س\,ط}{٦} & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$ عند $س = ٣$

(٣٣) $د(س) = \begin{cases} ٥ - حتا\,٣س & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٧س - طا\,٣س}{٢س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٣٤) د (س) =
- (حا س + ٣ س) / (٢ س − طا س) عندما س > ٠
- ٣ / ٢ عندما س < ٠

عند س = ٠

(٣٥) د (س) =
- ٢ س طتا س عندما س > ٠
- ٢ حتا س − ١ عندما س < ٠

عند س = ٠

(٣٦) د (س) =
- ٢ س / طا س عندما − ط / ٢ > س > ٠
- ٢ حتا س عندما ٠ > س > ط / ٢

عند س = − ط / ٢ ، عند س = ٠ ، عند س = ط / ٢

(٣٧) د (س) =
- (٢ س + حا ٢ س) / حا ٣ س عندما − ط / ٦ > س > ٠
- ١ / ٢ + حتا ٣ س عندما ٠ > س > ط / ٦

عند س = − ط / ٦ ، عند س = ٠ ، عند س = ط / ٦

(٣٨) د (س) =
- حا س + ٢ حتا س عندما س > ٠
- ٢ س طتا س عندما س < ٠

عند س = ٠

(٣٩) د (س) =
- طا^٢ ٢ س / (س حا ٣ س) عندما س > ٠
- ٢ / ٣ عندما س < ٠

عند س = ٠

(٤٠) د (س) =
- ($\sqrt{\text{س} + ٩}$ − ٣) / س عندما س > ٠
- (حا ٢ س − س) / طا ٦ س عندما س < ٠

عند س = ٠

(٤١) د (س) =
- ٢ حا س / (ط − س) عندما س > ط
- ١ + حتا س عندما س < ط

عند س = ط

(٤٢) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{حتا } س}{س \text{ حا } س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \dfrac{٣}{٢} - \text{حتا } \dfrac{س}{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٤٣) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{حتا } ٢ س}{\text{طا}^٢ س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \text{قا } (ط - س) + ١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٤٤) $د(س) = \begin{cases} ٢ - ٢ \text{ حا } س & \text{عندما } س < \dfrac{ط}{٢} \\ \dfrac{\frac{ط}{٢} - س}{\text{حتا } س} & \text{عندما } س > \dfrac{ط}{٢} \end{cases}$ عند س = $\dfrac{ط}{٢}$

(٤٥) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢ \text{ طتا } س}{\frac{ط}{٢} - س} & \text{عندما } س < \dfrac{ط}{٢} \\ \text{حا } س + ٢ & \text{عندما } س > \dfrac{ط}{٢} \end{cases}$ عند س = $\dfrac{ط}{٢}$

(٤٦) $د(س) = \begin{cases} س (\text{قتا } ٢ س + \text{طتا } ٣ س) & \text{عندما } س < ٠ \\ \text{حتا } س - \dfrac{١}{٦} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٤٧) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا } ٨ س - \text{حا } (- ٢ س)}{س (\text{حتا } ٤ س + \text{حتا } ٢ س)} & \text{عندما } س < ٠ \\ \dfrac{٥}{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٤٨) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{طا } ٢ س}{\text{لو}_٢ ٨^س} & \text{عندما } س < ٠ \\ س + \dfrac{٢}{٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٤٩) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[٣]{س \text{ حا}^٢ ٨ س}}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٣ \text{ حتا } س + ١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٥٠) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{أ س^٢ + ب س - ٥}{س - ١} & \text{عندما } س < ١ \\ أ س + ٥ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

لها نهاية = ٨ عند س = ١ أوجد قيمة كل من أ ، ب

تمارين (٤) : على إيجاد نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة (كتاب لامى)

ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة وعين هذه النهاية إذا كان لها وجود:

(١) : د (س) = س + √س عند س = ٠ ، عند س = ١ [صفر، ٢]

(٢) : د (س) = √(٥ − س) عند س = ١ ، عند س = ٥ ، عند س = ٩

[٢ ، ٠ ، لايوجد]

(٣) : د (س) = √(٤ − س²) عند س = −٢ ، عند س = ٠ ، عند س = ٢

[صفر، ٢ ، صفر]

(٤) : د (س) = √(٥ + ٤ س − س²) عند س = −١ ، عند س = ٢ ، عند س = ٥

[صفر، ٣ ، صفر]

(٥) : د (س) = { ٣/٢ عندما س < ١ ، ٢س − ٣/٢ عندما س > ١ } عند س = ١ [لا يوجد]

(٦) : د (س) = { ٣/٢ س + ٢ عندما س < ٢ ، ٥ عندما س > ٢ } عند س = ٢ [٥]

(٧) : د (س) = { ٣ − ٢ س عندما س < ١ ، ٤ س − ٣ عندما س > ١ } عند س = ١ [١]

(٨) : د (س) = { ٤/٣ س − ٥ عندما س < ٣ ، ٧ − ٢/٣ س عندما س > ٣ } عند س = ٣ [لا يوجد]

(٩) : د (س) = { ٣ − ٢ س عندما س < ٠ ، ٣/(٢ س + ١) عندما س > ٠ } عند س = ٠ [٣]

(١٠) : د (س) = { س² − ٢ عندما س < ٣/٢ ، ٧ − ٤ س عندما س > ٣/٢ } عند س = ٣/٢ [لا يوجد]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (١١) : د (س) = $\begin{cases} \text{٣ س + ٧} & \text{عندما س < −٢} \\ \text{٥ − س}^{٢} & \text{عندما س > −٢} \end{cases}$ عند س = −٢ [١]

■ (١٢) : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢}\text{ + ٢س} & \text{عندما س < −٢} \\ \text{٤ − س}^{٢} & \text{عندما س > −٢} \end{cases}$ عند س = −٢ [صفر]

■ (١٣) : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣}\text{ − ٤} & \text{عندما س < ٢} \\ \frac{٣}{٢}\text{س + ١} & \text{عندما س > ٢} \end{cases}$ عند س = ٢ [٤]

■ (١٤) : د (س) = $\begin{cases} \sqrt{\text{٤ − س}^{٢}} & \text{عندما س < ٠} \\ \text{س}^{٢}\text{ + ٢} & \text{عندما س > ٠} \end{cases}$ عند س = ٠ [٢]

■ (١٥) : د (س) = $\begin{cases} \text{٣ س − ١} & \text{عندما س} \le \text{٢} \\ \frac{٣}{\text{س − ٢}} & \text{عندما س > ٢} \end{cases}$ عند س = ٢ [لا يوجد]

■ (١٦) : د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{٥}\text{(س + ٣)} & \text{عندما س < ٢} \\ \frac{٢}{\text{٣س − ٤}} & \text{عندما س > ٢} \end{cases}$ عند س = ٢ [١]

■ (١٧) : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{٢ س − ١}}{\text{س}} & \text{عندما س < −١} \\ \text{٣ − (س + ١)}^{٢} & \text{عندما س > −١} \end{cases}$ عند س = −١ [٣]

■ (١٨) : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣}\text{ + ١} & \text{عندما س < ٠} \\ \frac{٤}{٣} & \text{عندما ٠ < س < ٢} \\ \frac{٤}{\text{س + ١}} & \text{عندما س > ٢} \end{cases}$ عند س = ٠ ، عند س = ٢

[لا يوجد ، $\frac{٤}{٣}$]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (١٩) : $د(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & \text{عندما } س < ٢ \\ \dfrac{س^٢ - ٣س + ٢}{س - ٢} & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [١]

■ (٢٠) : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} & \text{عندما } س < ٥ \\ ٤ - \dfrac{٣}{٤}س & \text{عندما } س > ٥ \end{cases}$ عند س = ٥ $[\frac{١}{٤}]$

■ (٢١) : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[٧]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} & \text{عندما } س < ١ \\ س^٢ - \dfrac{٤}{٧} & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ عند س = ١ $[\frac{٣}{٧}]$

■ (٢٢) : $د(س) = ٣|س| - س + ٥$ عند س = ٠ [٥]

■ (٢٣) : $د(س) = |٢س - ٣| + ٥ - ٢س$ عند $س = \frac{٣}{٢}$ [٢]

■ (٢٤) : $د(س) = ٥س - |٣ - س|$ عند س = ٣ [١٥]

■ (٢٥) : $د(س) = ٣س + ٤ - |س - ٥|$ عند س = ٥ [١٩]

■ (٢٦) : $د(س) = \frac{٣|س|}{س} + ٥س$ عندما س = ٠ [لا يوجد]

■ (٢٧) : $د(س) = \frac{س^٢}{|س|} + ٨$ عند س = ٠ [٨]

■ (٢٨) : $د(س) = \frac{|٢س + ٣|}{٢س + ٣} + ٤$ عند $س = -\frac{٣}{٢}$ [لا يوجد]

■ (٢٩) : $د(س) = \begin{cases} س|س| + ٤ & \text{عندما } س < ٠ \\ \dfrac{|س|}{س} + ٣ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [٤]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٣٠) : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{٤س} + |\text{س}^{٣}|}{\text{س}}$ عند س = ٠ [٤]

■ (٣١) : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\,|\text{س} - ٢| + (\text{س} - ٢)\,|\text{س}|$
عند س = ٠ ، عند س = ١ ، عند س = ٢ [٠ ، ٠ ، ٠]

■ (٣٢) : $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} + ٣| - |\text{س} - ٥|$
عند س = −٣ ، س = ٠ ، س = ٥ [−٨ ، −٢ ، ٨]

■ (٣٣) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}\,|\text{س} - ٢| & \text{عندما س} < ٢ \\ \dfrac{\text{٢س}^{٢} - \text{٧س} + ٦}{|\text{س} - ٢|} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [لا يوجد]

■ (٣٤) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س} + ١)^{٢} + ٣ & \text{عندما س} < ٠ \\ \dfrac{\text{حا ٤س}}{\text{س}} & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [٤]

■ (٣٥) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}(\text{س} - ١)^{٢}}{\text{س} - ١} & \text{عندما س} < ١ \\ ٣ - \text{٢س}^{٢} & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١ [لا يوجد]

■ (٣٦) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}^{٢}\,\text{٣س}}{\text{س}^{٢}} & \text{عندما س} < ٠ \\ ٧ + ٢\,\text{حتا س} & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [٩]

■ (٣٧) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{٩س} - \text{حا ٥س}}{\text{س}} & \text{عندما س} < ٠ \\ ٣ + \text{حتا ٢س} & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [٤]

■ (٣٨) : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{حا}(\text{س} - ٣)^{٢}}{|\text{س} - ٣|}$ عند س = ٣ [صفر]

■ (٣٩) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{طا س} - ٥\text{س}}{٣\text{س} + \text{حا س}} & \text{عندما س} > ٠ \\ ٣\text{س} - ١ & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [-١]

■ (٤٠) : د (س) = $\begin{cases} ٣ - ٢\,\text{حا س} & \text{عندما س} > \dfrac{\text{ط}}{٢} \\ \dfrac{\text{حتا س}}{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}} & \text{عندما س} < \dfrac{\text{ط}}{٢} \end{cases}$ عند س = $\dfrac{\text{ط}}{٢}$ [١]

■ (٤١) : د (س) = $\begin{cases} ٥ - ٢\text{س} & \text{عندما } -١ < \text{س} < ٢ \\ \dfrac{١٣}{٣\text{س} - ٧} & \text{عندما } ٢ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

عند س = -١ ، عند س = ٢ ، عند س = ٥ [٧ ، لايوجد ، ١٣/٨]

■ (٤٢) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا}\,٣(\text{س} - \text{ط})}{\text{س} - \text{ط}} & \text{عندما } \dfrac{\text{ط}}{٢} < \text{س} < \text{ط} \\ ٢ - \text{حتا س} & \text{عندما ط} \leq \text{س} < ٢\text{ط} \end{cases}$

عند س = $\dfrac{\text{ط}}{٢}$ ، عند س = ط ، عند س = ٢ط [-٢/ط ، ٣ ، ١]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

ثانياً : الاتصال

أولاً : اتصال الدالة عند نقطة :

تعريف : تكون الدالة د(س) متصلة عند النقطة س = أ إذا توفرت الشروط الثلاثة الآتية معاً :

(١) الدالة معرفة عند س = أ — أي أن د(أ) = قيمة حقيقية

(٢) الدالة لها نهاية عندما س ← أ — أي أن نهـا (س ← أ) د(س) = قيمة حقيقية

(٣) قيمة الدالة = نهايتها — أي أن د(أ) = نهـا (س ← أ) د(س)

ملاحظة هامة :

- إذا كانت د(س) متصلة عند س = أ نستنتج أن د(أ) = نهـا (س ← أ) د(س)
- تكون الدالة د(س) غير متصلة عند س = أ إذا لم يتحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة .

مثال (١) : ابحث اتصال الدالة د عند س = ١ حيث د(س) = { س³ − ١ عندما س < ١ ؛ ٢س / (س + ١) عندما س > ١ }

الحل : ∵ د(س) غير معرفة عند س = ١

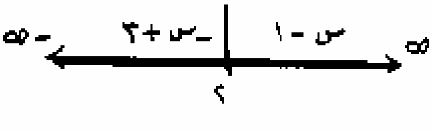
∴ د(١) ليس لها وجود ∴ د(س) غير متصلة عند س = ١

مثال (٢) : ابحث اتصال الدالة د(س) = |س − ٢| + ١ عند س = ٢

الحل : ابحث اتصال الدالة د(س) = |س − ٢| + ١ عند س = ٢

نفك المقياس ∴ د(س) = { س − ٢ + ١ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٢ + ١ ، س < ٢ }

∴ د(س) = { س − ١ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٣ ، س < ٢ }



د(٢) = ٢ − ١ = $\boxed{١}$ ← (١)

د(٢⁺) = نهـا (س ← ٢⁺) (س − ١) = ١ ، د(٢⁻) = نهـا (س ← ٢⁻) (−س + ٣) = ١

∴ نهـا (س ← ٢) د(س) = $\boxed{١}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ د(٢) = نهـا (س ← ٢) د(س) = ١ ∴ الدالة متصلة عند س = ٢

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

مثال (٣) : ابحث اتصال الدالة
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢ & \text{عندما س} \le ٠ \\ ٢\text{س} + ١ & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$$
عند س = صفر

الحل :

$$٢\text{س}+١ \;\Big|\; \text{س}^{٢}-٢$$
$$٠$$

$$\text{د}(٠) = (٠)^{٢} - ٢ = \boxed{-٢}$$
$$\text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} (٢\text{س} + ١) = ٢(٠) + ١ = \boxed{١}$$
∵ $\text{د}(٠^{+}) \ne \text{د}(٠)$ ∴ د(س) غير متصلة عند س = ٠

- **ملاحظة :** لا داعي لإيجاد $\text{د}(٠^{-})$ حيث أنه شرط الاتصال عند س = صفر :
$$\text{د}(٠) = \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-}) = \text{عدد حقيقي}$$
، ∵ $\text{د}(٠) \ne \text{د}(٠^{+})$ ∴ الدالة د غير متصلة عند س = صفر

مثال (٤) : ابحث الاتصال عند س = ٢ للدالة
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & ، \text{س} \le ٢ \\ \frac{١}{٢}\text{س} + ٢ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

الحل :

$$\frac{١}{٢}\text{س}+٢ \;\Big|\; \text{س}^{٢}-١$$
$$٢$$

$$\text{د}(٢) = ٢^{٢} - ١ = \boxed{٣}$$
نلاحظ تغير تعريف الدالة حول س = ٢ ∴ يجب إيجاد النهاية اليمنى واليسرى
$$\text{د}(٢^{+}) = \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٢}\text{س} + ٢\right) = \frac{١}{٢}(٢) + ٢ = ٣$$
$$\text{د}(٢^{-}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ١) = ٤ - ١ = ٣ \quad ∴ \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \boxed{٣}$$
∵ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٢)$ ∴ الدالة متصلة عند س = ٢

مثال (٥) : ابحث اتصال الدالة د(س) حيث
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ١} & ، \text{س} \ne ١ \\ ٣ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$$
وذلك عند س = ١

الحل : $\text{د}(١) = \boxed{٣}$

$$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٣\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)} = ٣ + ٥ = \boxed{٨}$$
∵ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) \ne \text{د}(١)$ ∴ الدالة غير متصلة عند س = ١

مثال (٦) : أوجد قيمة الثابت ك لتكون الدالة د متصلة عند س = ٣ حيث :
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} & \text{عندما س} \ne ٣ \\ ٢\text{ك} + ٥ & \text{عندما س} = ٣ \end{cases}$$

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

$ الحل:

$\text{د}(٣) = ٢\text{ك} + ٥$

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٣} - ٣^{٣}}{\text{س} - ٣} = \frac{٣}{١} \times (٣)^{٣-١} = ٣ \times ٩ = ٢٧$$

∵ الدالة متصلة عند $\text{س} = ٣$ ∴ $٢\text{ك} + ٥ = ٢٧$ ∴ $\text{ك} = ١١$

/ **مثال (٧):** ابحث اتصال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\text{س} + \text{جاس}}{\text{س}} & ، \text{س} \neq ٠ \\ \dfrac{١}{٢} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

$ الحل:

$$\text{د}(٠) = \boxed{\frac{١}{٢}} ، \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{س} + \text{جاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\left(٢ + \frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right) = ٢ + ١ = \boxed{٣}$$

∵ $\text{د}(٠) \neq \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د غير متصلة عند $\text{س} = ٠$

/ **مثال (٨):** ابحث اتصال الدالة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٥\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{س ظا}\,٣\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

$ الحل:

$$\text{د}(٠) = \boxed{٣} ، ∵ \text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١}\right) = ٣$$

$$\text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نها}}\ \frac{٥\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{س ظا}\,٣\text{س}}$$ بالقسمة بسطاً ومقاماً على $\text{س}^{٢}$

$$= \frac{٥ + ٤}{٣} = ٣ \quad ∴ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \boxed{٣}$$

∵ $\text{د}(٠) = \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-}) = ٣$ ∴ الدالة متصلة عند $\text{س} = ٠$

/ **مثال (٩):** إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - (١ + \text{ك})\text{س} + \text{ك}}{\text{س} - ١} & ، \text{س} \neq ١ \\ ٢ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$ متصلة عند $\text{س} = ١$ فأوجد قيمة ك

$ الحل:

$$∵ \text{د}(١) = \boxed{٢} \quad \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٢} - (١ + \text{ك})\text{س} + \text{ك}}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} - \text{ك})}{(\text{س} - ١)} = \boxed{١ - \text{ك}}$$

∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ١$ ∴ $\text{د}(١) = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س})$ ∴ $٢ = ١ - \text{ك}$ ∴ $\text{ك} = -١$

/ **مثال (١٠):** إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جاس جتاس}}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{\text{س جتاس}}{\text{جاس}} & ، \text{س} > ٠ \\ \text{ك} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$ متصلة عند $\text{س} = ٠$ فما قيمة ك

$ الحل:

∵ $\text{د}(\text{س})$ متصلة عند $\text{س} = ٠$ ∴ $\text{د}(٠) = \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-})$

$$\text{د}(٠) = \text{ك} ، \text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نها}}\ \frac{\text{س جتاس}}{\text{جاس}} = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتاس}}{\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)} = \frac{١}{١} = ١$$

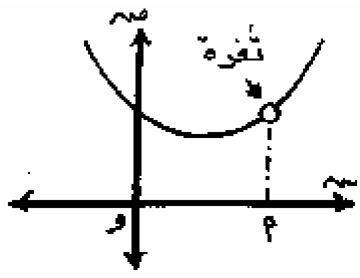
$$\text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس جتاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \text{جتاس}\right) = ١ \times ١ = ١$$

∵ الدالة متصلة ∴ $\text{ك} = ١$

إعادة تعريف الدالة " لتصبح متصلة عند س = A

عندما تكون د غير معرفة عند س = أ ، ولها نهاية ل عندما س ← أ فإن نقطة عدم الاتصال عند س = أ تسمى ثغرة . وعندئذ يمكن إعادة تعريف د وجعلها متصلة عند س = أ وذلك كما يلى :

قاعدة الدالة هي $\begin{cases} \text{د}(\text{س}) & \text{عندما س} \neq \text{أ} \\ \text{ل} & \text{عندما س} = \text{أ} \end{cases}$



فى الشكل : نقطة عدم الاتصال عند س = أ تسمى ثغرة

مثال (١١) : أعد تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ذلك ممكناً

حيث $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}{\text{س} - 3}$

الحل : نبحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣

$$\lim_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}{\text{س} - 3} = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 1)}{(\text{س} - 3)} = 3 + 1 = 4$$

إعادة تعريف د لتصبح متصلة عند س = ٣

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}{\text{س} - 3} & \text{، س} \neq 3 \\ 4 & \text{، س} = 3 \end{cases}$$

مثال (١٢) : أعد تعريف د لتصبح متصلة عند س = ٠ إذا كان ذلك ممكناً حيث $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س}| + \text{س}}{|\text{س}|}$

الحل :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{|\text{س}|}{|\text{س}|} + \frac{\text{س}}{|\text{س}|} = 1 + \frac{\text{س}}{|\text{س}|}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\text{س}}{\text{س}} & \text{عندما س} > 0 \\ 1 + \dfrac{\text{س}}{-\text{س}} & \text{عندما س} < 0 \end{cases} \qquad \therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2 & \text{عندما س} > 0 \\ 0 & \text{عندما س} < 0 \end{cases}$$

$\text{د}(0^+) = 2$ ، $\text{د}(0^-) = \text{صفر}$

$\because \text{د}(0^+) \neq \text{د}(0^-)$ ∴ الدالة د ليس لها نهاية عندما س ← ٠ .

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ٠

مثال (١٣) :

أعد تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند س = ٠ إذا كان ذلك ممكناً حيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{2\text{س} + 1}{2} & \text{عندما س} < 0 \\ \dfrac{\text{جا} \frac{1}{2}\text{س}}{\text{س}} & \text{عندما س} > 0 \end{cases}$$

$ الحل : نبحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٠

النهاية اليمنى

$$د(\cdot^{+}) = \lim_{س \to \cdot^{+}} \frac{جا \frac{1}{2} س}{س} = \frac{1}{2}$$

النهاية اليسرى

$$د(\cdot^{-}) = \lim_{س \to \cdot^{-}} \frac{2س + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\because$ $د(\cdot^{+}) = د(\cdot^{-}) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\therefore$ $\lim_{س \to \cdot} د(س) = \frac{1}{2}$

إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند س = ٠

$$د(س) = \begin{cases} \frac{2س + 1}{2} & \text{عندما } س < \cdot \\ \frac{جا \frac{1}{2} س}{س} & \text{عندما } س > \cdot \\ \frac{1}{2} & \text{عندما } س = \cdot \end{cases}$$

تمارين (٥) : على اتصال دالة عند نقطة (كتاب الوزارة)

(١) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

(أ) $د(س) = ٥ - |س - ٣|$ عند س = ٣

(ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٣ & س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(جـ) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٦} - ١}{س^{٥} - ١} & س < ١ \\ \frac{٦}{س + ٤} & س \geq ١ \end{cases}$ عند س = ١

(د) $د(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{س} - جتا س & س \neq \cdot \\ \frac{١}{٢} & س = \cdot \end{cases}$ عند س = ٠

(هـ) $د(س) = \begin{cases} \frac{جا س ظا ٢س}{س^{٢}} & س \neq \cdot \\ ٢ & س = \cdot \end{cases}$ عند س = ٠

(و) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + جا ٢س}{جا ٣س} & س \neq \cdot \\ \frac{٥}{٣} & س = \cdot \end{cases}$ عند س = ٠

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

$$(\text{ز})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{١} + \text{جا س} & \text{س} < \frac{\text{ط}}{\text{٢}} \\ \text{٢} + \left(\text{س} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}} & \text{س} \ge \frac{\text{ط}}{\text{٢}} \end{cases} \quad \text{عند س} = \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$$

(٢) أوجد قيمة ك التى تجعل كل من الدوال الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منهما :

$$(\text{أ})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{٨ س} - \text{٣}}{\text{س} - \text{٣}} & \text{س} \ne \text{٣} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{٣} \end{cases} \quad \text{عند س} = \text{٣}$$

$$(\text{ب})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{٣}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} & \text{س} \ne \text{١} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{١} \end{cases} \quad \text{عند س} = \text{١}$$

$$(\text{جـ})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{٥}} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} - \text{١}} & \text{س} \ne \text{١} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{١} \end{cases} \quad \text{عند س} = \text{١}$$

$$(\text{د})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - \text{٣})}{\text{٢ س} - \text{٦}} & \text{س} \ne \text{٣} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{٣} \end{cases} \quad \text{عند س} = \text{٣}$$

$$(\text{هـ})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جتا ٢ س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} & \text{س} \ne \text{٠} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{٠} \end{cases} \quad \text{عند س} = \text{٠}$$

$$(\text{و})\ \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جا ٣ س ظتا ٢ س} & \text{س} \ne \text{٠} \\ \text{ك} & \text{س} = \text{٠} \end{cases} \quad \text{عند س} = \text{٠}$$

(٣) أعد تعريف كلا من الدوال الآتية بحيث تكون متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها إذا كان ممكنا :

$$(\text{أ})\ \text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{٢ س} + \text{٣}} - \text{٣}}{\text{س} - \text{٣}} \quad \text{عند س} = \text{٣}$$

(ب) د (س) = $\frac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$ عند س = ٣

(جـ) د (س) = { س^{٣} + ٢ س ، س > ١ ؛ ٥ س − ١ ، س < ١ } عند س = ١

(د) د (س) = { جا س − جتا س ، س > ٠ ؛ ظا س ، س < ٠ } عند س = ٠

(هـ) د (س) = { $\frac{\text{٥ س + ظا س}}{\text{جا س}}$ ، س > ٠ ؛ ٦ جتا س ، س < ٠ } عند س = ٠

(٤) إذا كانت د (س) = { س^{٢} + أ س + ٣ ، س < ١ ؛ $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ ، س > ١ }

أوجد قيمة أ لكى يكون نهـــــا د (س) لها وجود . ثم أعد تعريف الدالة لكى تكون متصلة عند س = ١

(٥) إذا كانت د (س) = { ٣ س^{٢} − ١ ، س ≤ ٠ ؛ أ س^{٢} + ب ، ٠ < س < ١ ؛ $\sqrt{\text{٤ س + ٥}}$ ، س ≥ ١ }

متصلة عند س = ٠ ومتصلة عند س = ١ فأوجد قيمة كل من أ ، ب

(٦) للدالة د حيث د (س) = { ٤ − أ س^{٢} ، س ≤ ٢ ؛ س + ٣ ، س > ٢ }

أوجد قيمة الثابت أ ،لكى تكون الدالة د متصله عند س = ٢ .

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٦) : على اتصال دالة عند نقطة (كتاب لامى)

ابحث اتصال الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(١) : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ٥$ عند س = ٢ [متصلة]

(٢) : $\text{د}(\text{س}) = \text{جا } ٢\text{س} + \text{جتا } ٥\text{س}$ عند س = ٠ [متصلة]

(٣) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ١٠}$ عند س = ٣ ، س = −١ [متصلة ، متصلة]

(٤) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٥ - \text{س}}$ عند س = ١ ، س = ٥ [متصلة ، متصلة]

(٥) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{٤ - \text{س}}$ عند س = ٥ [متصلة]

(٦) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}$ عند س = −٣ ، س = ٠ ، س = ٣ ، س = ٤

[متصلة ، متصلة ، متصلة ، غير متصلة]

(٧) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\text{س}}{\text{س} - ٣} & \text{عندما س} \neq ٣ \\ ٤ & \text{عندما س} = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣ [غير متصلة]

(٨) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤\text{س}^{٢} - ٩}{٢\text{س} - ٣} & \text{عندما س} \neq \dfrac{٣}{٢} \\ ٦ & \text{عندما س} = \dfrac{٣}{٢} \end{cases}$ عند س = $\dfrac{٣}{٢}$ [متصلة]

(٩) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٧}{٣\text{س} - ٣} & \text{عندما س} \neq ١ \\ ٣ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$ عند س = ١ [متصلة]

(١٠) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} & \text{عندما س} \neq ٢ \\ \dfrac{٥}{٧} & \text{عندما س} = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [غير متصلة]

■ (١١) : د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٧} - ١٢٨} & \text{عندما } س \neq ٢ \\ \dfrac{٥}{٢٨} & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$$
عند س = ٢ [متصلة]

■ (١٢) : د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س - ٤} & \text{عندما } س \neq ٤ \\ \dfrac{١}{٣} & \text{عندما } س = ٤ \end{cases}$$
عند س = ٤

[متصلة]

■ (١٣) : د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{٣س - ٥} - \sqrt{س + ١}}{س^{٢} - ٩} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ \dfrac{٥}{١٢} & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$$
عند س = ٣

[غير متصلة]

■ (١٤) : د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{٢}{س} \text{ حا } ٧س & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ١٤ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$$
عند س = ٠ [متصلة]

■ (١٥) : د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{٣س}{\text{طا } ٢س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ \dfrac{٢}{٣} & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$$
عند س = ٠ [غير متصلة]

■ (١٦) : د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\text{طا}(س/٣)}{\text{حا}(س/٥)} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ \dfrac{٥}{٣} & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$$
عند س = ٠ [متصلة]

■ (١٧) : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا س}}{\text{ط} - \text{س}} & \text{عندما س} \neq \text{ط} \\ \text{صفر} & \text{عندما س} = \text{ط} \end{cases}$ عند س = ط [غير متصلة]

■ (١٨) : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{طتا س}}{\text{حتا س}} & \text{عندما س} \neq \text{ط}/٢ \\ ١ & \text{عندما س} = \text{ط}/٢ \end{cases}$ عند س = ط/٢ [متصلة]

■ (١٩) : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا}^{٢}\ ٣\text{س}}{\text{س طا س}} & \text{عندما س} \neq ٠ \\ ٤ & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [غير متصلة]

■ (٢٠) : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢(١ - \text{حتا س})}{\text{س}^{٢}} & \text{عندما س} \neq ٠ \\ ١ & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [متصلة]

■ (٢١) : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢}{٣}(٧ - ٤\text{س}) & \text{عندما س} \leq ١ \\ ٢ & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١ [متصلة]

■ (٢٢) : د(س) = $\begin{cases} ٥ - ٢\text{س} & \text{عندما س} < -١ \\ ٣\text{س} + ٧ & \text{عندما س} \geq -١ \end{cases}$ عند س = -١ [غير متصلة]

■ (٢٣) : د(س) = $\begin{cases} \text{س} + \dfrac{٤}{٣} & \text{عندما س} < ٢ \\ \dfrac{٥}{٣}(٦ - \text{س}^{٢}) & \text{عندما س} \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [متصلة]

■ (٢٤) : د(س) = $\begin{cases} ٤\text{س}^{٢} - ٥ & \text{عندما س} \leq \dfrac{٣}{٢} \\ ٧ - ٢\text{س} & \text{عندما س} > \dfrac{٣}{٢} \end{cases}$ عند س = $\dfrac{٣}{٢}$ [متصلة]

■ (٢٥) : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٥}{٢} + ٣\text{س} & \text{عندما س} \leq -٢ \\ \dfrac{٢}{٧ + ٥\text{س}} & \text{عندما س} > -٢ \end{cases}$ عند س = -٢ [غير متصلة]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٢٦): د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٣ + \frac{٧}{٢} & \text{عندما س} \le -١ \\ \frac{٥}{\text{س} + ٣} & \text{عندما س} > -١ \end{cases}$ عند س = −١ [متصلة]

■ (٢٧): د(س) = $\begin{cases} \frac{٢}{٧}(٣\text{س}^٢ + ٤) & \text{عندما س} \le ١ \\ \frac{٢\text{س}}{\text{س} - ١} & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١ [غير متصلة]

■ (٢٨): د(س) = $\begin{cases} \frac{٢\text{س}}{١ - \text{س}^٢} & \text{عندما س} \le -٢ \\ \frac{١}{٣}(٣\text{س}^٢ - ٨) & \text{عندما س} > -٢ \end{cases}$ عند س = −٢ [متصلة]

■ (٢٩): د(س) = $\begin{cases} ٥ - ٢\,\text{حا س} & \text{عندما س} < ٠ \\ ٣\,\text{حتا س} & \text{عندما س} \ge ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [غير متصلة]

■ (٣٠): د(س) = $\begin{cases} ٤ - ٣\,\text{حا س} & \text{عندما س} \le \text{ط}/٢ \\ (\text{ط}/٢ - \text{س})/\text{حتا س} & \text{عندما س} > \text{ط}/٢ \end{cases}$

عند س = ط/٢ [متصلة]

■ (٣١): د(س) = $\begin{cases} (٢\text{س} - ١)^٢ + ٣ & \text{عندما س} \le ١ \\ \frac{٩}{٢} & \text{عندما } ١ < \text{س} < ٣ \\ \frac{٢}{٣}\text{س} + \frac{٥}{٢} & \text{عندما س} \ge ٣ \end{cases}$

عند س = ١ ، س = ٣ [غير متصلة ومتصلة]

■ (٣٢): د(س) = $\begin{cases} \frac{٢}{٣}(٧ - ٢\text{س}) & \text{عندما س} \le ٢ \\ \frac{٩}{\text{س} - ٢} & \text{عندما } ٢ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^٢ - \text{س} + ٣ & \text{عندما س} \ge ٣ \end{cases}$

عند س = ٢ ، س = ٣ [غير متصلة ومتصلة]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٣٣) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٣ - ٨}{٣س^٢ - ٥ س - ٢} & \text{عندما } س < ٢ \\ س^٢ - \dfrac{٣}{٢} |س| + \dfrac{٥}{٧} & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [متصلة]

■ (٣٤) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢} & \text{عندما } س < ١ \\ ٣س^٢ - ٢ |س| + ٧ & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$ عند س = ١ [متصلة]

■ (٣٥) : د (س) = ٢ − س + | ٣ س | عند س = ٠ [متصلة]

■ (٣٦) : د (س) = | ٢ س − ٣ | + ٧ − ٢ س عند س = ١,٥ [متصلة]

■ (٣٧) : د (س) = ٣ س + ٨ − ٢ | س + ١ | عند س = −١ [متصلة]

■ (٣٨) : د (س) = س | س + ٢ | + ٥ عند س = −٢ [متصلة]

■ (٣٩) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س}{|س|} + ٤ & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ٣ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [غير متصلة]

■ (٤٠) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{|س - ٢|^٣}{س - ٢} + ٥ & \text{عندما } س \neq ٢ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [متصلة]

■ (٤١) : د (س) = $\begin{cases} س |س| + ٣ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ \dfrac{س}{|س|} + ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [متصلة]

■ (٤٢) : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٣ |س|}{٢ س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ \dfrac{٥}{٢} & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [غير متصلة]

(٤٣): $د(س) = |س + ١| - |س - ٢| + ٣$

عند س = −١ ، عند س = ٢ [متصلة]

(٤٤): $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٣س - ٤}{|س - ٤|} & \text{عندما } س \neq ٤ \\ ٤ & \text{عندما } س = ٤ \end{cases}$

عند س = ٤ ، س = −١ [غير متصلة ، متصلة]

(٤٥): $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|} & \text{عندما } س < ٣ \\ |س| - ٩ & \text{عندما } س \geq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣ [متصلة]

أعد تعريف كل من الدوال الآتية بحيث تصبح متصلة عند النقط المذكورة:

(٤٦): $د(س) = \dfrac{٢س^٢ - س - ٣}{٤س^٢ - ٩}$ عند س = $\dfrac{٣}{٢}$ [$د(\dfrac{٣}{٢}) = \dfrac{٥}{١٢}$]

(٤٧): $د(س) = \dfrac{س^٣ - ١}{٢س^٢ + ٣س - ٥}$ عند س = ١ [$د(١) = \dfrac{٣}{٧}$]

(٤٨): $د(س) = \dfrac{س^٧ + ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$ عند س = −٢ [$د(-٢) = -١٤$]

(٤٩): $د(س) = \dfrac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{\sqrt{س} - ١}$ عند س = ١ [$د(١) = \dfrac{١}{٢}$]

(٥٠): $د(س) = \dfrac{\sqrt{٢س + ٣} - \sqrt{س + ٦}}{س - ٣}$ عند س = ٣ [$د(٣) = \dfrac{١}{٦}$]

(٥١): $د(س) = \dfrac{٣}{س} \text{ حا } \dfrac{س}{٢}$ عند س = ٠ [$د(٠) = \dfrac{٣}{٢}$]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٥٢): د (س) = $\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)$ قتا (ط − ٢س) عند س = $\frac{\text{ط}}{٢}$ [د $\left(\frac{\text{ط}}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$]

■ (٥٣): د (س) = $\frac{\text{طا ٥ س}}{\text{حا ٨ س}}$ عند س = ٠ [د (٠) = $\frac{٥}{٨}$]

■ (٥٤): د (س) = $\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س طا س}}$ عند س = ٠ [د (٠) = $\frac{١}{٢}$]

■ (٥٥): د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} + ٧} - ٣}{\sqrt{\text{س} + ٢} - ٢}$ عند س = ٢ [د (٢) = $\frac{٢}{٣}$]

■ (٥٦): د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{٢ - \text{س}} - ١}{١ - \text{س}}$ عند س = ١ [د (١) = $\frac{١}{٣}$]

■ (٥٧): أوجد قيمة الثابت أ إذا علم أن الدالة د (س) = $\frac{\text{س}^٧ - \text{أ}^٧}{\text{س}^٣ - \text{أ}^٣}$

متصلة عند س = أ ، د (أ) = $\frac{٢٨}{٣}$ [$\pm\sqrt{٢}$]

■ (٥٨): إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} \text{حا ٤ س طتا ٩ س} & \text{عندما س} \neq ٠ \\ \text{م}^٢ & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ متصلة

عند س = ٠ أوجد قيم م العددية [$\pm ٢/٣$]

■ (٥٩): إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{طا}^٢ \text{ ٣ س}}{\text{س حا ٢ س}} & \text{عندما س} \neq ٠ \\ \text{أ} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ متصلة

عند س = ٠ أوجد قيم أ العددية [٩/٢]

■ (٦٠): أوجد قيم الثوابت أ ، ب إذا علم أن الدالة :

د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + \text{ب س} + ٣ & \text{عندما س} < ١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & \text{عندما س} \geq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ ، د (١) = ٧

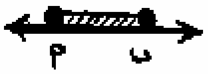
[٤ ، ٣]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

ثانياً : اتصال الدالة على فترة :

تعريف : • تكون الدالة د(س) متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[إذا كانت متصلة عند جميع نقط هذه الفترة .

• تكون الدالة د(س) متصلة على الفترة المغلقة [أ ، ب] إذا كانت :



(أ) د(س) متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[

(ب) د(س) متصلة من اليمين عند أ أى أن $د(أ) = \lim_{س \to أ^{+}} د(س)$

(جـ) د(س) متصلة من اليسار عند ب أى أن $د(ب) = \lim_{س \to ب^{-}} د(س)$

نظرية : إذا كانت الدالتان $د_1$ ، $د_2$ متصلتين على]أ ، ب[فإن كلاً من الدوال :

(أ) $د_1 \pm د_2$ (ب) $د_1 \times د_2$ (جـ) $\frac{د_1}{د_2}$ حيث $د_2(س) \neq ٠$

تكون متصلة أيضاً على نفس الفترة .

بعض أنماط الدوال المتصلة :

١ الدوال كثيرات الحدود : تكون متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها

٢ الدوال الكسرية : تكون متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها ماعدا أصفار المقام

٣ الدوال المثلثية :

(i) د(س) = جا س تكون متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها

(ii) د(س) = جتا س تكون متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها

(iii) د(س) = ظا س تكون متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها ماعدا عند $س = \frac{(٢ن+١)ط}{٢}$

مثال (١) : ابحث اتصال الدالة د حيث $د(س) = \frac{٢س^{٣} - ٥س + ٦}{٢}$

الحل : ∵ $د(س) = \frac{٢س^{٣}}{٢} - \frac{٥س}{٢} + \frac{٦}{٢}$ ∴ $د(س) = س^{٣} - \frac{٥}{٢}س + ٣$

∵ د(س) كثيرة حدود ∴ د(س) متصلة على ح

مثال (٢) : ابحث اتصال الدالة د حيث $د(س) = \frac{٢س - ٥}{س^{٣} - ٩س}$

الحل : نوجد أصفار المقام $س^{٣} - ٩س = ٠$ ∴ $س(س^{٢} - ٩) = ٠$ ∴ $س(س-٣)(س+٣) = ٠$

إما س = ٠ أو س = ٣ أو س = −٣

∴ الدالة متصلة على ح − {٠ ، ٣ ، −٣}

/ مثال (٣) : ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = جاس + جتا ½ س

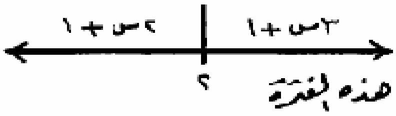
$ الحل : ∵ د(س) = جاس + جتا ½ س

بفرض د₁(س) = جاس متصلة على ح ، د₂(س) = جتا ½ س متصلة على ح

∴ د(س) متصلة على ح « نظرية »

/ مثال (٤) : ابحث اتصال الدالة د على ح حيث د(س) = { ٢س + ١ عندما س < ٢ ، ٣س + ١ عندما س ≥ ٢ }

$ الحل : أولاً : الفترات المفتوحة المعرفة عليها د



- عندما س < ٢ د(س) = ٢س + ١ كثيرة حدود متصلة على هذه الفترة
- عندما س > ٢ د(س) = ٣س + ١ كثيرة حدود متصلة على هذه الفترة

ثانياً : عند نقطة تغير التعريف س = ٢

- د(٢) = ٣(٢) + ١ = ٦ + ١ = $\boxed{٧}$
- لإيجاد النهاية عندما س ← ٢ نبحث وجود النهايتين اليمنى واليسرى

د(٢⁺) = نهـا (س ← ٢⁺) (٣س + ١) = ٧ ، د(٢⁻) = نهـا (س ← ٢⁻) (٢س + ١) = ٥

∵ د(٢⁺) ≠ د(٢⁻) ∴ لا توجد نهاية عندما س ← ٢

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢ ∴ الدالة متصلة على ح − {٢}

/ مثال (٥) : ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = { ١ + جتاس عندما ٠ ≤ س ≤ ط ، ط − س + ١ عندما س > ط }

$ الحل : أولاً : الفترات المفتوحة المعرفة عليها د

-]٠ ، ط[∵ د(س) = ١ + جتاس ∴ د متصلة على هذه الفترة
-]ط ، ∞[∵ د(س) = ط − س + ١ ∴ د متصلة على هذه الفترة

ثانياً : عند نقطة اختلاف التعريف س = ط

- د(ط) = ١ + (−١) = صفر
- د(ط⁺) = نهـا (س ← ط⁺) (ط − س + ١) = ١

∵ د(ط) ≠ د(ط⁺) ∴ د غير متصلة عند س = ط

ثالثاً : عند النقطة الحدية س = ٠

نبحث الاتصال من اليمين فقط ..

- د(٠) = ١ + جتا ٠ = ١ + ١ = ٢
- د(٠⁺) = نهـا (س ← ٠⁺) (١ + جتاس) = ١ + جتا ٠ = ١ + ١ = ٢

∵ د(٠) = د(٠⁺)

∴ الدالة متصلة من اليمين عند س = ٠

∴ د متصلة على [٠ ، ∞[− {ط}

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٧) : على اتصال دالة على فترة (كتاب الوزارة)

(١) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = $\text{س}^{٣}$ − ٥ $\text{س}^{٢}$ + ٣س + ١ (ب) د (س) = $\dfrac{\text{س − ١}}{\text{س + ٥}}$

(جـ) د (س) = $\dfrac{\text{س + ٣}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٥س + ٦}}$ (د) د (س) = $\dfrac{\text{س}^{٢}\text{ − ١}}{\text{س + ١}}$

(هـ) د (س) = $\dfrac{\text{س − ١}}{\text{س}^{٢}\text{ + ١}}$ (و) د (س) = $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢}\text{ + س + ١}}$

(٢) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) = {
$\text{س}^{٢}$ + ٣ س + ٢ ، س > ٠
٢ − س ، س < ٠

(ب) د (س) = {
٣ س + ٥ ، س > −١
−٢ س ، س ≥ −١

(جـ) د (س) = {
$\text{س}^{٢}$ ، س > ٣
٥ س − ٤ ، س ≤ ٣

(د) د (س) = {
$\dfrac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}$ ، $\dfrac{\text{ط}}{٤}$ < س < ٠
٢ جتا س ، ٠ ≤ س < − $\dfrac{\text{ط}}{٤}$

(هـ) د (س) = {
$\dfrac{\text{جا (س + ٢)}}{\text{س + ٢}}$ ، س > −٢
$\dfrac{١}{٤}$ $\text{س}^{٢}$ ، س ≤ −٢

(٣) ابحث اتصال الدالة د (س) =

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{٢س + جا ٢س}}{\text{جا ٣س}} & -\dfrac{ط}{٦} < س < ٠ \\[2ex] \dfrac{١}{٣} + \text{جتا ٣س} & ٠ \le س < \dfrac{ط}{٦} \end{cases}$$

(٤) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

(أ) د (س) =

$$\begin{cases} \dfrac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١} & -٤ < س < ١ \\[2ex] ٣س - ١ & ١ \le س < ٤ \\ س^{٢} & ٤ \le س < ٦ \end{cases}$$

(ب) د (س) =

$$\begin{cases} س^{٢} - ١ & س \le -٢ \\ س + ٥ & -٢ < س < ٣ \\ ٣س - ١ & س \ge ٣ \end{cases}$$

(٥) إذا كانت د (س) =

$$\begin{cases} ٤س & س \le -١ \\ \text{أ س + ب} & -١ < س < ٣ \\ -٢س & س \ge ٣ \end{cases}$$

متصلة على ح فما قيمة كل من أ ، ب

تمارين (٨) : على اتصال دالة على فترة (كتاب لامى)

إبحث اتصال كل من الدوال الآتية في الفترة المعطاة:

(١) : $د(س) = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧س - ٩$ في ح [متصلة]

(٢) : $د(س) = \dfrac{٣}{(س - ١)^{٢}}$ [متصلة في ح − {١}]

(٣) : $د(س) = \dfrac{٢س + ٣}{س^{٢} - ٢س}$ [متصلة في ح − {٠ ، ٢}]

■ (٤): $د(س) = \frac{٢ س + ٥}{س^٢ - ٢ س - ١٥}$ [متصلة فى ح − {−٣ ، ٥}]

■ (٥): $د(س) = \frac{٢ س^٣ + ١}{س^٤ - ٥ س^٢ + ٤}$ [متصلة فى ح − {−١ ، ١ ، ٢ ، −٢}]

عين مجال كل من الدوال الآتية ثم ابحث اتصالها فيه:

■ (٦): $د(س) = \sqrt{٣ - س}$ (متصلة فى] − ∞ ، ٣])

■ (٧): $د(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ (متصلة فى [−٢ ، ٢])

■ (٨): $د(س) = \sqrt{س^٢ + ١}$ (متصلة فى ح)

■ (٩): $د(س) = \sqrt{٦ - س - س^٢}$ (متصلة فى [−٣ ، ٢])

■ (١٠): $د(س) = \sqrt[٣]{(س - ١)^٢}$ (متصلة فى ح)

■ (١١): $د(س) = \frac{٣}{\sqrt{س - ٢}}$ (متصلة فى] ٢ ، ∞ [)

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية في الفترة المعطاة قرين كل منها:

■ (١٢): د(س) = ٢ جـا س + جتا س فى ح [متصلة]

■ (١٣): $د(س) = س^٢$ جـا ٣ س فى ح [متصلة]

■ (١٤): د(س) = طا س فى ح [غير متصلة عند س = ط/٢ + ن ط]

■ (١٥): $د(س) = \frac{س + جتا س}{جا س}$ فى ح [متصلة فى ح − ن ط]

■ (١٦): $د(س) = \frac{جا ٢ س}{١ - جتا س}$ فى ح [متصلة في ح − ٢ ن ط]

■ (١٧): $د(س) = \begin{cases} \frac{٣}{٥}(٨ - ٣س) & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$ فى ح [متصلة]

■ (١٨) : د(س) = $\begin{cases} \frac{٣}{٢} س - س^٢ & \text{عندما } س < \frac{٣}{٢} \\ \frac{٤}{٣} س - ٢ & \text{عندما } س \geq \frac{٣}{٢} \end{cases}$ في ح [متصلة]

■ (١٩) : د(س) = $\begin{cases} \frac{٧}{٢} - س & \text{عندما } س \leq \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢ س - ١} & \text{عندما } س > \frac{١}{٢} \end{cases}$ في ح [غير متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$]

■ (٢٠) : د(س) = $\begin{cases} \frac{٥ س - \text{جا } ٣ س}{٢ س} & \text{عندما } -ط/٣ \leq س < ٠ \\ ٤ - ٣ \text{ جتا } ٢ س & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ط/٣ \end{cases}$

في [-ط/٣ ، ط/٣] [متصلة]

■ (٢١) : د(س) = $\begin{cases} ٣ س^٢ + ٢ & \text{عندما } ٠ \leq س < ١ \\ ٥ & \text{عندما } ١ \leq س < ٢ \\ ٩ - ٢ س & \text{عندما } ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$ في [٠ ، ٣] [متصلة]

■ (٢٢) : د(س) = $\begin{cases} ٣ س^٢ + \frac{ط}{٢} & \text{عندما } -١ \leq س \leq ٠ \\ \frac{\text{جا } ط س}{٢ س} & \text{عندما } ٠ < س < ١ \\ \text{جتا}(ط س/٣) & \text{عندما } ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$ في [-١ ، ٣]

[غيرمتصلة عند س = ١]

■ (٢٣) : د(س) = ٤ س + ٩ − | ٣ − س | في ح [متصلة]

■ (٢٤) : د(س) = $س^٢$ + ٥ | س + ٢ | في ح [متصلة]

■ (٢٥) : د(س) = س | س − ٣ | + ٢ في ح [متصلة]

■ (٢٦) : د(س) = $س^٣$ − س | ٢ س − ٣ | + ٨ في ح [متصلة]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٢٧): د (س) = $\begin{cases} \frac{|س^{٣}|}{س} + ٥ & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ في ح [متصلة]

■ (٢٨): د (س) = $\begin{cases} ٥ - س\,|س| & \text{عندما } س \leq ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ٤ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ في ح [متصلة]

■ (٢٩): د (س) = $\frac{٢ س^{٢} + س - ٦}{|٢ س - ٣|}$ في ح [غير متصلة عند س = $\frac{٣}{٢}$]

■ (٣٠): د (س) = $\begin{cases} \frac{٣ س^{٢} + ٢ |س|}{س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ١ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ في ح [غير متصلة عند س = ٠]

■ (٣١): د (س) = $\frac{٢ س^{٢} + ٥ س - ١٨}{|س| - ٣}$ في ح [غير متصلة عند س = ٣ ، -٣]

■ (٣٢): د(س) = | س^{٢} - س - ١٢ | في ح [متصلة]

■ (٣٣): د(س) = | س + ٣ | - | س - ٢ | في ح [متصلة]

■ (٣٤): د (س) = $\begin{cases} ٲ\, س + ٧ & \text{عندما } س < -١ \\ س^{٢} + م & \text{عندما } -١ \leq س < ٢ \\ ٣ س + ٲ & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$

متصلة في ح أوجد قيمتى ٲ ، م [٢ ، ٤]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٩) : على اتصال دالة عند نقطة ، على فترة (دليل التقويم)

اثبت أن كلاً من الدوال الاتيه متصله عند النقط المبينه

(٢) د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ١ & \text{عندما س} \le ١ \\ س^٢ + ٢ & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٣) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٢ س - ٨}{س^٢ - ١٦} & \text{عندما س} < ٤ \\ \dfrac{٣}{٤} & \text{عندما س} \ge ٤ \end{cases}$ عند س = ١

(٤) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} & \text{عندما س} \ne ٣ \\ \dfrac{١}{٤} & \text{عندما س} = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٥) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[٣]{١٠ + س} - ٢}{س + ٢} & \text{عندما س} \ne -٢ \\ \dfrac{١}{١٢} & \text{عندما س} = -٢ \end{cases}$ عند س = -٢

(٦) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} & \text{عندما س} \ne ٢ \\ ٣ س^٢ + ٢ & \text{عندما س} = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٧) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٥|}{٢ س^٣} & \text{عندما س} \ne ٠ \\ \text{صفر} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ عند س = صفر

(٨) د (س) = $\begin{cases} س |س| + ٤ & \text{عندما س} \le ٠ \\ \dfrac{|س|}{س} + ٣ & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٩) د (س) = { $\frac{\text{حتا س}}{\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}}$ عندما س $<$ $\frac{\text{ط}}{٢}$ ، حا س عندما س $\geq$ $\frac{\text{ط}}{٢}$ } عند س = $\frac{\text{ط}}{٢}$

(١٠) د (س) = { $\frac{\text{حتا ٢ س} - ١}{\text{س}^٢}$ عندما س $\neq$ ٠ ، ٢- عندما س = ٠ } عند س = ٠

ابحث اتصال الدوال الاتيه عند النقط المبينه :

(١١) د (س) = { ٤ س^٢ + ٢ عندما س $\leq$ $\frac{١}{٢}$ ، ٥ − ٢ س عندما س $>$ $\frac{١}{٢}$ } عند س = $\frac{١}{٢}$

(١٢) د (س) = { س^٢ − ١ عندما س $<$ ٢ ، ٣ عند ٢ $\leq$ س $\leq$ ٥ ، س − ٢ عندما س $>$ ٥ } عند س = ٢ ، عند س = ٥

(١٣) د (س) = { $\frac{٢}{٣}$ (٥ − ٢ س) عندما س $\leq$ ١ ، $\frac{٨}{\text{س} - ١}$ ١ $<$ س $<$ ٣ ، س^٢ − س − ٢ س $\geq$ ٣ } عند س = ١ ، عند س = ٣

(١٤) د (س) = { $\frac{\sqrt{\text{٢ س} + ٣} - ٣}{\text{س} - ٣}$ عندما س $\neq$ ٣ ، $\frac{١}{٣}$ عندما س = ٣ } عند س = ٣

(١٥) د (س) = { $\frac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س}^٣ - ٨}$ عندما س $\neq$ ٢ ، ٢٠ عندما س = ٢ } عند س = ٢

(١٦) د(س) =
- $\dfrac{٣(س - ٢)^{٣} + ٢ س^{٢} - ٨}{س - ٢}$ عندما س < ٢
- ٨ عندما س = ٢
- ٣ س + ٢ عندما س > ٢

عند س = ٢

(١٧) د(س) =
- $\dfrac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عندما س ≠ ٣
- ٢ عندما س = ٣

عند س = ٣

(١٨) د(س) =
- $\dfrac{س^{٢} + ٢ س - ٣}{|س + ٣|}$ عندما س ≠ - ٣
- ٢ عندما س = - ٣

عند س = - ٣ ، عند س = ١

(١٩) د(س) =
- س + $\dfrac{\sqrt{(س - ٢)^{٢}}}{س - ٢}$ عندما س ≠ ٢
- ٣ عندما س = ٢

عند س = ٢

(٢٠) د(س) =
- $\dfrac{٣}{س}$ جا ٥ س عندما س ≠ ٠
- ١٥ عندما س = ٠

عند س = ٠

(٢١) د(س) =
- $\dfrac{٤ س}{طا ٣ س}$ عندما س ≠ ٠
- $\dfrac{٣}{٤}$ عندما س = ٠

عند س = ٠

(٢٢) د(س) =
- $\dfrac{جا س}{ط - س}$ عندما س ≠ ط
- ١ عندما س = ط

عند س = ط

(٢٣) د(س) =
- ٧ - ٤ جا س عندما س < ٠
- ٣ - ٢ جتا س عندما س ≥ ٠

عند س = ٠

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٢٤) $د(س) = \begin{cases} ٢ - ٢ \text{ حا } س & \text{عندما } س \leq \frac{ط}{٢} \\ \dfrac{\text{طتا } س}{\frac{ط}{٢} - س} & \text{عندما } س > \frac{ط}{٢} \end{cases}$ عند $س = \frac{ط}{٢}$

(٢٥) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س + \text{حا } ٤س}{\text{حا } ٣س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{٢} + \text{حتا } س & \text{عندما } س \leq ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٢٦) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}^{٢} ٢س}{س \text{ طا } س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ٢ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٢٧) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢(١ - \text{حتا } س)}{س^{٢}} & \text{عندما } س < ٠ \\ س^{٢} + ١ & \text{عندما } س \leq ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

أوجد قيمة الثابت أ عندما تكون د متصله عند النقط المبينه

(٢٨) $د(س) = \begin{cases} أ س^{٢} - ٢ & \text{عندما } س \neq ٢ \\ ٢ أ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

(٢٩) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س^{٧}} - ٢٧\sqrt{٣}}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ أ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ عند $س = ٣$

(٣٠) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{١ + س} - \sqrt[٣]{١ + س}}{س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ أ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٣١) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - (أ + ١) س + أ}{س - ١} & \text{عندما س } \ne ١ \\ ٣ س - ١ & \text{عندما س } = ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٣٢) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{طا ٢ س}{حا ٢ س} & \text{عندما س } \ne ٠ \\ أ & \text{عندما س } = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٣٣) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{حا (س - ٢)}{٢ س - ٤} & \text{عندما س } \ne ٢ \\ أ & \text{عندما س } = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣٤) د (س) = $\begin{cases} طا ٤ س قتا ٩ س & \text{عندما س } \ne ٠ \\ أ^٢ & \text{عندما س } = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٣٥) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{حا^٢ ٢ س}{س طا ٣ س} & \text{عندما س } \ne ٠ \\ أ + ١ & \text{عندما س } = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٣٦) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{طا ٣ س حا ٤ س}{٢ س حا ٥ س} & \text{عندما س } \ne ٠ \\ أ & \text{عندما س } = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٣٧) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{حتا ٢ س - ١}{حا س طا س} & \text{عندما س } \ne ٠ \\ أ & \text{عندما س } = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

أعد تعريف كل من الدوال الاتيه بحيث تصبح متصله عند النقط المبينه

(٣٨) د (س) = $\dfrac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٣ س + ٢}$ عند س = ١

(٣٩) د (س) = $\dfrac{(٢ س - ٤)^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٤}$ عند س = ٢

(٤٠) د (س) = $\dfrac{س^٣ - ٦٤}{\sqrt{س} - ٢}$ عند س = ٤

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٤١) $د(س) = \left(\frac{٢}{س - ٥} - \frac{١٢}{س^٢ - ٤ س - ٥} \right)$ عند س = ٥

(٤٢) $د(س) = \frac{طا ٢ س + ٥ حا ٤ س}{س}$ عند س = ٠

(٤٣) $د(س) = (\frac{ط}{٢} - س)$ طتا (ط - ٢ س) عند $س = \frac{ط}{٢}$

(٤٤) ابحث اتصال الدالة : $د(س) = \begin{cases} \frac{(س + ٣)^٤ - ٨١}{س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ١٠٨ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$

في ح

(٤٥) ابحث اتصال الدالة: $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & \text{عندما } -٢ \leq س < ١ \\ ٥ & \text{عندما } ١ \leq س < ٣ \\ ٣ س - ٤ & \text{عندما } ٣ \leq س \leq ٧ \end{cases}$ في [-٢ ، ٧]

(٤٦) إذا كانت د (س) متصله على ح أوجد قيمتى أ ، ب حيث :

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س + ١ & \text{عندما } س \leq -١ \\ أ س + ب & \text{عندما } -١ < س < ٢ \\ س^٢ - ٣ & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$$

(٤٧) أوجد قيم ب التى تجعل الدالة : $د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ + ب س + ٩}$ متصله على ح

(٤٨) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س - أ} - ١}{\sqrt{س} - ٣} & \text{عندما } س \neq ٩ \\ س - ب & \text{عندما } س = ٩ \end{cases}$

متصله عند س = ٩ فما قيمة أ ، ب الحقيقية ؟

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

الفصل الثانى :

الاشتقاق

مراجعة على ما سبق دراسته

إذا كانت $ص = د(س)$ وتغيرت س من $س_1$ إلى $س_2 = (س_1 + هـ)$ فإن :

١- دالة التغير $ت(هـ) = د(س_2) - د(س_1)$

$= د(س_1 + هـ) - د(س_1)$

٢- دالة متوسط التغير $م(هـ) = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

٣- معدل التغير $= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

ويطلق على معدل التغير : المشتقة الأولى للدالة أو ميل المماس أو المعامل التفاضلي الأول

ويرمز لمعدل التغير بالرمز $\frac{ءص}{ءس}$ أو $ص'$ أو $د'(س)$ أو $\frac{ء}{ءس} د(س)$

قواعد الاشتقاق

١ إذا كان $د(س) = ا$ (حيث ا ثابت) فإن $د'(س) = صفر$

٢ إذا كان $د(س) = س^ن$ فإن $د'(س) = ن س^{ن-1}$

٣ إذا كان $د(س) = ا س^ن$ فإن $د'(س) = ا ن س^{ن-1}$

٤ $\frac{ء}{ءس}(د_1 \pm د_2) = د_1' \pm د_2'$

٥ $\frac{ء}{ءس}(د_1 \cdot د_2) = د_1 \cdot د_2' + د_2 \cdot د_1'$

= الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

٦ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{د_1}{د_2}\right) = \frac{د_2 \cdot د_1' - د_1 \cdot د_2'}{(د_2)^2} = \frac{\text{المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

٧ إذا كانت $ص = د(ع)$ ، $ع = ر(س)$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

٨ إذا كان $ص = [د(س)]^ن$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ن [د(س)]^{ن-1} \times د'(س)$

٩ إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$\frac{ء}{ءس}(ص^ن) = ن ص^{ن-1} \times \frac{ءص}{ءس}$

(١٠) إذا كان :

$\text{ص} = \text{جا س}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا س}$

$\text{ص} = \text{جتا س}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جا س}$

$\text{ص} = \text{ظا س}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$

(١١) إذا كان :

$\text{ص} = \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب})$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ} \times \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب})$

$\text{ص} = \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب})$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{أ} \times \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب})$

$\text{ص} = \text{ظا}(\text{أ س} + \text{ب})$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ} \times \text{قا}^2(\text{أ س} + \text{ب})$

المعنى الهندسى للمشتقة الأولى

$$(\text{ميل المماس لمنحنى الدالة})_{(\text{س} ، \text{ص})} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ظا هـ} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

ملاحظة هامة

نستخدم قواعد الاشتقاق على الدوال القابلة للاشتقاق

أما عند بحث الاشتقاق فيكون بالتعريف $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

قابلية الاشتقاق

إذا كان تعريف د يتغير حول س = أ التي تنتمي إلى مجال د فإن :

المشتقة اليمنى عند س > أ

$$\text{د}'(\text{أ}^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

المشتقة اليسرى عند س < أ

$$\text{د}'(\text{أ}^-) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

الدالة د تكون قابلة للاشتقاق إذا كان $\text{د}'(\text{أ}^+) = \text{د}'(\text{أ}^-)$

ملاحظات هامة :

(١) لا بد أن تكون د معرفة عند النقطة المطلوب بحث الاشتقاق عندها .

(٢) إذا كانت د معرفة على الفترة [أ ، ب] فإننا نبحث عند أ المشتقة اليمنى فقط و عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط .

نظرية : إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

(و العكس غير صحيح)

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

ملاحظات هامة :

(١) إذا كانت د غير متصلة عند س = أ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة .

(٢) إذا كانت د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها إما أن تكون متصلة أو أن تكون غير متصلة عند هذه النقطة .

(٣) يفضل قبل بحث اشتقاق د عند س = أ أن نبحث اتصالها عند هذه النقطة أولاً ، فإذا كانت د متصلة نبحث الاشتقاق ، و إذا كانت غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق .

مثال (١) : ابحث قابلية اشتقاق الدالة د حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 & \text{عندما } \text{س} > 1 \\ 3\text{س} - 1 & \text{عندما } \text{س} \le 1 \end{cases}$$

وذلك عندما س = ١

الحل : أولاً : نبحث اتصال الدالة د عند س = ١

$$\text{د}(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2 \longrightarrow (1)$$

$$\text{د}(1^+) = \lim_{\text{س} \to 1^+} (\text{س}^2 + 1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{د}(1^-) = \lim_{\text{س} \to 1^-} (3\text{س} - 1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\longrightarrow \lim_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س}) = 2 \longrightarrow (2)$$

من (١) ، (٢) $\because \text{د}(1) = \lim_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س})$ $\therefore$ الدالة د متصلة عند س = ١

ثانياً : نبحث قابلية الاشتقاق :

المشتقة اليمنى عند س > ١ : $\text{د}'(1^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{\text{د}(1+\text{هـ}) - \text{د}(1)}{\text{هـ}}$

$$\therefore \text{د}'(1^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{[(1+\text{هـ})^2 + 1] - [(1)^2 + 1]}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{1 + 2\text{هـ} + \text{هـ}^2 + 1 - 1 - 1}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{هـ}(2+\text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} (2 + \text{هـ}) = 2$$

المشتقة اليسرى عند س < ١ : $\text{د}'(1^-) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{\text{د}(1+\text{هـ}) - \text{د}(1)}{\text{هـ}}$

$$\therefore \text{د}'(1^-) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{[3(1+\text{هـ}) - 1] - [3(1) - 1]}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{3 + 3\text{هـ} - 1 - 3 + 1}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{3\text{هـ}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} (3) = 3$$

$\because \text{د}'(1^+) \ne \text{د}'(1^-)$ $\therefore$ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال (٢) : إذا كانت

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 2\text{س} & ، \text{س} \le 1 \\ 4\text{س} - 1 & ، \text{س} > 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = ١

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

$ الحل : أولاً : نبحث اتصال الدالة د عند س = ١

$\text{د}(١) = (١)^٢ + ٢(١) = ١ + ٢ = ٣$

$\text{د}(١^+) = \underset{س \to ١^+}{\text{نها}} (٤س - ١) = ٤(١) - ١ = ٤ - ١ = ٣$

$\text{د}(١^-) = \underset{س \to ١^-}{\text{نها}} (س^٢ + ٢س) = (١)^٢ + ٢(١) = ١ + ٢ = ٣$

$\Leftarrow \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٣$

$\because \text{د}(١) = \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \text{د}(س)$ $\therefore$ الدالة متصلة عند س = ١

ثانياً : نبحث قابلية الاشتقاق :

$\text{د}'(١^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(١+هـ) - \text{د}(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{[٤(١+هـ) - ١] - [٤(١) - ١]}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{٤ + ٤هـ - ١ - ٤ + ١}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{٤هـ}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} (٤) = ٤ \longleftarrow (١)$

$\text{د}'(١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(١+هـ) - \text{د}(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{[(١+هـ)^٢ + ٢(١+هـ)] - [(١)^٢ + ٢(١)]}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ + ٢هـ - ١ - ٢}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{هـ(هـ + ٤)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} (هـ + ٤) = ٤ \longleftarrow (٢)$

من (١) ، (٢) $\because \text{د}'(١^+) = \text{د}'(١^-)$ $\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

/ مثال (٣) : ابحث قابلية الاشتقاق للدالة $\text{د}(س) = |س - ١|$ عند س = ١

$ الحل :

$\text{د}(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س \geq ١ \\ -س + ١ & ، س < ١ \end{cases}$

أولاً : نبحث اتصال الدالة د عند س = ١

$\text{د}(١) = ١ - ١ = ٠$

$\text{د}(١^+) = \underset{س \to ١^+}{\text{نها}} (س - ١) = ١ - ١ = ٠$

$\text{د}(١^-) = \underset{س \to ١^-}{\text{نها}} (-س + ١) = -١ + ١ = ٠$

$\Leftarrow \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٠$

$\because \text{د}(١) = \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \text{د}(س)$ $\therefore$ الدالة متصلة عند س = ١

ثانياً : نبحث قابلية الاشتقاق :

$\text{د}'(١^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(١+هـ) - \text{د}(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{[(١+هـ) - ١] - [١ - ١]}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{\text{نها}} (١) = ١$

$\text{د}'(١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(١+هـ) - \text{د}(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{[-(١+هـ) + ١] - [-١ + ١]}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نها}} (-١) = -١$

$\because \text{د}'(١^+) \neq \text{د}'(١^-)$

$\therefore$ د(س) غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال (٤): ابحث قابلية الاشتقاق للدالة د(س) = $\begin{cases} \text{حاس} ، & \text{س} \le \frac{\text{ط}}{2} \\ 1+\text{جتاس} ، & \text{س} > \frac{\text{ط}}{2} \end{cases}$ عند س = $\frac{\text{ط}}{2}$

الحل: أولاً : نبحث اتصال الدالة عند س = $\frac{\text{ط}}{2}$

د$(\frac{\text{ط}}{2})$ = حا $\frac{\text{ط}}{2}$ = حا ٩٠ = ١

د$(\frac{\text{ط}}{2}^{+})$ = $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{2}^{+}}$ (١+جتاس) = ١+ جتا $\frac{\text{ط}}{2}$ = ١+ جتا٩٠ = ١+ صفر = ١

د$(\frac{\text{ط}}{2}^{-})$ = $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{2}^{-}}$ (حاس) = حا $\frac{\text{ط}}{2}$ = حا٩٠ = ١

⇐ $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{2}}$ د(س) = ١

∵ د$(\frac{\text{ط}}{2})$ = $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{2}}$ د(س) ∴ الدالة متصلة عند س = $\frac{\text{ط}}{2}$

ثانياً : نبحث قابلية الاشتقاق :

د$'(\frac{\text{ط}}{2}^{+})$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{\text{د}(\frac{\text{ط}}{2}+\text{هـ}) - \text{د}(\frac{\text{ط}}{2})}{\text{هـ}}$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{[1+\text{جتا}(\frac{\text{ط}}{2}+\text{هـ})] - [1+\text{جتا}\frac{\text{ط}}{2}]}{\text{هـ}}$

= $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{1+(-\text{حاهـ}) - 1 - \text{جتا}90}{\text{هـ}}$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{-\text{حاهـ}}{\text{هـ}}$ = −١

د$'(\frac{\text{ط}}{2}^{-})$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{د}(\frac{\text{ط}}{2}+\text{هـ}) - \text{د}(\frac{\text{ط}}{2})}{\text{هـ}}$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{[\text{حا}(\frac{\text{ط}}{2}+\text{هـ})] - [\text{حا}\frac{\text{ط}}{2}]}{\text{هـ}}$

= $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{جتاهـ} - \text{حا}90}{\text{هـ}}$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{جتاهـ} - 1}{\text{هـ}}$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{1 - 2\text{حا}^2\frac{\text{هـ}}{2} - 1}{\text{هـ}}$

= $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{-2\text{حا}\frac{\text{هـ}}{2} \times \text{حا}\frac{\text{هـ}}{2}}{\text{هـ}}$ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} (-2\text{حا}\frac{\text{هـ}}{2}) \times \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{حا}\frac{\text{هـ}}{2}}{2 \cdot \frac{\text{هـ}}{2}}$

= −٢ × صفر × ٢ × ١ = صفر

∵ د$'(\frac{\text{ط}}{2}^{+})$ ≠ د$'(\frac{\text{ط}}{2}^{-})$ ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = $\frac{\text{ط}}{2}$

مثال (٥): إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} \text{أس} + \text{ب} ، & \text{س} \ge 1 \\ \text{س}^2 - 3 ، & \text{س} < 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمة كل من أ ، ب

الحل:

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

∴ الدالة متصلة عند س = ١ ⇐ د(1^{+}) = د(1^{-})

∴ أ(١) + ب = (١)^2 − ٣ ∴ أ + ب = −٢ ⟵ ①

∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ د$'(1^{+})$ = د$'(1^{-})$ ⇐ أ = ٢س ∴ $\boxed{\text{أ} = 2}$

بالتعويض في المعادلة ①

∴ ٢ + ب = −٢ ⇐ $\boxed{\text{ب} = -4}$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

مثال (٦) : إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + \text{ك} & ، \text{س} \leq 3 \\ 6\text{س} - 2 & ، \text{س} > 3 \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فأوجد قيمة ك ثم ابحث قابلية الاشتقاق للدالة عند س = ٣

الحل : ∵ الدالة متصلة عند س = ٣ ∴ $\text{د}(3) = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$

$\Leftarrow \text{د}(3^+) = \text{د}(3^-)$

∴ $6(3) - 2 = (3)^2 + \text{ك} \Leftarrow 18 - 2 = 9 + \text{ك}$

∴ $\text{ك} = 16 - 9$ ∴ $\text{ك} = 7$

بحث قابلية الاشتقاق للدالة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 7 & ، \text{س} \leq 3 \\ 6\text{س} - 2 & ، \text{س} > 3 \end{cases}$

$$\text{د}'(3^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{د}(3+\text{هـ}) - \text{د}(3)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{[6(3+\text{هـ}) - 2] - [6(3) - 2]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{18 + 6\text{هـ} - 2 - 18 + 2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \left(\frac{6\text{هـ}}{\text{هـ}}\right) = 6$$

$$\text{د}'(3^-) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{د}(3+\text{هـ}) - \text{د}(3)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{[(3+\text{هـ})^2 + 7] - [(3)^2 + 7]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{9 + 6\text{هـ} + \text{هـ}^2 + 7 - 9 - 7}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{(6+\text{هـ})\text{هـ}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} (6 + \text{هـ}) = 6$$

∵ $\text{د}'(3^+) = \text{د}'(3^-)$ ∴ د(س) قابلة للاشتقاق عند س = ٣

تمارين (١) : على قابلية الاشتقاق (كتاب الوزارة)

(١) ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$ عند س = ١

(ب) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س} + 5}$ عند أي نقطة تنتمي لمجالها .

(جـ) $\text{د}(\text{س}) = |2\text{س} - 3|$ عند $\text{س} = \frac{3}{2}$

(د) $\text{د}(\text{س}) = 3 - |\text{س} - 1|$ عند س = ١

(٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} - 1 & \text{س} \geq 2 \\ 2\text{س} + 1 & \text{س} < 2 \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٣) إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^٢ & س \geq ٢ \\ س + ٢ & س < ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة د عند س = ٢ ، وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ٢

(٤) إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^٢ + س + ١ & س \leq ١ \\ ٣ س & س > ١ \end{cases}$

ابحث أتصال الدالة د عند س = ١ ، وكذلك قابلية أشتقاقها عند س = ١

(٥) إذا كان د (س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ب س & س \leq ١ \\ ٣ س - ١ & س > ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فما قيمة كل من أ ، ب

(٦) إذا كان د (س) = $\begin{cases} أ س + ب & س \leq ٢ \\ س^٢ & س > ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فما قيمة كل من أ ، ب

(٧) إبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث :

د (س) = س $|$س$|$ وذلك عند س = صفر .

(٨) أوجد قيمة كل من الثابتين م ، ب اللذين يجعلان :

الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & س > ٣ \\ ٢ م س + ب & س \leq ٣ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٣

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٢) : على قابلية الاشتقاق و قواعد الاشتقاق (كتاب لامى)

ابحث قابلية الاشتقاق لكل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

■ (١) : د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ عند س = ٣ [غير قابلة للاشتقاق]

■ (٢) : د(س) = ٣ س + $\sqrt{٢\text{س}}$ عند س = ٠ [غير قابلة]

■ (٣) : د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ عند س = ١ [غير قابلة]

■ (٤) : د(س) = $(\text{س} + ٢)^{٢/٣}$ عند س = −٢ [غير قابلة]

■ (٥) : د(س) = $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢ & \text{عندما س} \geq ١ \\ ٥ & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١ [غير قابلة]

■ (٦) : د(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^٢ + ١ & \text{عندما س} \geq ٠ \\ \text{س}^٢ + ١ & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [غير قابلة]

■ (٧) : د(س) = $\begin{cases} ٤\text{س} - ٧ & \text{عندما س} \geq ٢ \\ \text{س}^٢ - ٣ & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [دَ(٢) = ٤]

■ (٨) : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٤ & \text{عندما س} < ١ \\ ٥\text{س} + ٣ & \text{عندما س} \geq ١ \end{cases}$ عند س = ١ [دَ(١) = ٥]

■ (٩) : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٥ & \text{عندما س} < ١ \\ ٢\text{س} + ٣ & \text{عندما س} \geq ١ \end{cases}$ عند س = ١ [غير قابلة]

■ (١٠) : د(س) = $\begin{cases} ٣ + ٤\text{س} - \text{س}^٢ & \text{عندما س} < ٢ \\ \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١١ & \text{عندما س} \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ [دَ(٢) = ٠]

■ (١١) : د(س) = ٢ |س| + ٣ عند س = ٠ [غير قابلة]

■ (١٢) : د(س) = $\sqrt{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$ عند س = ٣ [غير قابلة]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (١٣): د(س) = س |س| + ٥ عند س = ٠ [دَ(٠) = ٠]

■ (١٤): د(س) = س |س − ٣| عند س = ٣ [غير قابلة]

■ (١٥): د(س) = (س − ٥)^{٢} |س − ٥| عند س = ٥ [دَ(٥) = ٠]

■ (١٦): د(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^{٣}|}{س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ \text{صفر} & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ [دَ(٠) = ٠]

■ (١٧): د(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س - ٢|^{٣}}{س - ٢} + ٧ & \text{عندما } س \neq ٢ \\ ٧ & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

[دَ(٢) = ٠]

■ (١٨): د(س) = $\begin{cases} ٣س|س| + ٨ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ \dfrac{٣س}{|س|} + ٥ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

[دَ(٠) = ٠]

■ (١٩): د(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٢} & \text{عندما } س < ١ \\ ٥س - ٩ & \text{عندما } ١ \leq س \leq ٣ \\ س(س - ١) & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$

عند س = ١ ، س = ٣ [غير قابلة ، دَ(٣) = ٥]

■ (٢٠): د(س) = $\begin{cases} ١ & \text{عندما } س < -١ \\ \text{صفر} & \text{عندما } -١ \leq س \leq ٠ \\ س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

والدالة ر(س) = س د(س) ابحث اتصال كل من الدالتين د(س) ، ر(س) عند س = ١ ، س = ٠ وكذلك قابلية الاشتقاق للدالتين عند نفس النقط.

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٢١) : إذا كانت الدالة : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ س + ٩ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٧ - ٢ س & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ . أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢

[أ = -٥ ، غير قابلة]

■ (٢٢) : إذا كانت الدالة : د(س) = $\begin{cases} ٣ - \frac{٣}{٢} س & \text{عندما } س \geq ١ \\ \frac{أ}{٢ س} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ . أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ١

[أ = ٣ ، د̀(١) = - ١,٥]

■ (٢٣) : إذا كانت الدالة : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ & \text{عندما } س < ١ \\ م - أ س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

، د(١) = -١ متصلة عند س = ١ . أوجد قيمتى أ ، م ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ١

[-٢ ، -٣ ، د̀(١) = ٢]

■ (٢٤) : إذا كانت الدالة : د(س) = $\begin{cases} أ س - س^{٢} & \text{عندما } س \geq ١ \\ س^{٢} + ب س + ٢ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ . متوسط معدل تغير هذه الدالة = $\frac{٨}{٣}$ عندما تتغير من س = ٠ إلى

س = ٣ أوجد قيمتى أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق هذه الدالة عند س = ١

[أ = ٣ ، ب = -١ ، د̀(١) = ١]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

(أولاً)تمارين على المشتقة الأولى للمجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال :

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(١) : $\text{د}(\text{س}) = ١٥ - ٩\,\text{س} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٣}$

(٢) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥$

(٣) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٤}\,\text{س}^{٨} - \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{٦} - \frac{٣}{٥}\,\text{س}^{٥} - ٣٩$

(٤) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{٤\,\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٢\,\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{\text{س}^{٧}}{٧} - \frac{٥}{٩}$

(٥) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{٧}{٢} - ٢\,\text{س}^{-١} - \frac{٣}{٤}\,\text{س}^{-٢} + \frac{٥}{٣}\,\text{س}^{-٣}$ ، $\text{س} \neq ٠$

(٦) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤} - ٧\,\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ١}{\text{س}^{٤}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

(٧) : $\text{د}(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٢/٣} - ٥\,\text{س}^{٨/٥} + ٦\,\text{س}^{٤/٣}$ ، $\text{س} \neq ٠$

(٨) : $\text{د}(\text{س}) = ٤\,\text{س}^{٥/٢} - ٦\,\text{س}^{-٣/٢} + \frac{٩}{٢}$ ، $\text{س} > ٠$

(٩) : $\text{د}(\text{س}) = ٢\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٤\sqrt[٤]{\text{س}^{٣}} + ٨$ ، $\text{س} > ٠$

(١٠) : $\text{د}(\text{س}) = ٤\sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} + ٩$ ، $\text{س} > ٠$

(١١) : $\text{د}(\text{س}) = ٣\,\text{س}\sqrt{\text{س}} + \frac{٥\,\text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{٤\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}$ ، $\text{س} > ٠$

أوجد الدالة المشتقة دَ لكل من الدوال الآتية وعين مجالها :

(١٢) : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} & \text{عندما س} < ٣ \\ ٣\,\text{س} - ٦ & \text{عندما س} \geq ٣ \end{cases}$ فى ح $(\text{ح} - \{٣\})$

أ / إبراهيم عادل حسنى   ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (١٣) : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + ٣ & \text{عندما س} > ٠ \\ ٣ - \text{س}^2 & \text{عندما س} \le ٠ \end{cases}$ فى ح　　(٢ | س | فى ح)

■ (١٤) : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - ٤\text{س} + ٥ & \text{عندما س} \ge ٢ \\ ٤\text{س} - \text{س}^2 - ٣ & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$　　[ح]

■ (١٥) : د(س) = س | س | + ٢ فى ح　　[ح]

■ (١٦) : د(س) = س^٢ − ٣ | س | + ٨ فى ح　　[ح − {٠}]

■ (١٧) : د(س) = س | س − ٥ | + ٤ فى ح　　[ح − {٥}]

■ (١٨) : د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{أ} & \text{عندما س} \ge ١ \\ \text{ب س} - ٣ & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمتي أ ، ب　　[−٢ ، ٢]

■ (١٩) : إذا كانت الدالة د المعرفة كالتالى :

د(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^2 + \text{ب س} + ٤ & \text{عندما س} < ١ \\ ٥\text{س} + \text{ب} & \text{عندما س} \ge ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمتي أ ، ب　　[١ ، ٣]

■ (٢٠) : إذا كانت الدالة د المعرفة كالآتى :

د(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} & \text{عندما س} \le ٢ \\ ٧\text{س} - \text{حـ} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$

(حيث أ ، ب ، حـ ثوابت) قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، متوسط معدل تغير هذه الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٦,٥ عين قيم أ ، ب ، حـ　　[١ ، ٣ ، ٢]

(ثانيا) مسائل على مشتقة حاصل ضرب دالتين :

أوجد المشتقة الأولي لكل من الدوال الآتية :

■ (٢١) : د(س) = (٢س + ٣) (١ − ٢س + س^٣)

■ (٢٢) : د(س) = (٣س^٢ − ١) (س^٣ − ٥س + ٢)

أ / إبراهيم عادل حسنى　ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٢٣) : د(س) = (٢ س^{٢} + ٣ س + ١) (س^{٢} − ٢ س + ٣)

(٢٤) : د(س) = س^{٢} (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٤)

(٢٥) : د(س) = (س^{٢} + ٣) (٢س^{٢} +٥) (٣س^{٢} +٧)

(ثالثا) مسائل على مشتقة خارج قسمة دالتين :

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية مع ذكر قيم س التى تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق عندها

(٢٦) : د(س) = $\frac{٧}{٢ س − ٣}$ [س = $\frac{٣}{٢}$]

(٢٧) : د(س) = $\frac{٣ س}{٢ − س}$ [س = ٢]

(٢٨) : د(س) = $\frac{٢ س − ٥}{٣ س − ٤}$ [س = $\frac{٤}{٣}$]

(٢٩) : د(س) = $\frac{س^{٢} + ٣}{٤ − س^{٢}}$ [س = ±٢]

(٣٠) : د(س) = $\frac{س^{٢} − ٣ س + ٢}{س^{٢} + ١}$ [لا يوجد]

(٣١) : د(س) = $\frac{س (س + ١)}{(س − ١) (٢ س − ٣)}$ [س = ١ ، س = $\frac{٣}{٢}$]

(رابعاً) تمارين على مشتقة دالة الدالة و قاعدة التسلسل :

أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل من الحالات الآتية :

(1) : $\text{ص} = \text{ع}^5$ حيث $\text{ع} = \text{س}^3 - 3\,\text{س}^2 + 7$

$[15\,\text{س}(\text{س} - 2)\,(\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 7)^4]$

(2) : $\text{ص} = \text{ع}^2 + 5\text{ع} - 9$ ، $\text{ع} = 2\,\text{س} + 1$ $\quad [2\,(4\text{س} + 7)]$

(3) : $\text{ص} = \frac{\text{ع}}{3\text{ع} + 2}$ ، $\text{ع} = \frac{2\,\text{س}}{1 - 3\,\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \frac{1}{3}$ $\quad [1]$

(4) مصر (80) : إذا كانت $\text{ص} = \frac{2\text{ع}}{\text{ع} - 3}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س} + 2}{\text{س} - 1}$

اثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{18}{(5 - 2\text{س})^2}$ ، $\text{س} \neq 1$ ، $\text{س} \neq \frac{5}{2}$ ، $\text{ع} \neq 3$

(5) مصر (69) : إذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^2 - 5\text{ع} + 7$ ، $\text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{س}^4 - 2$ أوجد

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ثم اثبت أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + 9\,\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} - 2\,\text{س}^7 = 0$

(6) : إذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^2 + 1$ ، $\text{ع} = 2\,\text{ى} - 1$ ،

$\text{ى} = \text{س}^2 - \text{س} + 1$ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ $\quad [4(2\text{س} - 1)\,(2\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)]$

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

(7) : $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 3\,\text{س} + 2)^6$ $\quad [6(2\text{س} - 3)\,(\text{س}^2 - 3\text{س} + 2)^5]$

(8) : $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^3 + 4\,\text{س} + 9)^8$ $\quad [8(3\text{س}^2 + 4)\,(\text{س}^3 + 4\text{س} + 9)^7]$

(9) : $\text{د}(\text{س}) = (1 + 2\,\text{س}\,\sqrt{\text{س}})^7$ $\quad [21\,\sqrt{\text{س}}\,(1 + 2\text{س}\,\sqrt{\text{س}})^6]$

(١٠) : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٤}{(٢\text{س} - ٣)^{٨}}$ ، $\text{س} \neq \frac{٣}{٢}$ $\qquad [-٦٤\,(٢\text{س} - ٣)^{-٩}]$

(١١) : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{(٣ - ٥\text{س} - ٢\text{س}^{٢})^{١٥}}$ ، $\text{س} \notin \{\frac{١}{٢} ، -٣\}$

$[١٥\,(٥ + ٤\text{س})\,(٣ - ٥\text{س} - ٢\text{س}^{٢})^{-١٦}]$

(١٢) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}$ $\qquad [\text{س}\,(\text{س}^{٢} + ٩)^{-١/٢}]$

(١٣) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}$ $\qquad [(\text{س} + ١)\,(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)^{-١/٢}]$

(١٤) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٩}$ $\qquad [\frac{١}{٣}\,(٢\text{س} - ١)\,(\text{س}^{٢} - \text{س} + ٩)^{-٢/٣}]$

(١٥) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٤]{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣)^{٧}}$

$[\frac{٧}{٢}\,(\text{س} - ٢)\,(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣)^{٣/٤}]$

(١٦) : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٣}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$ $\qquad [-٣\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} + ١)^{-٣/٢}]$

(١٧) : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٩}{\sqrt[٣]{(٣ + ٢\text{س} - \text{س}^{٢})^{٢}}}$ ، $\text{س} \notin \{-١ ، ٣\}$

$[١٢\,(\text{س} - ١)\,(٣ + ٢\text{س} - \text{س}^{٢})^{-٥/٣}]$

(١٨) : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}\,(٢ - ٣\text{س})^{٤}$ $\qquad [٣\text{س}^{٢}\,(٢ - ٣\text{س})^{٣}\,(٢ - ٧\text{س})]$

(١٩) : $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٣)^{٢}\,(٤ - ٣\text{س})^{٣}$ $\qquad [٥\,(\text{س} - ٣)\,(٧ - ٣\text{س})\,(٤ - ٣\text{س})^{٢}]$

(٢٠) : $\text{د}(\text{س}) = (٢\text{س} - ١)^{٤}\,(\text{س} + ١)^{٥}$

$[٣\,(٦\text{س} + ١)\,(٢\text{س} - ١)^{٣}\,(\text{س} + ١)^{٤}]$

(٢١) : $\text{د}(\text{س}) = (٦\text{س} + ١)^{٤}\,(\text{س} - ٧)^{-٥}$ ، $\text{س} \neq ٧$

$[-(١٧٣ + ٦\text{س})\,(٦\text{س} + ١)^{٣}\,(\text{س} - ٧)^{-٦}]$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٢٢) : $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{٢\text{س} + ٣}{٥ - ٢\text{س}}\right)^{٨}$ $[١٢٨ \, (٢\text{س} + ٣)^{٧} \, (٥ - ٢\text{س})^{-٩}]$

■ (٢٣) : $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{\text{س}}{٩ - \text{س}^{٢}}\right)^{-٣}$ $[-٣\text{س}^{-٤} \, (٩ + \text{س}^{٢}) \, (٩ - \text{س}^{٢})^{٢}]$

■ (٢٤) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢} - ٥)^{٣}}{\text{س} + ٢}$ $[(\text{س}^{٢} - ٥)^{٢} \, (\text{س} + ٢)^{-٢} \, (٥\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٥)]$

■ (٢٥) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{٥\text{س}^{٢}}{(٥\text{س} - ٤)^{٣}}$ $\left[\frac{-٥\text{س} \, (٥\text{س} + ٨)}{(٥\text{س} - ٤)^{٤}}\right]$

■ (٢٦) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{(١ - ٢\text{س})^{٤}}{(٢\text{س} + ٣)^{٣}}$

$[-٢ \, (٢\text{س} + ١٥) \, (١ - ٢\text{س})^{٣} \, (٢\text{س} + ٣)^{-٤}]$

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

■ (٢٧) : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ عند $\text{س} = ٢$ $[١٣/٣]$

■ (٢٨) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{٢\text{س} + ٣}}{\text{س}}$ عند $\text{س} = ٣$ $[-٢/٩]$

■ (٢٩) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$ عند $\text{س} = ٠$ $[١]$

■ (٣٠) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٦}}$ عند $\text{س} = ١$ $\left[\frac{٥}{٩}\right]$

■ (٣١) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{١ + \text{س} + \text{س}^{٢}}}{\sqrt{١ - \text{س} + \text{س}^{٢}}}$ عند $\text{س} = ٠$ $[١]$

(٣٢) : إذا كانت ص = (٥ − ٢ع)^{٣} حيث ع = س^{٣} + ٢ س + ٧

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عندما س = −١ [−٢٧٠]

(٣٣) : إذا كانت ص = (ع^{٢} + ١)^{٣} حيث ع = س $\sqrt{\text{س}}$

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عندما س = ١ [٣٦]

(٣٤) : إذا كانت ص = $\sqrt{١ + \text{ع}^{٢}}$ ، ع = $\frac{١}{\text{س}}$

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عندما س = $\sqrt{٣}$ [−١/٦]

(٣٥) : إذا كانت ص = س^{٢} + ١ ، ع = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$ اثبت أن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ = ٢ع

(٣٦) : إذا كانت س = $\frac{٢ن - ٣}{٢ن - ١}$ ، ص = $\frac{ن + ١}{٢ن - ١}$ أوجد كلاً من $\frac{\text{ء ن}}{\text{ء س}}$ ، $\frac{\text{ء ن}}{\text{ء ص}}$ عندما ن = ١ ثم اثبت أن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $-\frac{٣}{٤}$ لأى قيمة ن ≠ $\frac{١}{٢}$

الدالة الضمنية و الاشتقاق الضمنى

- الدوال الصريحة : هي الدوال التي يكون فيها كل من س ، ص في طرف مستقل .
- الدوال الضمنية : هي الدوال التي لا يمكن فيها فصل كل من س ، ص في طرف مستقل .

قاعدة هامة : $\boxed{\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن ص}^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}$

مثال (١) : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا علم أن س^{٢} + ص^{٢} + ٩س − ٥ص = ٤

الحل: ∵ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٩\text{س} - ٥\text{ص} = ٤$ باجراء التفاضل للطرفين بالنسبة إلى س

$$∴ ٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٩ - ٥\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$∴ ٢\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٥\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س} - ٩ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(٢\text{ص} - ٥\right) = -٢\text{س} - ٩$$

$$∴ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س} - ٩}{٢\text{ص} - ٥}$$

مثال (٢): أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ حيث $\text{جا}\,٣\text{ص} - \text{جتا}\,٢\text{س} = ٠$

الحل: ∵ $\text{جا}\,٣\text{ص} - \text{جتا}\,٢\text{س} = ٠$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$$∴ \text{جتا}\,٣\text{ص} \times ٣\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{جا}\,٢\text{س} \times ٢ = ٠$$

$$∴ ٣\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\,\text{جتا}\,٣\text{ص} = ٢\,\text{جا}\,٢\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\,\text{جا}\,٢\text{س}}{٣\,\text{جتا}\,٣\text{ص}}$$

مثال (٣): إذا كان $\text{س}\sqrt{\text{ص}} + \text{ص}\sqrt{\text{س}} = ٦$ فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: ∵ $\text{س}\sqrt{\text{ص}} + \text{ص}\sqrt{\text{س}} = ٦$ بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

$$∴ \text{س} \times \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}} + \sqrt{\text{ص}} + \text{ص} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

بضرب الطرفين $\times ٢\sqrt{\text{س}}\sqrt{\text{ص}}$

$$∴ \text{س}\sqrt{\text{س}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{ص}\sqrt{\text{س}} + \text{ص}\sqrt{\text{ص}} + ٢\text{س}\sqrt{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$∴ \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س}\sqrt{\text{ص}}\right) = -٢\text{ص}\sqrt{\text{س}} - \text{ص}\sqrt{\text{ص}}$$

$$∴ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{ص}\sqrt{\text{س}} - \text{ص}\sqrt{\text{ص}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س}\sqrt{\text{ص}}}$$

مثال (٤): أوجد ميل المماس للمنحنى $\frac{٢\text{س}}{\text{ص}} + \frac{٣\text{ص}}{\text{س}} = ٧$ عند النقطة (١ ، ٢)

الحل: ∵ $\frac{٢\text{س}}{\text{ص}} + \frac{٣\text{ص}}{\text{س}} = ٧$ بضرب الطرفين × س ص

∴ $٢\text{س}^2 + ٣\text{ص}^2 = ٧\text{س}\,\text{ص}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$$∴ ٤\text{س} + ٦\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٧\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٧\text{ص}$$

$$∴ ٦\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٧\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٧\text{ص} - ٤\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(٦\text{ص} - ٧\text{س}\right) = ٧\text{ص} - ٤\text{س}$$

$$∴ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٧\text{ص} - ٤\text{س}}{٦\text{ص} - ٧\text{س}}$$

لإيجاد ميل المماس للمنحنى نعوض في المشتقة الأولى عند س = ١ ، ص = ٢

$$∴ \text{الميل} = \frac{٧(٢) - ٤(١)}{٦(٢) - ٧(١)} = \frac{١٤ - ٤}{١٢ - ٧} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

مثال (٥): أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $س^2 + ص^2 - ٦س - ٨ص + ١٧ = ٠$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، ٢)

الحل: ∵ $س^2 + ص^2 - ٦س - ٨ص + ١٧ = ٠$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} - ٦ - ٨ \frac{دص}{دس} = ٠$

∴ $\frac{دص}{دس} (٢ص - ٨) = ٦ - ٢س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٦ - ٢س}{٢ص - ٨}$

ثم بالتعويض عند س = ١ ، ص = ٢ ∴ الميل $= \frac{٦ - ٢}{٤ - ٨} = \frac{٤}{-٤} = -١$

∵ ظا هـ = ميل المماس ∴ ظا هـ = −١ ∴ ق(هـ) = ١٣٥°

مثال (٦): إذا كانت $جتا^2 ص = ٤ - جا ٢س$ أثبت أن: $\frac{دص}{دس} = ٢جتا٢س \; قتا ٢ص$

الحل: ∵ $(جتا ص)^2 = ٤ - جا ٢س$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $٢ جتا ص \times (- جا ص) \times \frac{دص}{دس} = - ٢ جتا ٢س$ (بضرب الطرفين × −١)

∴ $٢ جا ص جتا ص \times \frac{دص}{دس} = ٢ جتا ٢س$

⟸ $جا ٢ص \times \frac{دص}{دس} = ٢ جتا ٢س$ (حيث جا ٢ص = ٢جا ص جتا ص)

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢ جتا ٢س}{جا ٢ص}$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٢ جتا ٢س \; قتا ٢ص$

المشتقات العليا

- إذا كانت ص = د(س) قابلة للاشتقاق فإن المشتقة الأولى للدالة د(س) يرمز له بالرمز $د'(س)$ أو $ص'$ أو $\frac{دص}{دس}$
- إذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق فإن المشتقة الثانية للدالة د(س) يرمز لها بالرمز $د''(س)$ أو $ص''$ أو $\frac{د^2ص}{دس^2}$
- إذا كانت المشتقة الثانية قابلة للاشتقاق فإن المشتقة الثالثة للدالة د(س) يرمز لها بالرمز $د'''(س)$ أو $ص'''$ أو $\frac{د^3ص}{دس^3}$ ... وهكذا

ملاحظة هامة :

هناك فرق ما بين $\frac{د^2ص}{دس^2}$ ، $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2$

* $\frac{د^2ص}{دس^2}$: تعني اجراء التفاضل مرتين للدالة ص .

* $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2$: تعني مربع المشتقة الأولى للدالة ص .

/ مثال (١) : اوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ للدالة : $ص = س^3 - 5س^2 + 6س - 4$

$ الحل :

$\because ص = س^3 - 5س^2 + 6س - 4$ بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{دص}{دس} = 3س^2 - 10س + 6$ بتفاضل الطرفين مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{د^2ص}{دس^2} = 6س - 10$

/ مثال (٢) : اوجد $ص'''$ للدالة : $ص = س^4 - 4س^3 + 3س^2 - 5$

$ الحل :

$\because ص = س^4 - 4س^3 + 3س^2 - 5$ بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ص' = 4س^3 - 12س^2 + 6س$ بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore ص'' = 12س^2 - 24س + 6$ بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore ص''' = 24س - 24$

/ مثال (٣) : إذا كانت $ص = (س^2 + 1)^5$ اوجد $ص''$ في أبسط صورة .

$ الحل :

$\because ص = (س^2 + 1)^5$ بأخذ المشتقة الأولى بالنسبة إلى س للطرفين

$\therefore ص' = 5(س^2+1)^4 \times 2س$

$\therefore ص' = 10س\,(س^2+1)^4$ بتفاضل الطرفين مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore ص'' = 10س \times 4(س^2+1)^3 \times 2س + (س^2+1)^4 \times 10$

$= 80س^2(س^2+1)^3 + 10(س^2+1)^4$

$= 10(س^2+1)^3 \left[8س^2 + س^2 + 1\right]$

$\therefore ص'' = 10(س^2+1)^3(9س^2+1)$

/ مثال (٤) : إذا كانت $ص = ٢ جاس + ٣ جتاس - س^٣$ فأوجد $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$

$ الحل :

$\because ص = ٢ جاس + ٣ جتاس - س^٣$ بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٢ جتاس - ٣ جاس - ٣س^٢$ بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} = -٢ جاس - ٣ جتاس - ٦س$ بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{د^٣ص}{دس^٣} = -٢ جتاس + ٣ جاس - ٦$

/ مثال (٥) : اوجد كلاً من $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ ، $\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢$ للدالة :

$ص = ٢س^٣ - ٣س^٢ + ١$

$ الحل :

$\because ص = ٢س^٣ - ٣س^٢ + ١$ بأخذ المشتقة الأولى للطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٦س^٢ - ٦س$ بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} = ١٢س - ٦$

مما سبق نلاحظ أن : $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ١٢س - ٦$

، $\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ = (٦س^٢ - ٦س)^٢$

$\Leftarrow \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ = ٣٦س^٤ - ٧٢س^٣ + ٣٦س^٢$

/ مثال (٦) : إذا كانت $ص^٢ = س^٢ - س^٣$

اثبت أن : $ص \frac{د^٢ص}{دس^٢} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + ٣س = ١$

$ الحل : نوجد مشتقة الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ٢ص \frac{دص}{دس} = ٢س - ٣س^٢$ ثم نوجد تفاضل الطرفين مرة أخرى

$\therefore ٢\left[ص \frac{د^٢ص}{دس^٢} + \frac{دص}{دس} \times \frac{دص}{دس}\right] = ٢ - ٦س$ (بالقسمة ÷ ٢)

$\therefore ص \frac{د^٢ص}{دس^٢} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ = ١ - ٣س$

$\Leftarrow ص \frac{د^٢ص}{دس^٢} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + ٣س = ١$

مثال (٧) : إذا كانت $2\text{ص}^3 = 3\text{س}^2$ فاثبت أن : $\text{ص}\,\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + 2\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 = \frac{1}{\text{ص}}$

الحل : ∵ $2\text{ص}^3 = 3\text{س}^2$ بإجراء عملية التفاضل بالنسبة إلى س

∴ $6\text{ص}^2\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 6\text{س}$ ⇐ $\text{ص}^2\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}$ (وذلك بالقسمة على ٦)

ثم تفاضل الطرفين مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ $\text{ص}^2\,\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times 2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$ ثم بقسمة الطرفين على ص

∴ $\text{ص}\,\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times 2\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{ص}}$

⇐ $\text{ص}\,\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} + 2\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 = \frac{1}{\text{ص}}$

مثال (٨) : إذا كانت $\text{ص} = \text{س جتا س}$ اثبت أن : $\text{س}\,\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} + \text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\text{ص} = 0$

الحل : ∵ $\text{ص} = \text{س جتا س}$ ① بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times -\text{جا س} + \text{جتا س}$

⇐ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -\text{س جتا س} - \text{جا س} - \text{جا س}$ وبالتعويض من ① عن ص = س جتا س

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = -\text{ص} - 2\,\text{جا س}$

∴ $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = -\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - 2\,\text{جتا س}$ (وبضرب الطرفين × س)

∴ $\text{س}\,\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} = -\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - 2\,\text{س جتا س}$ وبالتعويض من ①

∴ $\text{س}\,\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ءس}^3} + \text{س}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + 2\text{ص} = 0$

تمارين (٣) : على الاشتقاق الضمنى و المشتقات العليا (كتاب الوزارة)

(١) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يأتي :

(أ) $2\text{س}^3 + 2\text{ص}^3 = 9\,\text{س ص}$ (ب) $\text{س}^2 - 2\text{ص}^2 + 7 = 0$

(جـ) $\text{س}^3 + \text{ص}^3 + 4 = 0$ (د) $\text{س}^2 - 2\,\text{س ص} + 2\text{ص}^2 = 1$

(هـ) $\text{س}^3 + 2\text{س}^2\text{ص} - \text{س ص}^2 + 2\text{ص}^3 = 5$ (و) جا ٢ س = ظا ص

(ز) جتا س = جا ٣ ص

(٢) أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) ٢ $س^٢$ + ٣ $ص^٢$ = ٥ عند النقطة (−١ ، −١)

(ب) $س^٢$ − س ص + $ص^٢$ = ٢٧ عند النقطة (٦ ، ٣)

(جـ) $س^٢$ + $ص^٢$ + ٦ س − ٢ص − ٦ = ٠ عند النقطة (−٣ ، ٥)

(٣) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) $س^٢$ + $ص^٢$ + ٢س − ٢ ص − ٦ = ٠ عند النقطة (١ ، −١)

(ب) $\frac{س}{ص}$ − $\frac{٤ ص}{س}$ = ٣ عند النقطة (١ ، −١)

(جـ) $س^٣$ − $س^٢$ ص − س − ٣ ص = ٠ عند النقطة (١ ، ٠)

(٤) أوجد المشتقة الثالثة لكل من :

(أ) ص = $س^٥$ − $س^٣$ + س −٢

(ب) ص = ٢ س + $\frac{٣}{س}$

(جـ) ص = $\frac{س - ٢}{٢ س + ٣}$

(د) $س^٢$ + $ص^٢$ = ١

(هـ) ص = جا س

(و) ص = جتا ٢ س

(ز) ص = ٣ س + جا س

(ح) ص = س جا س

(٥) أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(أ) ص = س + $\frac{١}{س}$ عند النقطة (١ ، ٢)

(ب) ص = $\frac{٢ س - ١}{س + ٣}$ عند النقطة (−٢ ، −٥)

(جـ) ص = ٢ جا ٢ س عندما س = $\frac{ط}{٢}$

(د) ص = جا س − جتا س عندما س = $\frac{ط}{٤}$

(هـ) ص = س جتا ٢ س عندما س = $\frac{ط}{٢}$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٦) إذا كان د (س) = أ س^{٣} + ٣ س^{٢} و دً (س) = ١٢ فما قيمة أ

(٧) إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١ أثبت أن : ص^{٣} صً + ١ = ٠

(٨) إذا كان ٢ ص^{٣} = ٣ س^{٢} أثبت أن : $\text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + ٢ \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢} = \frac{١}{\text{ص}}$

(٩) إذا كان ص = حتا س أثبت أن : $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢} - \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} = ١$

(١٠) إذا كان ص = جا ٢ س أثبت أن : $٤ \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢} + \left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}\right)^{٢} = ١٦$

(١١) إذا كان ص = ٣ جا (٢ س + ١) أثبت أن : $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} + ٤\,\text{ص} = ٠$

(١٢) إذا كان س = (ص^{٣} − ١)^{٥} أثبت أن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ص}^{٣} - ١}{١٥\,\text{س ص}^{٢}}$

تمارين (٤) : على الاشتقاق الضمنى و المشتقات العليا (كتاب لامى)

(أولا) مسائل على مشتقة الدالة الضمنية :

إذا كانت ص = د (س) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل من العلاقات الآتية :

(١) : س^{٢} + ص^{٢} = ٩ [−س/ص]

(٢) : س^{٣} − ص^{٣} = ٣ س [(س^{٢} −١)/ص^{٢}]

(٣) : س^{٢} ص^{٣} + ٦ = ٠ [−٢ص/٣س]

(٤) : س^{٣} = ٣ ص^{٢} [٣ص/٢س أ، س^{٢}/٢ص]

(٥) : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٨ ص − ١١ = ٠ [(س − ٣)/ (ص − ٤)]

(٦) : س^{٢} + ص^{٢} = ٢ س ص [١]

(٧) : س^{٢} − ٣ س ص − ٢ ص^{٢} = ٩ [(٢س − ٣ص)/ (٣س + ٤ص)]

(٨) : س^{٣} − ٦ س ص − ٣ ص^{٣} = ٥ [(س^{٢} − ٢ص)/ (٢س + ٣ص^{٢})]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

■ (٩) : $س^٣ + ٣ س^٢ ص + ٣ س ص^٢ + ص^٣ = ١٠$ [-١]

■ (١٠) : $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$ [$-\sqrt{ص} / \sqrt{س}$]

■ (١١) : (أ) $س^ن + ص^ن = أ^ن$ (ب) $س^ن . ص^ن = أ^ن$

حيث أ ثابت ، ن عدد صحيح موجب. [$-\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن - ١}$ ، $-\frac{ص}{س}$]

■ (١٢) : إذا كانت $٣ ص^٥ = س^٣ - ٥ س^٢ + ٣ س$ ، أوجد قيم س التي يكون عندها

$\frac{ى ص}{ى س} = ٠$ [٣ ، ١/٣]

■ (١٣) السودان (٨٠) : إذا كان $س^٣ = س ص + ٦$ أوجد $\frac{ى ص}{ى س}$ عندما ص = ١

[١/٨]

■ (١٤) السودان (٦٩) : إذا كانت $ص^٢ + ٢ أ س - أ^٢ = ٠$ (حيث أ ثابت)

فاثبت أن : $\left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ + \frac{٢ س}{ص} \left(\frac{ى ص}{ى س}\right) = ١$

■ (١٥) البحرين (٧٠) : إذا كان $س = (ص^٢ - ١)^٦$ اثبت أن :

$$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ص^٢ - ١}{١٢ س ص}$$

■ (١٦) مصر (٧٠) : إذا كان $س^٢ (ص^٢ + ١) = ٥$ اثبت أن :

$$س^٣ ص \frac{ى ص}{ى س} + ٥ = ٠$$

■ (١٧) السعيدية : إذا كان $(ص + ١)^٣ = (س - ٢)^٢$ فاثبت أن :

$$٩ (ص + ١) \left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ = ٤$$

■ (١٨) السودان (٦٩) : إذا كان $(٤ س - ص)^٤ (س + ص) = ١$ اثبت أن :

$$\frac{ى ص}{ى س} - ٤ \frac{س}{ص} = ٣$$

■ (١٩) : إذا كان $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = أ^٢$ فاثبت أن $\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ص}{س}$ (أ ثابت)

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(ثانيا) مسائل على المشتقات العليا للدالة :

■ (١) : إذا كانت : $\text{ص} = \frac{٢}{٥}\text{س}^{٥} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ١٢$

أوجد $\frac{\text{د}^{٦}\text{ص}}{\text{د س}^{٦}}$ [صفر]

■ (٢) : إذا كانت : $\text{ص} = (٣\text{س} - ٢)^{٥}$ أوجد $\frac{\text{د}^{٤}\text{ص}}{\text{د س}^{٤}}$ عند $\text{س} = ١$ [٩٧٢٠]

■ (٣) : إذا كانت $\text{ص} = \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \frac{٣}{٤}\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٣} + ٧\text{س} - ١٥$ أوجد قيمة

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ عندما $\frac{\text{د}^{٤}\text{ص}}{\text{د س}^{٤}} = \text{صفر}$ [$-\frac{٤٥}{٨}$]

أوجد المشتقة الثانية لكل من الدوال الآتية :

■ (٤) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢}}$

■ (٥) : $\text{د}(\text{س}) = ٢\left(\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ [$-\frac{١}{٢}\text{س}^{-٥/٢}(\text{س} + ٣)$]

■ (٦) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}}$ [$\frac{٤}{٩}(\text{س}^{٢} + ٦)(\text{س}^{٢} + ٢)^{-٤/٣}$]

■ (٧) : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢}(١ - \text{س}^{٢})^{٢}$ [$٢ - ٢٤\text{س}^{٢} + ٣٠\text{س}^{٤}$]

■ (٨) : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{٤ + \text{س}^{٢}}$ [$(٢\text{س}^{٣} + ١٢\text{س}) / (٤ + \text{س}^{٢})^{٣/٢}$]

أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية :

■ (٩) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢}}$ [$-١٢\text{س}^{-٥}(\text{س} + ٢)$ ، $\text{س} \neq ٠$]

■ (١٠) : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ [$٦(\text{س} + ١)^{-٤}$ ، $\text{س} \neq -١$]

■ (١١) : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} - ٣}$ [$٣(٢\text{س} - ٣)^{-٥/٢}$ ، $\text{س} > \frac{٣}{٢}$]

■ (١٢) : إذا كانت $\text{ص} = (٣\text{س} - ٢)(٢\text{س} + ٥)$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٩$

اثبت أن : $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} - \frac{\text{د}^{٢}\text{ع}}{\text{د س}^{٢}} = ١٠$

■ (١٣) : إذا كان $٣\text{ص}^{٢} = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س}$ فاثبت أن :

$\text{ص}\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢} + ١ = ٢\text{س}$

(١٤) السودان (٧١) : إذا كان $٣ س^٤ = ٤ ص^٣ - ٥$. اثبت أن :

$$\frac{٣ س^٢}{ص^٢} = \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + \frac{٢}{ص} \left(\frac{ء ص}{ء س} \right)^٢$$

(١٥) السودان (٧٢) : إذا كانت س ص = ١ اثبت أن :

$$س^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$$

(١٦) : إذا كانت $س^٢ ص^٢ = ١$ اثبت أن $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} - \frac{٢ ص}{س^٢} = ٠$

(١٧) : إذا كانت $س^م ص^ن = ١$ اثبت أن :

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{م (م + ن) ص}{ن^٢ س^٢}$$ حيث م ، ن عددان قياسيان ثابتان .

(١٨) : إذا كان : س + ٢ س ص + ص = ٥ اثبت أن :

$$(١ + ٢ س)^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ٤ (١ + ٢ ص)$$

(١٩) : إذا كان $ص = \frac{٢ س + ١}{س - ٢}$ اثبت أن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{٢}{٢ - س} \times \frac{ء ص}{ء س}$

(٢٠) مصر (٨١) : إذا كان $ص \sqrt{١ + س^٢} = ١$ اثبت أن :

$$(١ + س^٢) \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص = \text{صفر.}$$

(٢١) : إذا كان $د(س) = \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ اثبت أن :

$$(س^٢ + ١) \, د''(س) + ٣ س \, د'(س) = \text{صفر.}$$

(٢٢) : إذا كان $ص^٢ - س ص = ٧$ اثبت أن :

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} (٢ ص - س) + ٢ \left(\frac{ء ص}{ء س} \right)^٢ - ٢ \frac{ء ص}{ء س} = \text{صفر}$$

■ (٢٣) : إذا كان : $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ك^٢$ حيث ك ثابت اثبت أن $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} =$ صفر

■ (٢٤) : إذا كانت ص $= \frac{٣ س + ١}{(س - ١)^٢}$ ، س $\neq$ ١ فاثبت أن :

$$(س - ١)^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٤ (س - ١) \frac{ء ص}{ء س} + ٢ ص = صفر$$

■ (٢٥) : إذا كانت ص $= (س + \sqrt{١ + س^٢})^٥$ اثبت أن :

$$(١ + س^٢) \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + س \frac{ء ص}{ء س} - ٢٥ ص = صفر$$

■ (٢٦) : إذا كانت ص = د (ع) ، ع = ر (س) . اثبت أن :

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{ء^٢ ص}{ء ع^٢} \times \left(\frac{ء ع}{ء س}\right)^٢ + \frac{ء^٢ ع}{ء س^٢} \times \frac{ء ص}{ء ع}$$

■ (٢٧) : إذا كانت س $= ن^٢ - ١$ ، ص $= ن^٣ - ٤$ أوجد قيمة $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ عندما ن = ٢

[٨/٣]

■ (٢٨) : إذا كانت ص $= (س^٢ + ٣) (س - ١)$ ، ع $= (٢س + ١) (س + ٤)$

اثبت أن $\frac{ء^٢ ص}{ء ع^٢} = \frac{١٢ س^٢ + ٥٤ س - ٣٠}{(٤س + ٩)^٣}$

■ (٢٩) : إذا كانت الدالة د المعرفة كالآتى :

$$د (س) = \begin{cases} حـ س^٢ - ١ & \text{عندما } س \leq ١ \\ \frac{أ س^٣}{|س|} + ب س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ١ أوجد قيم أ ، ب ، حـ [٣ ، -٣ ، ١]

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٥) : على الاشتقاق الضمنى و المشتقات العليا (كتاب لامى)

إبحث قابلية الاشتقاق لكل من الدوال الاتيه عند النقط المبينه

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س < -١ \\ -٢س - ١ & \text{عندما } س \geq -١ \end{cases}$ عند س = -١

(٣) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & \text{عندما } س \leq ١ \\ ٥س - ٢ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٤) $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & \text{عندما } س \leq ١ \\ ٥ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٥) $د(س) = \sqrt{(س - ٢)^٢}$ عند س = ٢

(٦) $د(س) = س\,|س + ٣|$ عند س = -٣

(٧) إذا كانت الداله د حيث : $د(س) = \begin{cases} ١ - \frac{١}{٤}س & \text{عندما } س \leq ٢ \\ \frac{أ}{س} & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

متصله عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت أ . ثم اثبت أن الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

(٨) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + أس - ١ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٢ \\ ١ + ب س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيم الثابتين أ، ب ثم ادرس قابلية الاشتقاق للداله د عند س = ٢

(٩) أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب اللتين تجعلان الداله د حيث

$د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & \text{عندما } س > ١ \\ ٢أس + ب & \text{عندما } س \leq ١ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ١

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(١٠) $د(س) = \begin{cases} م س + ٣ حـ & \text{عندما } س < ١ \\ حـ س^٢ + ٤ م & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ ، د (١) = ١١ أوجد قيم الثابتين م ، حـ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ١

(١١) أوجد قيم أ ، ب ، حـ ∈ ح اذا كانت د (س) قابلة للاشتقاق مرتين حيث

$د(س) = \begin{cases} أ س^٢ + ب س + حـ & \text{عندما } س < ٠ \\ ٢ س + ٥ & \text{عندما } س \geq ٠ \end{cases}$

(١٢) الدالة د معرفه كالاتي :

$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ب س + ٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ أ س + حـ & \text{عندما } س \geq ٢ \end{cases}$

حيث أ ، ب ، حـ ثوابت. إذا كان متوسط تغير الداله د عندما تتغير س من ١ الى ٥ يساوى ٣ وكانت الداله قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فعين قيم أ ، ب ، حـ

(١٣) اذا كانت س = (ص^٢ - ١)^٥ اثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص^٢ - ١}{١٥ س ص^٣}$

(١٤) اذا كانت ص = د (ر (س)) ، $د'(س) = \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ ، $ر(س) = \frac{١}{س}$

اثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \begin{cases} \frac{-١}{س^٢ \sqrt{١ + س^٢}} & \text{عندما } س > ٠ \\ \frac{١}{س^٢ \sqrt{١ + س^٢}} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

(١٥) اذا كانت ص = د (ع) ، ع = ر (س) أثبت أن :

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = د''(ع) [ر'(س)]^٢ + ر''(س) د'(ع)$

(١٦) اذا كانت د (س) = $\frac{ق(س)}{ر(س)}$ حيث ق (س) ، ر (س) دالتان قابلتان للاشتقاق عند س = أ ، د' (أ) = صفر فأثبت أن د (أ) = $\frac{ق'(أ)}{ر'(أ)}$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(١٧) اذا كانت : $ص^٢ + ٢ س^٢ - ٥ س = ١٢$ أثبت أن

$$ص \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^٢ + ٦ س = ٠$$

(١٨) اذا كانت : $ص^٢ = س^٢ (١ - س)$ فأثبت أن :

$$ص \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^٢ + ٣ س = ١$$

(١٩) اذا كانت : $ص^٣ = ٣ س^٤ - ٣ س^٢ + ٥$ فأثبت أن

$$ص^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٢ ص \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^٢ + ٢ = ١٢ س^٢$$

(٢٠) اذا كانت : $٢ ص^٣ = ٣ س^٢$ أثبت أن

$$ص \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٢ \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^٢ = \frac{١}{ص}$$

(٢١) اذا كانت $ص^٢ + س^٢ ص^٢ = ٨$ أثبت أن

$$(س^٢ + ١) \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$$

(٢٢) اذا كانت $س ص = ١$ أثبت أن : $س^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$

(٢٣) اذا كانت $ص = \sqrt{س}$ فأثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} + ٢ ص^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ٠$

(٢٤) اذا كانت $ص^٢ = \sqrt{٤ س + ١}$ ، $س > -\frac{١}{٤}$ أثبت أن : $٣ ص'^٢ + ص ص'' = ٠$

(٢٥) إذا كان $ص = أ س^{ن + ١} + ب س^{-ن}$ فأثبت أن : $س^٢ \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ن (ن + ١) ص$

(٢٦) إذا كانت $س^ن ص^م = (س + ص)^{م + ن}$ فأثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص}{س}$

(٢٧) اذا كانت $س^٢ = ٢ ن - ٣$ ، $ص = ٢ ن^٢ - ١$ أثبت أن :

أولا : $\frac{ء ص}{ء س} = ٢ س (س^٢ + ٣)$ ثانياً : $٣ \frac{ء ص}{ء س} - س \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} - ١٢ س = ٠$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٢٨) اذا كان $س = \frac{ن}{١ + ن}$ ، $ص = \frac{ن + ١}{ن}$ أثبت أن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{٢ ص}{س^٢}$

(٢٩) اذا كان $ص = \frac{ع + ١}{ع - ١}$ ، $س = \frac{ع - ١}{ع + ١}$ فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند $س = ٢$

(٣٠) اذا كانت $س = ن^٢ - ٣$ ، $ص = ن^٣ + ٢$ فأوجد $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ عند $ن = ٣$

(٣١) اذا كانت $ص = س^٣ + ٢$ ، $ع = س^٢ + ٣$ فعين $\frac{ء^٢ ع}{ء ص^٢}$ عندما $س = ٢$

(٣٢) اذا كان $\frac{ء ع}{ء س} = ١ + ٢ س$ ، $\frac{ء ص}{ء س} = س^٢ + ٣$ فأوجد $\frac{ء^٢ ع}{ء ص^٢}$ عند $س = ١$

(٣٣) اذا كانت $ص = (س^٢ + ١)(س - ٢)$ ، $ع = (س + ٧)(س - ٢)$

فاثبت أن : $(٢ س + ٥)^٣ \frac{ء^٢ ص}{ء ع^٢} = ٦ س^٢ + ٣٠ س - ٢٢$

(٣٤) اذا كانت $ص = \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$ ، $ع = \sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}$ ، $س > ٠$

اثبت أن $\frac{ء^٢ ص}{ء ع^٢} = \frac{٤ س \sqrt{س}}{(س + ١)^٢}$

(٣٥) اذا كان : $د(س) + د'(س) = س^٣ + ٥ س^٢ + س + ٢$ أوجد $د(س)$

(٣٦) اذا كانت $ص = \frac{حتا س}{س}$ اثبت أن

$س \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ٢ \frac{ء ص}{ء س} + س ص = ٠$

(٣٧) اذا كانت $ص = حا ٢ س$ اثبت أن : $\frac{ء^٣ ص}{ء س^٣} + ٤ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

(٣٨) أوجد المشتقه الثانية للداله د حيث $د(س) = حا س - حتا س$

عند $س = \frac{ط}{٤}$

(٣٩) أوجد المشتقه الثانية للداله د حيث $د(س) = ٢ س حا س حتا س$

عند $س = ط$

(٤٠) اذا كان ص = حتا س اثبت أن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} - ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ١$

(٤١) اذا كان ص = حا ٣ س

اثبت أن : $٩\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} + \left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right)^{٢} = ٨١$

(٤٢) اذا كان ص = ٣ حا (٢ س + ١) اثبت أن : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٤ص = ٠$

(٤٣) اذا كانت ص = حا ٣ س + حتا ٣ س

اثبت أن : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -٩ص$

(٤٤) اذا كانت س ص = حتا س

اثبت أن : $س \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢ \frac{ءص}{ءس} + س ص = ٠$

(٤٥) اذا كان : حا ص + حتا ٢ س = ٠

اثبت أن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ طا س − ٤ حتا ٢ س قا ص = ٠

(٤٦) اذا كان : حا ٢ س − حتا ٢ ص = ٠

اثبت أن : ٢ طا ٢ ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٩\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} - ٤ = ٠$

(٤٧) اذا كانت ف = أ حتا (ل ن + م) هى معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم حيث أ ، ل ، م ثوابت فاثبت أن : $\frac{ء^{٢}ف}{ءن^{٢}} + ل^{٢} ف = ٠$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٤٨) اذا كانت $\text{ص} = \text{حا س} - \frac{1}{2}\,\text{حا}^{3}\text{س}$ فأثبت أن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{حتا}^{3}\text{س}$

(٤٩) اذا كانت $\text{ص} = \text{حا}^{3}\text{س} + \text{حتا}^{3}\text{س}$

فاثبت أن : $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = \frac{3}{2}\,(\text{حتا س} + \text{حا س})\,(3\,\text{حا}\,2\,\text{س} - 2)$

(٥٠) اذا كا س ص = ٥ حا أ س + ٣ حتا أ س

اثبت أن $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} + \frac{2}{\text{س}}\,\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{أ}^{2}\,\text{ص} = 0$

(٥١) اذا كانت $\text{ص} = \text{طا}^{2}\text{س}$

فاثبت : $\frac{1}{2}\,\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = (1 + \text{ص})\,(1 + 3\,\text{ص})$

(٥٢) أوجد المشتقة العاشره والمشتقة الحادية عشر للداله

$\text{د (س)} = \text{س}^{10} - 14\,\text{س}^{7} + 3\,\text{س}^{5} + 2\,\text{س}^{2} - \text{س} + 2$

(٥٣) أوجد $\frac{\text{ء}^{4}\text{ص}}{\text{ء س}^{4}}$ للدالة $\text{ص} = \frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}$ حيث $\text{س} \neq 1$ ثم استنتج $\frac{\text{ء}^{ن}\text{ص}}{\text{ء س}^{ن}}$

الفصل الثالث :

تطبيقات التفاضل

(١) التطبيق الهندسى (٢) المعدلات الزمنية المرتبطة

أولاً : التطبيق الهندسى

مراجعة لبعض مفاهيم الهندسة التحليلية

(١) ميل الخط المستقيم :

إذا علم عليه نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$	إذا علمت معادلته العامة $أ س + ب ص + جـ = ٠$	إذا علمت زاوية ميله على الاتجاه الموجب لمحور السينات هـ
الميل $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$	الميل $= \frac{-أ}{ب}$	الميل = ظا هـ

ملاحظات على العلاقة بين ميلى مستقيمين :

إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ وكان :

- المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين : فإن $م_١ = م_٢$
- المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدين : فإن $م_١ \times م_٢ = -١$
- ميل محور السينات يساوى صفر ، وكذلك أى مستقيم موازى له .
- ميل محور الصادات غير معرف $= \frac{١}{صفر}$ ، وكذلك أى مستقيم موازى له .

(٢) تكوين معادلة الخط المستقيم :

إذا علم نقطتين عليه $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$	إذا علمت نقطة عليه $(س_١ ، ص_١)$ والميل م
$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$	$(ص - ص_١) = م (س - س_١)$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٣) تعاريف وقواعد هامة :

- إذا كانت النقطة تقع على منحنى ما (أو مستقيم ما) فإنها تحقق معادلته
- إذا تقاطع منحنيان (أو مستقيمان) فإننا نحصل على نقط تقاطعهما بحل معادلتيهما آنياً .
- ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة
- العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة .
- زاوية التقاطع بين منحنيين هي الزاوية بين المماسين للمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين .

ملحوظة هامة : إذا كانت زاوية التقاطع بين منحنيين = ٩٠° فإن المنحنيين يكونان متقاطعين على التعامد

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس و العمودى على منحنى

ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه = $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)_{(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)}$

ميل العمودى على منحنى الدالة ص = د(س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه = $\dfrac{-1}{\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)_{(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)}}$

مثال (١): اوجد ميل المماس لمنحنى الدالة س² + ٣س ص + ٥ص² = ٣ عند النقطة س = ٢ الواقعة عليه .

الحل: (أولاً) نوجد الإحداثي الصادى للنقط التي إحداثيها السيني = ٢

٤ + ٦ص + ٥ص² = ٣ ∴ ٥ص² + ٦ص + ١ = ٠

∴ (ص + ١)(٥ص + ١) = ٠ ∴ ص = -١ أو ص = $\frac{-1}{5}$

∴ توجد على المنحنى نقطتان احداثيهما السيني = ٢ هما (٢ ، -١) ، (٢ ، $\frac{-1}{5}$)

(ثانياً) نوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند أي نقطة على منحنى الدالة بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\because$ س^2 + ٣س ص + ٥ص^2 = ٣ $\therefore$ ٢س + ٣ (س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص) + ١٠ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$\therefore$ (٣س + ١٠ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢س − ٣ص

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٢س + ٣ص}{٣س + ١٠ص}$

(ثالثاً) نوجد ميل المماس عند كل من النقطتين بالتعويض في $\frac{ءص}{ءس}$ بإحداثي كل نقطة :

$\therefore$ ميل أحد المماسين = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٢، −١)} = \frac{-(٤-٣)}{٦-١٠} = \frac{-١}{-٤} = \frac{١}{٤}$

، ميل المماس الآخر = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٢، -\frac{١}{٥})} = \frac{-(٤-\frac{٣}{٥})}{٦-٢} = \frac{-١٧}{٤ \times ٥} = \frac{-١٧}{٢٠}$

مثال (٢) : اوجد النقط التي تقع على المنحنى ص = س^2 − ٤س + ٣ والتي عندها يكون المماس للمنحنى: (أولاً) يوازي محور السينات

(ثانياً) يوازي المستقيم ص − ٢س + ٣ = ٠ . (ثالثاً) عمودي على المستقيم ٦ص − ٣س − ٥ = ٠

الحل :

$\because$ ص = س^2 − ٤س + ٣ ⟵ (١) $\therefore$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س − ٤

أي أن ميل المماس عند أي نقطة (س ، ص) على المنحنى = ٢س − ٤

(أولاً) $\because$ المماس يوازي محور السينات $\therefore$ ميله = صفر أي $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

$\therefore$ ٢س − ٤ = ٠ ⟸ س = ٢ وبالتعويض في (١) $\therefore$ ص = ٤ − ٨ + ٣ = −١

$\therefore$ المماس للمنحنى يكون موازياً لمحور السينات عند النقطة (٢ ، −١)

(ثانياً) المستقيم ص − ٢س + ٣ = ٠ ، ميله = $\frac{-أ}{ب} = \frac{-(-٢)}{١}$ = ٢

$\because$ المماس يوازي هذا المستقيم $\therefore$ ميل المماس للمنحنى = ٢ أي أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢

$\therefore$ ٢س − ٤ = ٢ $\therefore$ س = ٣ وبالتعويض في (١) $\therefore$ ص = ٩ − ١٢ + ٣ = ٠

$\therefore$ المماس للمنحنى يكون موازياً للمستقيم ص − ٢س + ٣ = ٠ عند النقطة (٣ ، ٠)

(ثالثاً) المستقيم ٦ص − ٣س − ٥ = ٠ ، ميله = $\frac{-أ}{ب} = \frac{-(-٣)}{٦} = \frac{١}{٢}$

$\because$ المماس ⊥ هذا المستقيم $\therefore$ ميل المماس للمنحنى = −٢ أي أن $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢

$\therefore$ ٢س − ٤ = −٢ $\therefore$ س = ١ وبالتعويض في (١) $\therefore$ ص = ١ − ٤ + ٣ = ٠

$\therefore$ المماس للمنحنى يكون عمودياً على المستقيم ٦ص − ٣س − ٥ = ٠ عند النقطة (١ ، ٠)

ملحوظة هامة : **مشتقة الدوال المثلثية :**

إذا كانت ص = جاس فإن صَ = جتاس

، إذا كانت ص = جتاس فإن صَ = − جاس

، وإذا كانت ص = ظاس فإن صَ = قا^{2}س

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

مثال (٣): اوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = جا س جتا س والتى عندها يكون المماس عمودياً على المستقيم ص = س

الحل: ∵ ص = جا س جتا س بتطبيق قاعدة الاشتقاق لحاصل ضرب دالتين

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جا س × ـ جا س + جتا س × جتا س = ـ جا^٢ س + جتا^٢ س = جتا ٢س

∵ المستقيم ص = س ميله = ١ ∴ ميل العمودى عليه = ـ ١

نضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ ١ ∴ جتا ٢س = ـ ١ ⇐ ٢س = ١٨٠ ∴ س = ٩٠°

وبالتعويض فى المعادلة ص = جا س جتا س ∴ ص = جا ٩٠° جتا ٩٠° = ٠

∴ النقطة الواقعة على المنحنى هى (٩٠°، ٠)

ملحوظة : توجد نقط أخرى على هذه الدالة تحقق نفس الشرط وهى النقط (٩٠+٣٦٠، ٠) ، (٩٠+٢(٣٦٠)، ٠) وهكذا ..

معادلتا المماس و العمودى لمنحنى

(١) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س١، ص١) هى :

(ص ـ ص١) = م (س ـ س١) حيث م = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١، ص_١)}$

(٢) معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س١، ص١) هى :

(ص ـ ص١) = $\frac{-١}{م}$ (س ـ س١) حيث م = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١، ص_١)}$

مثال (٤): اوجد معادلة المماس و العمودى للمنحنى ص = س^٣ ـ ٢س^٢ + ٥ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى احداثيها السينى = ـ ١

الحل: ∵ ص = س^٣ ـ ٢س^٢ + ٥ ∴ عندما س = ـ١ تكون ص = ـ١ ـ ٢ + ٥ = ٢

∴ (ـ١، ٢) تقع على المنحنى

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^٢ ـ ٤س ⇐ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١، ٢)}$ = ٣ × ١ ـ ٤(ـ١) = ٧

∴ ميل المماس = ٧

وتكون معادلة المماس (ص ـ ٢) = ٧ (س + ١) أى ص ـ ٧س ـ ٩ = ٠

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٧}$

وتكون معادلة العمودى (ص ـ ٢) = $\frac{-١}{٧}$ (س + ١) أى ٧ص + س ـ ١٣ = ٠

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

مثال (٥): اثبت أن النقطة $(-١ ، ٣)$ تقع على المنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص = ٢٠$ ثم اوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى عندها .

الحل: النقطة $(-١ ، ٣)$ تقع على المنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص = ٢٠$ إذا حققت معادلته فبالتعويض عن $س = -١$ ، $ص = ٣$ في معادلة المنحنى نجد أنه :

الطرف الأيمن $= ١ + ٩ + ٤ + ٦ = ٢٠ =$ الطرف الأيسر $\therefore (-١ ، ٣)$ تقع على المنحنى

بتفاضل معادلة المنحنى بالنسبة إلى س

$\therefore ٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} - ٤ + ٢ \frac{دص}{دس} = ٠ \Leftarrow ٢(ص + ١) \frac{دص}{دس} = ٤ - ٢س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ٢}$ $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٢ - س}{ص + ١}$

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(-١ ، ٣)$ الواقعة عليه

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(-١ ، ٣)} = \frac{٢ - (-١)}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$ وميل العمودي $= \frac{-٤}{٣}$

$\therefore$ معادلة المماس هي : $ص - ٣ = \frac{٣}{٤}(س + ١)$ أي $٤ص - ٣س - ١٥ = ٠$

ومعادلة العمودي هي : $ص - ٣ = \frac{-٤}{٣}(س + ١)$ أي $٣ص + ٤س - ٥ = ٠$

مثال (٦): اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة $ص = س^٢ + ٢س - ٣$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $ص - س + ١ = ٠$

الحل: نوجد نقط تقاطع المستقيم مع المنحنى بحل معادلتيهما آنياً :

$\therefore ص = س^٢ + ٢س - ٣ \leftarrow (١)$ ، $\therefore ص - س + ١ = ٠ \Leftarrow ص = س - ١ \leftarrow (٢)$

بالتعويض من (٢) في (١) $\therefore س - ١ = س^٢ + ٢س - ٣$ $\therefore س^٢ + س - ٢ = ٠$

$\therefore (س - ١)(س + ٢) = ٠$ $\therefore س = ١$ أو $س = -٢$

وبالتعويض في (٢) عندما $س = ١ \Leftarrow ص = ٠$ وعندما $س = -٢ \Leftarrow ص = -٣$

$\therefore$ نقط التقاطع هي $(١ ، ٠)$ ، $(-٢ ، -٣)$

، $\therefore$ ميل المماس للمنحنى عند أية نقطة $(س ، ص)$ عليه $= \frac{دص}{دس} = ٢س + ٢$

عند النقطة $(١ ، ٠)$

ميل المماس م $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{(١ ، ٠)} = ٢ \times ١ + ٢ = ٤$ وميل العمودي $= \frac{-١}{٤}$

$\therefore$ معادلة المماس هي $ص - ٠ = ٤(س - ١)$ أي $ص - ٤س + ٤ = ٠$

ومعادلة العمودي هي $ص - ٠ = \frac{-١}{٤}(س - ١)$ أي $٤ص + س - ١ = ٠$

عند النقطة $(-٢ ، -٣)$

ميل المماس م $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{(-٢ ، -٣)} = ٢(-٢) + ٢ = -٢$ وميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

$\therefore$ معادلة المماس هي $ص + ٣ = -٢(س + ٢)$ أي $ص + ٢س + ٧ = ٠$

ومعادلة العمودي هي $ص + ٣ = \frac{١}{٢}(س + ٢)$ أي $٢ص - س + ٤ = ٠$

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

مثال (٧): اثبت أن المنحنيين $ص = ٢س^٢ - ٣س + ٨$ ، $ص = س^٢ - ٣س + ٩$ يتقاطعان على التعامد عند النقطة التي احداثيها السيني = ١

الحل: بالتعويض عن س = ١ في معادلة المنحنى الأول ∴ ص = ٢ - ٣ + ٨ = ٧
∴ (١ ، ٧) تقع على المنحنى الأول
∴ (١ ، ٧) هي إحدى نقط تقاطع المنحنيين

بالنسبة للمنحنى الأول : $\frac{ءص}{ءس} = ٤س - ٣$
∴ ميل المماس للمنحنى الأول عند (١ ، ٧) = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(١ ، ٧)} = ٤(١) - ٣ = ١$

بالنسبة للمنحنى الثاني : $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$
∴ ميل المماس للمنحنى الثاني عند (١ ، ٧) = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(١ ، ٧)} = ٢(١) - ٣ = -١$

∵ حاصل ضرب المماسين للمنحنيين = ١ × -١ = -١
∴ المماسين للمنحنيين عند النقطة (١ ، ٧) متعامدان
أي أن المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، ٧)

مثال (٨): اثبت أن المنحنيين $ص = ٢س^٢ + س + ١$ ، $ص = س^٢ - س$ متماسان وأوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس .

الحل: ∵ $ص = ٢س^٢ + س + ١$ ← (١) ، $ص = س^٢ - س$ ← (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) معاً ← $٢س^٢ + س + ١ = س^٢ - س$ ∴ $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$
∴ (س + ١)(س + ١) = ٠ ∴ س = -١ وبالتعويض في (٢) ∴ ص = ١ + ١ = ٢
∴ المنحنيان يتقاطعان في النقطة (-١ ، ٢)

$م_١$ ميل المماس للمنحنى الأول عند (-١ ، ٢) = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٢)} = \left[٤س + ١\right]_{(-١ ، ٢)} = -٣$
$م_٢$ ميل المماس للمنحنى الثاني عند (-١ ، ٢) = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(-١ ، ٢)} = \left[٢س - ١\right]_{(-١ ، ٢)} = -٣$
∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (-١ ، ٢)
معادلة المماس المشترك لهما هي : (ص - ٢) = -٣ (س + ١) أي ص + ٣س + ١ = ٠

مثال (٩): أوجد معادلة المماس والعمودي عليه للمنحنى $ص = ظا \frac{س}{٢}$ عند النقطة التي احداثيها السيني $س = \frac{٣ط}{٢}$ الواقعة على المنحنى .

الحل: عند $س = \frac{٣ط}{٢}$ يكون $ص = ظا \frac{س}{٢} = ظا \frac{٣ط}{٤} = ظا ١٣٥^\circ = -١$
∴ النقطة $(\frac{٣ط}{٢} ، -١)$ تقع على المنحنى
∵ $ص = ظا \frac{س}{٢}$ ← $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} قا^٢ \frac{س}{٢}$

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

∴ ميل المماس للمنحنى عند $(\frac{٣ط}{٢} ، -١)$ $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(\frac{٣ط}{٢} ، -١)} = \frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{٣ط}{٤} = \frac{١}{٢}(-\sqrt{٢})^{٢} = ١$

∴ معادلة المماس هي $ص + ١ = ١ (س - \frac{٣ط}{٢})$ أي $ص - س + ١ + \frac{٣ط}{٢} = ٠$

، معادلة العمودي هي $ص + ١ = -١ (س - \frac{٣ط}{٢})$ أي $ص + س + ١ - \frac{٣ط}{٢} = ٠$

مثال (١٠) : أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة ص = س جاس − جتا ٢س عند النقطة $س = \frac{ط}{٢}$.

الحل : عند $س = \frac{ط}{٢}$ تكون $ص = \frac{ط}{٢}$ جا $\frac{ط}{٢}$ − جتا ط $= \frac{ط}{٢} × ١ - (-١) = \frac{ط}{٢} + ١$

∵ ص = س جاس − جتا ٢س ∴ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]$ = س جتا س + جا س + ٢ جا ٢س

∴ ميل المماس $= \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(\frac{ط}{٢} ، \frac{ط}{٢} + ١)} = \frac{ط}{٢}$ جتا $\frac{ط}{٢}$ + جا $\frac{ط}{٢}$ + ٢ جا ط = ٠ + ١ + ٠ = ١

معادلة المماس هي $ص - \frac{ط}{٢} - ١ = ١ (س - \frac{ط}{٢})$ أي ص − س = ١

، ∵ ميل العمودي على المماس = −١

∴ معادلة العمودي هي $ص - \frac{ط}{٢} - ١ = -(س - \frac{ط}{٢})$ أي ص + س = ط + ١

تمارين (١) : على التطبيق الهندسى (كتاب الوزارة)

(١) أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة :

(أ) س^{٣} − ٩س^{٢} − ص^{٢} + ٢٧س − ٢ص − ٢٨ = ٠ عند النقطة (٤ ، −٢)

(ب) ص^{٢} = $\frac{٨}{١ + س}$ عند النقطة (١ ، −٢)

(جـ) س^{٢} ص^{٢} −٢س − ٤ ص + ١ = ٠ عند النقطة (−١ ، ١)

(د) ص = جا ٢ س − جتا ٤ س عند س = $\frac{ط}{٤}$

(هـ) ص = ظا س عند س = $\frac{ط}{٣}$

(و) ص = جا س + جتا س عند س = $\frac{٣ ط}{٤}$

(٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} + ٣س + ص = ٠ والتى عندها يكون المماس عموديًا على المستقيم ٣ص + س + جـ = ٠ .

(٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} − ٤ س + ٥ التى يكون المماس موازيًا للمستقيم س + ص + ٢ = ٠ .

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

(٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ والتى عندها يكون المماس عموديًا على المستقيم ٣س – ٦ص = ٧

(٥) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى س ص = ٨ والذي يوازي المستقيم ص+ ٢س = ٩

(٦) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٥٢$ الموازيين للمستقيم ٢س + ٣ص = جـ

(٧) أوجد النقط التى على المنحنى ص = ظا $\frac{س}{٢}$ وعندها يكون المماس موازيًا للمستقيم ٧س – ٧ص + ٤ = ٠ حيث ٠ < س < ٢ ط

(٨) إذا كان المستقيم ١٣ س – ص – ٧ = ٠ يمس المنحنى ص = أ $س^٣$ + ب $س^٢$ عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب .

(٩) إذا كان المستقيم س + ص = ٣ يمس المنحنى ص = أ $س^٣$ + ب $س^٢$ – ٢س + ٦ عند النقطة (١ ، ٢) فما قيمة كل من أ ، ب .

(١٠) أثبت أن المنحنيين ص = ٣ $س^٢$ – ٥ س – ٢ ، ص = س٢ – ٣س – ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، –٤) .

(١١) أوجد قيم أ ، ب ، جـ حتى يكون لمنحنيي الدالتين ص = أ $س^٣$ + ب س ، ص = جـ $س^٢$ – س مماس مشترك عند النقطة (–١ ، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك .

(١٢) أثبت أن المنحنيين ص = $س^٢$ + ٦س + ٥ ، ص = $س^٣$ – $س^٢$ – س + ١ متماسان عند النقطة (–١ ، ٠) وأوجد معادلة المماس المشترك لهما .

(١٣) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ص = $س^٣$ والتى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، ٠) .

(١٤) أوجد النقط على المنحنى $س^٢$ + س ص + $ص^٢$ = ٣ التى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات .

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٢) : على التطبيق الهندسى (دليل التقويم)

٢ - أوجد احداثيات النقطة الواقعة على المنحنى : ٣ ص^{٢} - ٦ ص - س = ٠ التى يكون عندها المماس لهذا المنحنى موازيا لمحور الصادات.

٣ - إذا كان المنحنى : ص = ٣ س^{٢} - ٧ س + ٤ يقطع محور السينات فى النقطتين أ ، ب. اثبت أن المماسين عند أ ، ب متعامدان.

٤ - عين قيمه أ $\in$ ح التى تجعل محور السينات مماساً للمنحنى :
ص = س^{٢} - أس + أ - ١ **عند س = ١** ثم عين نقطة التماس.

٥ - اوجد معادلة المماس للمنحنى :

ص^{٢} + ٢ $\sqrt{\text{س ص}}$ = ٢١ - س^{٢} عند النقطة (١ ، ٤)

٦- أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى

س^{٢} - ٢ س ص - ص^{٢} = ١ عند النقطة (١ ، ٠)

٧ - أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

ص^{٢} (٢ أ - س) = س^{٣} عند النقطة (أ ، أ)

٨- أوجد معادلتى المماسين لمنحنى الدالة ص = س + $\frac{١}{\text{س}}$ اللذين يوازيان المستقيم
-٣س + ص + ٥ = ٠

٩- اوجد النقط على المنحنى ص = ٢ س^{٢} - ٦ س + ٣ والتى عندها يكون المماس عمودياً على المستقيم س - ٢ ص + ٧ = ٠

١٠- اوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٣ س^{٢} - س والذى يوازى المماس للمنحنى
ص = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$ عند النقطة (١ ، -١)

١١ - أوجد الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى $ص = \frac{٢ س - ١}{٣ س - ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١) ثم اوجد النقط الواقعة على المنحنى ويكون المماس عندها موازيا للمستقيم س + ٤ ص - ١ = ٠

١٢ - اوجد النقط الواقعة على المنحنى $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٣$ والتى يكون المماس عندها موازيا المحور الصادى.

١٣ - اثبت أن المماس لمنحنى الدالة ص = س | س | - ٣ س عند النقطة س = ٢ يوازى العمودى على منحنى الدالة عند النقطة س = -١ وأوجد معادلة كل منهما.

١٤ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = \frac{٢ س}{س + ٣}$ حيث س $\neq$ - ٣ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى احداثيها السينى = -١ ثم أوجد النقط الاخرى الواقعة على المنحنى والتى يكون المماس عند كل منهما موازيا لهذا المماس.

١٥ - أوجد قيم أ ، ب ، حـ حتى يكون لمنحنين الدالتين :

$ص = أ س^٢ + ب س$ ، $ص = حـ س^٢ - س$ مماس مشترك عند النقطة (-١ ، ٢) واوجد معادلة المماس المشترك.

١٦ - اوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عند النقطة (س ، ص) حيث س > ٠ ، ص > ٠ والتى تقع على المنحنى : $س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٦ ص + ٥ = ٠$ والتى يصنع عندها المماس للمنحنى زاوية قياسها $\frac{ط}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

١٧ - اثبت أن معادلة المماس للمنحنى $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ الواقعة عليه هى : $\frac{س س_١}{أ^٢} + \frac{ص ص_١}{ب^٢} = ١$

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

١٨ – اوجد معادلة العمودي على المنحنى ص = $\sqrt{س}$ + ٦ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص = س

١٩– اذا كان المنحنيات : $(س - أ)^٢ + ص^٢ = ٨$ ، $(س + أ)^٢ + ص^٢ = ٨$ متقاطعتين على التعامد أوجد قيمة أ .

٢٠ – أوجد قيم أ ، ب الحقيقية حتى يكون المنحنين ص = أ $س^٢$ ، ص = ب – حـ $س^٢$ متقاطعين على التعامد عند النقطة $(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{٢}{٤})$

٢١– أوجد معادلتى المماسين للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٥$ والذى كل منهما يميل على المحور السيتى الموجب بزاوية ظلها يساوى ٢

٢٢– أوجد معادلة العمودى للمنحنى ص = $س^٢$ – ٣ س + ٥ عند كل من نقطتى تقاطعه مع الدائرة : $س^٢$ – ٣ س + ص٢ = ٢٥

٢٣– أوجد معادلة المماس الذى يمر بالنقطة (١ ، –٤) ويمس المنحنى :

ص = $س^٢$ – س

٢٤ – إثبت أن المماسين المرسومين من النقطة $(\frac{٣}{٢} ، ٠)$ للمنحنى :

$س^٢$ + ٤ ص + ٤ = ٠ متعامدان

٢٥ – اذا كان العمودى للمنحنى ص = ٤ – $س^٢$ عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند حـ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة حـ.

٢٦– اوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عند النقطة (–١ ، ٢) للمنحنى ٤ ص = ٩ – $س^٢$.

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

٢٧- اثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ (حيث س > ٠)
عند أى نقطة عليه ومحور السينات ومحور الصادات تساوى ٢ وحدة مربعة.

٢٨- أوجد مساحة المثلث المكون اضلاعه من محور الصادات والمماس العمودى عليه
للمنحنى : ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ عند النقطة (١ ، −٤)

٢٩- نقطة تتحرك على المنحنى ص = س (س − ٥) أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى
يصنع فيها المماس والعمودى عليه مع محور السينات مثلث متساوى الساقين.

٣٠- أوجد النقطة الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها
للمنحنى ص + س^{٢} = ٠ والمستقيم المار بنقطتى التماس مثلث متساوى الأضلاع.

٣١- اثبت أن مجموع الجزءين المقطوعين من محورى الاحداثيات بأى مماس للمنحنى :
$\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = $\sqrt{أ}$ دائما مقدار ثابت.

٣٢- أوجد النقطة التى تقع على المنحنى ص = طا $\frac{س}{٢}$ وعندها يكون المماس موازيا
للمستقيم س − ص + ٣ = ٠ حيث ٠ < س < ٢ ط

٣٣- أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٢ حا س + حتا س عند النقطة س = ٠

٣٤- اوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = حا ٢ س − حتا ٤ س عند
س = $\frac{ط}{٤}$

٣٥- اوجد معادلة كل من المماس والعمودى لمنحنى الداله :

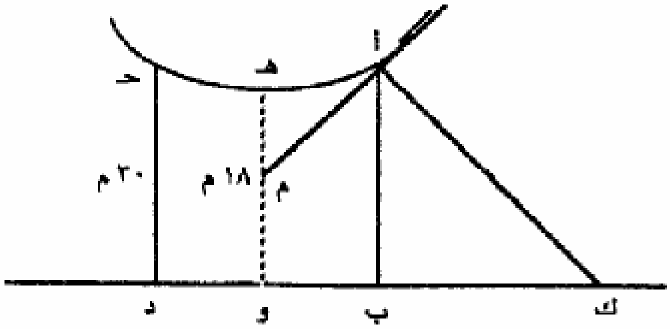
د (س) = س حتا $\frac{ط س}{٤}$ عند س = ٤

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

٣٦- اوجد معادلة المماس لمنحنى الداله الداله :

$$ص = \frac{٢ \text{ طا } س}{١ - \text{طا}^٢ س} \quad \text{عند } س = \frac{ط}{٦}$$

٣٧- علق سلق كهرباء بين حاملين راسيين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ د}$ ارتفاع كل منهما ٣٠ م والمسافه بينهما ٣٦ م فى نفس المستوى الافقى بحيث يصنع السلك شكلاً لدالة تربيعة. فإذا ربط الحامل $\overline{أ ب}$ بسلك مشدود عمودياً على منحنى السلك الكهربائى عند أ وربط الطرف الأخر عند ك بحيث ك ، ب ، د على استقامة واحدة وكان أقل ارتفاع لسلك الكهرباء عن سطح الأرض ١٨م اوجد طول $\overline{ك ب}$ وإذا قطع المماس عند أ $\overline{هـ و}$ فى النقطة م فأوجد مساحة شبه المنحرف أ ب و م.



٣٨- أوجد معادلتى المماسين للمنحنى $ص^٢ = س^٣$ عند النقطتين الواقعتين عليه ويقعان على مستقيم يوازى المحور الصادى وعلى بعد منه يساوى وحدة طولية موجبه. ثم استنتج معادلتا العمودين عليهما عند هاتين النقطتين.

٣٩- أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى $ص^٢ = ٤ س$ عند النقطة أ (س, ، ٢) واذا كان المماس والعمودى عليه للمنحنى عند أ يقابلان المحور السينى فى ب ، حـ، يقابلان المحور الصادى فى ؟ ، هـ فأوجد النسبة بين طولى $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{؟ هـ}$. ثم احسب مساحة الشكل الرباعى ب ؟ حـ هـ

٤٠- اذا كان : ٢ ص = حا ٢ س فأوجد :

(أ) قيم س من الفترة ٠ ≤ س < ط والتى عندها المماس يكون موازيا محور السينات.

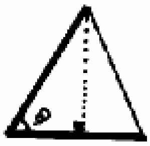
(ب) معادلة كل من المماس والعمودى عند هذه النقط.

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

ثانياً : المعدلات الزمنية المرتبطة

محيط و مساحة بعض الأشكال الهندسية

المثلث

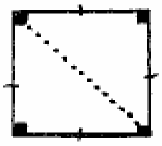


المحيط = مجموع أطوال أضلاعه

المساحة = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين × جا هـ بينهما

المربع

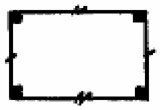


المحيط = طول الضلع × ٤

المساحة = طول الضلع × نفسه

= $\frac{1}{2}$ مربع طول القطر

المستطيل



المحيط = (الطول + العرض) × ٢

المساحة = الطول × العرض

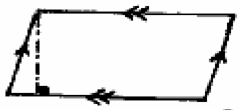
المعين

المحيط = طول الضلع × ٤

المساحة = طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

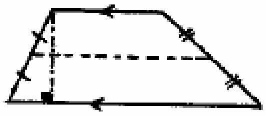
متوازى الأضلاع



المحيط = (مجموع ضلعين متجاورين) × ٢

المساحة = طول القاعدة × الارتفاع

شبه المنحرف

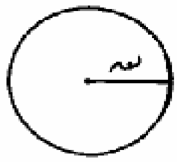


المحيط = مجموع أطوال أضلاعه

المساحة = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

= القاعدة المتوسطة × الارتفاع

الدائرة



المحيط = ٢ ط نق

المساحة = ط نق^{٢}

القطاع الدائرى

المحيط = ٢نق + ل

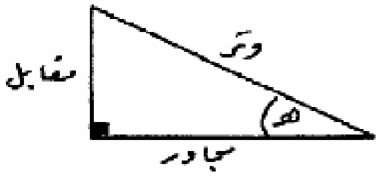
المساحة = $\frac{1}{2}$ ل × نق

محيط و مساحة بعض الأشكال الهندسية

الشكل	المساحة	الحجم
المكعب	الجانبية = ٤ل^{٢} ، الكلية = ٦ل^{٢}	ل^{٣}
متوازى المستطيلات	الجانبية = ٢(س + ص) ع الكلية = ٢(س + ص) ع + ٢ س ص	س ص ع
الأسطوانة	الجانبية = ٢ ط نق ع الكلية = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق^{٢}	ط نق^{٢} ع
المنشور	الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع الكلية = الجانبية + ضعف مساحة القاعدة	مساحة القاعدة × ع
الكرة	٤ ط نق^{٢}	$\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

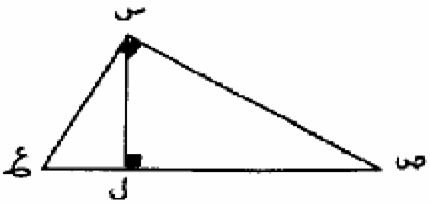
• **بعض العلاقات الهندسية الهامة :**

(١) في المثلث القائم الزاوية نجد أن :



• جتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ • جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

• ظاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



• نظرية فيثاغورث :

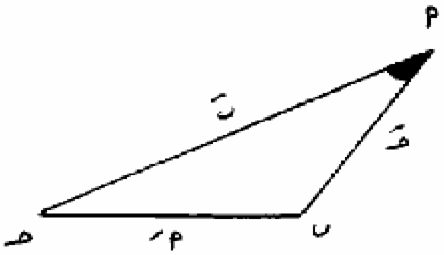
(ص ع)^2 = (س ص)^2 + (س ع)^2

• نظرية اقليدس :

• (س ص)^2 = ص ل × ص ع • (س ع)^2 = ع ل × ع ص

• (س ل)^2 = س ص × س ع • س ل = $\frac{\text{س ص × س ع}}{\text{ص ع}}$

(٢) في أي مثلث نجد أن :



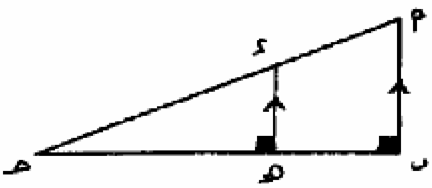
• قانون الجيب : $\frac{\text{أَ}}{\text{جاأ}}$ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جاب}}$ = $\frac{\text{جَـ}}{\text{جاجـ}}$

• قانون جيب التمام :

* أَ^{2} = بَ^{2} + جَـ^2 − ٢ بَ جَـ جتاأ

* جتاأ = $\frac{\text{بَ}^2 + \text{جَـ}^2 - \text{أَ}^2}{\text{٢ بَ جَـ}}$

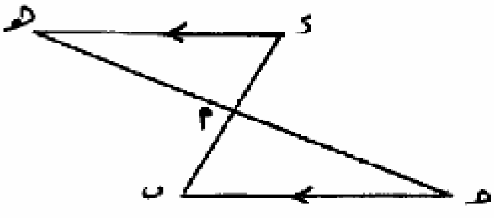
(٣) من تشابه مثلثين :



∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$

∴ △ أبجـ ~ △ ءهـجـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}$ = $\frac{\text{بجـ}}{\text{هـجـ}}$ = $\frac{\text{أجـ}}{\text{ءجـ}}$



∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ △ أبجـ ~ △ أءهـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أء}}$ = $\frac{\text{بجـ}}{\text{ءهـ}}$ = $\frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$

يعتمد أسلوب حل تمارين المعدلات الزمنية المرتبطة على :

(١) تحديد المتغيرات وإيجاد العلاقة بينها عند اللحظة الزمنية العامة ن

(٢) تفاضل هذه العلاقة بالنسبة للزمن

(٣) التعويض في العلاقة والحصول على المطلوب .

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

/ مثال (١) : تتحرك نقطة على المنحنى : $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ص - ١٠ = صفر$ أوجد موضع النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل تغير الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن ضعف معدل تغير الإحداثي السيني بالنسبة للزمن .

$ الحل :

$\because س^٢ + ص^٢ + ٢س - ص - ١٠ = ٠$ ⟵ (١)

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن ن

$\therefore ٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} + ٢ \frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن} = ٠$

$\because \frac{دص}{دن} = ٢ \frac{دس}{دن} \Leftarrow ٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \times ٢ \frac{دس}{دن} + ٢ \frac{دس}{دن} - ٢ \frac{دس}{دن} = ٠$

$\therefore ٢س + ٤ص + ٢ - ٢ = ٠ \quad \therefore س = -٢ص$ ⟵ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) $\therefore ٤ص^٢ + ص^٢ - ٤ص - ص - ١٠ = ٠$

$\therefore ص^٢ - ص - ٢ = ٠ \Leftarrow (ص + ١)(ص - ٢) = ٠$

إما $ص = -١ \quad \therefore س = ٢$

أو $ص = ٢ \quad \therefore س = -٤$

∴ النقط هي $(٢ ، -١)$ ، $(-٤ ، ٢)$

/ مثال (٢) : صفيحة معدنية دائرية تتمدد بالحرارة بمعدل منتظم ، فإذا كان معدل زيادة طول نصف قطرها ٠,٠٢ سم / ثانية . فأوجد معدل زيادة مساحة سطحها عندما يكون طول نصف قطرها ١٤ سم $(ط = \frac{٢٢}{٧})$

$ الحل : نفرض أن طول نصف القطر = نق سم ، وأن مساحة سطحها = م سم^٢

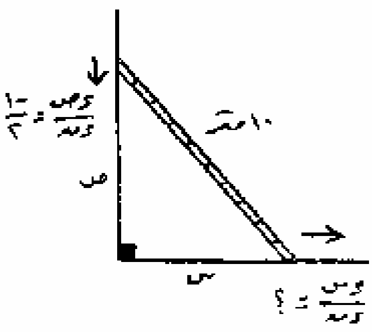
$\therefore \frac{دنق}{دن} = ٠,٠٢$ سم/ث والمطلوب إيجاد $\frac{دم}{دن}$ عندما نق = ١٤سم

$\because م = ط نق^٢$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن ن

$\therefore \frac{دم}{دن} = ٢ ط نق \frac{دنق}{دن}$

وبالتعويض $\therefore \frac{دم}{دن} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ \times ٠,٠٢ \Leftarrow \frac{دم}{دن} = ١,٧٦$ سم^٢/ث

/ مثال (٣) : سلم طوله ١٠ متر يرتكز على أرض أفقية وحائط رأسي ، فإذا كانت طرفه العلوي ينزلق مقتربا من الأرض بسرعة $\frac{١}{٢}$ متر/دقيقة . أوجد سرعة الطرف السفلي عندما يكون بعده عن الحائط ٦ متر .



$ الحل :

$\because س^٢ + ص^٢ = ١٠٠$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن ن

$\therefore ٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$

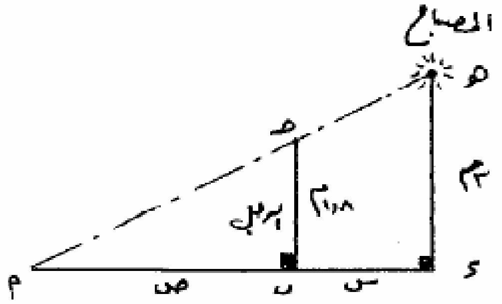
وعندما س = ٦ متر تكون ص = ٨ متر

$\therefore ٦ \times \frac{دس}{دن} + ٨ \times \frac{-١}{٢} = ٠ \Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{٢}{٣}$ متر/دقيقة

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

مثال (٤) : رجل طوله ١٨٠ سم يسير بمعدل ٦ متر/ثانية في طريق أفقي مضاء بمصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٣ أمتار . أوجد معدل تغير طول ظل الرجل على الأرض .

الحل : نفرض أن بعد الرجل عن قاعدة عمود المصباح = س ، هـ



، ∵ سرعة الرجل = معدل تغير بعده عن المصباح

∴ ع = $\frac{دس}{دن}$ = ± ٦ متر/ثانية

الإشارة + عندما يكون مبتعداً عن المصباح

الإشارة - عندما يكون مقترباً من المصباح

من تشابه المثلثين أ ب جـ ، أ ء هـ ∴ $\frac{أب}{أء} = \frac{ب جـ}{ء هـ}$

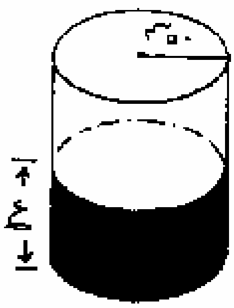
∴ $\frac{ص}{ص+س} = \frac{١٫٨}{٣}$ ⟸ $\frac{ص}{ص+س} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ٥ص = ٣ص + ٣س ∴ ٢ص = ٣س

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن ن ∴ ٢ $\frac{دص}{دن}$ = ٣ $\frac{دس}{دن}$

، ∵ $\frac{دس}{دن}$ = ± ٦ ∴ ٢ $\frac{دص}{دن}$ = ٣ × ± ٦ ∴ $\frac{دص}{دن}$ = ± ٩ متر/ثانية

مثال (٥) : صب ماء في خزان على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٥٠ سم بمعدل ٨ لتر/دقيقة ، أوجد معدل ارتفاع سطح الماء في الخزان .

الحل :



∵ حجم الماء = حجم الأسطوانة

∴ حجم الماء ح = ط نق² ع

∴ ح = ط (٥٠)² ع = ٢٥٠٠ ط ع سم³

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٢٥٠٠ ط × $\frac{دع}{دن}$

⟸ ٨٠٠٠ = ٢٥٠٠ ط × $\frac{دع}{دن}$

∴ $\frac{دع}{دن} = \frac{٨٠٠٠}{٢٥٠٠ ط} = \frac{١٦}{٥ ط}$ سم/دقيقة

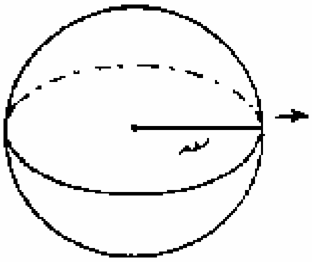
مثال (٦) : بالون كروي يزداد حجمه بمعدل ٤ سم³/ث . أوجد معدل الزيادة في طول نصف قطره عندما يكون نق = ٦٠ سم ، أوجد أيضاً معدل تغير مساحة سطح البالون في هذه اللحظة .

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠/١٩٠٥٤٧٨

$ الحل :

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٤ \text{ سم}^٣/\text{ث}$ ، $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ؟$

$\text{نق} = ١٠ \text{ سم}$



∵ الحجم $\text{ح} = \frac{٤}{٣} \text{ط نق}^٣$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن .

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٤ \text{ ط نق}^٢ \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

عند اللحظة المحددة $\text{نق} = ١٠ \text{ سم}$ ، $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٤ \text{ سم}^٣/\text{ث}$

∴ $٤ = ٤ \text{ ط} (١٠٠) \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ∴ $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{١}{١٠٠ \text{ط}} \text{ سم/ث}$ *

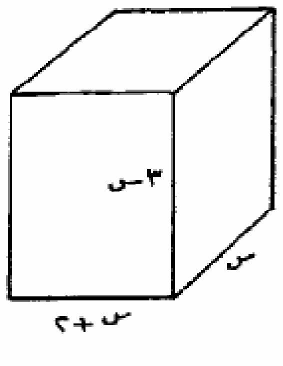
∵ مساحة الكرة $\text{م} = ٤ \text{ ط نق}^٢$ وباشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \text{ ط نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

∴ عند اللحظة المحددة يكون $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \text{ط} \times ١٠ \times \frac{١}{١٠٠ \text{ط}} = \frac{٤}{٥} \text{ سم}^٢/\text{ث}$ *

/ مثال (٧) : قطعة من المعدن على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه بمقدار ٢ سم ، وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضها ، تتمدد بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة بنفس النسب المعطاه .
وفي لحظة ما كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم³/دقيقة ، والعرض يزداد بمعدل ٠,٠١ سم/دقيقة ، أوجد أبعاد قطعة المعدن عند هذه اللحظة .

$ الحل :



نفرض أبعاد متوازي المستطيلات هي :

س ، س + ٢ ، ٣س سم

∴ الحجم $\text{ح} = ٣\text{س}^٢(\text{س}+٢) = ٣\text{س}^٣ + ٦\text{س}^٢$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = (٩\text{س}^٢ + ١٢\text{س}) \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣(٣\text{س}^٢ + ٤\text{س}) \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

وعند اللحظة المحددة :

∴ $٣(٣\text{س}^٢ + ٤\text{س}) \times \frac{١}{١٠٠} = \frac{٦}{١٠}$

∴ $٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} = \frac{٦}{١٠} \times \frac{١٠٠}{٣}$ ⟸ $٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} = ٢٠$

∴ $٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٢٠ = ٠$

∴ $(٣\text{س} + ١٠)(\text{س} - ٢) = ٠$ ⟸ $\text{س} = \frac{-١٠}{٣}$ مرفوض أو $\text{س} = ٢$

∴ الأبعاد هي ٢ ، ٤ ، ٦ سم

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٣) : على المعدلات الزمنية المرتبطة (كتاب الوزارة)

١ - تتحرك نقطة على المنحنى $س^٢ + س ص + ص^٢ = ٧$ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (-١ ، ٣) يساوى ٠.١ . أوجد : معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .

٢ - تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى $ص = س^٢ + ٤ س - ٣$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى .

٣ - تتحرك نقطة (س ، ص) على الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٨ ص = ١٠٨$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويًا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

٤ - قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم / ث عندما يكون العرض ٨٠ سم ، أحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة .

٥ - سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢ سم / ث أوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجه فى نهاية ١٠ ثوانى .

٦ - يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الآخر على حائط رأسى . فإذا إنزلق الطرف السفلى للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من الحائط . أوجد عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوى للسلم . ثم أوجد بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل .

٧ - وضع مصباح كشاف على ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء ٢ متر / دقيقة . أوجـد :

(أ) معدل إزدياد طول ظل الرجل .   (ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .

٨ - ونش رأسي طوله ٦ أمتار يتحرك بسرعة ٥ أمتار / ثانية في اتجاه مصباح على ارتفاع ١٦ متراً ، أوجـد :

(أ) معدل تحرك نهاية ظل الونش .

(ب) معدل تغير طول ظل الونش .

(جـ) معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون الونش على بعد ١٠ أمتار من قاعدة المصباح .

٩ - إذا كان ح المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتي المركز نصفي قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ ، فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التي عندها نق١ = ٤ سم ويتزايد معدل ٢,٠ سم / ث ، نق٢ = ٧ سم ويتناقص بمعدل ١,٠ سم / ث

١٠- في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم إذا كان كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثاني يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين .

١١- $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ طريقان متعامدان ، أ جـ = ٩٠ متراً ، ب جـ = ٧٠ متراً . يسير رجلان الأول من أ نحو جـ بسرعة منتظمة ٦ أمتار / ث والثاني من ب نحو جـ بسرعة منتظمة ٨ أمتار / ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضي ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معًا يعطى بالعلاقة ف^{٢} = ١٠٠ (ن^{٢} - ٢٢ ن + ١٣٠) ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة إلى ن عندما ن = ٨ ثواني .

أ / إبراهيم عادل حسني ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

١٢- في الساعة الثامنة صباحًا كانت سفينة تقع على بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم / ساعة وفي الساعة التاسعة صباحًا خرجت من الميناء سفينة أخرى متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠ كم / ساعة . أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين في الساعة العاشرة صباحًا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟

١٣- عمود إنارة طوله ١٥ متراً أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلى أعلى بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة قدرها ١٢ متراً من قاعدة العمود . أوجد معدل إبتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

١٤- كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلي بمعدل ١ سم / ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتًا وذلك عند اللحظة التي يكون فيها طولاً نصفي قطريها ٣ ، ٩ سم . أوجد عند هذه اللحظة .

(أ) معدل تغير نصف قطرها الخارجي .

(ب) معدل تغير مساحة سطحها الخارجي .

(جـ) معدل تغير سمكها .

١٥- تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمتار عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم^{٣} / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم / دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

١٦- حبل من الصلب على شكل إسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٥ سم / دقيقة ويزداد طول قطر مقطعه الدئرى بمعدل ٠,٠٠٢ سم / دقيقة أوجد بدلالة ط معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم .

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

تمارين (٤) : على المعدلات الزمنية المرتبطة (دليل التقويم)

١- تتحرك نقطة على المنحنى $س^٢ + س ص + ص^٢ = ٥$ بحيث يتزايد احداثيها الصادى بمعدل ٢ وحدة/ث فما هو معدل تغير الاحداثى السينى عند النقطة (٢ ، -١)

٢- أرتطمت سفينه بترول بشعب مرجانيه فتدفق منها النفط منشراً على سطح الماء فى شكل طبقة دائرية رقيقة جداً. بفرض أن نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل مترين فى الثانية. كم يكون معدل ازدياد مساحة الطبقة النفطية عندما يبلغ نصف قطرها ١٠٠ متر؟

٣- القى حجر فى بركه مياه صانعا سلسلة من التموجات الدائريه متحدة المركز، فإذا كان طول نصف قطر الدائرة يتزايد بمعدل ٥ سم/ث. أوجد معدل تزايد مساحة الدائره بعد ٤ ثوان.

٤- تتحرك نقطة على المنحنى $ص = ٥ س - س^٢$ بحيث يتناقص احداثيها الصادى بمعدل $\frac{١}{٢}$ وحدة/ث. أوجد معدل تغير ميل المنحنى بالنسبة للزمن عند س = ٣.

٥- سلم طوله ٢ متر يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى وبالطرف الاخر على مستوى افقى. فإذا كان الطرف العلوى ينزلق على الحائط بسرعة ٥ سم/دقيقة فاوجد :

اولا : السرعة التى يتحرك بها الطرف السفلى فى اللحظة التى يكون فيها على بعد ١٢٠ سم من الحائط.

ثانياً : بعد الطرف العلوى عن الارض عندما تتساوى السرعتان عددياً

٦- صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢ ل سم فإذا كان طول ضلع الصفيحة يزداد بالتسخين بمعدل $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$ سم/ث فأثبت أن مساحة سطح الصفيحة يزداد بمعدل $\frac{١}{٥}$ ل $سم^٢$/ث.

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

٧- صفيحة على شكل مستطيل طوله يساوى $\frac{٥}{٣}$ عرضه تنخفض درجه حرارته بانتظام فينكمش كل من بعديه تبعا لذلك فإذا كان العرض ينكمش بمعدل ٠,٠٢ سم/ث فاحسب معدل النقص فى مساحة سطح الصفيحة عندما يكون عرضها ٩سم

٨- مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم ، اذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ ساعة فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساويا لطول القاعدة.

٩- اذا كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم وكان طول الضلع الاول يتناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/دقيقة وطول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم/دقيقة فأوجد :

اولا : معدل تزايد مساحة سطح المثلث بعد دقيقتين.

ثانياً : الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة.

١٠-صفيحة مستطيلة الشكلة طولها يساوى $\frac{٤}{٥}$ طول قطر المستطيل تنكمش بانتظام فينكمش طولها فى لحظة بمعدل ١٠ سم/ث وتنكمش مساحتها فى نفس اللحظة بمعدل ٣٠ سم٢/ث. أوجد مساحتها فى هذه اللحظة.

١١- مستطيل طوله ٢٤ سم وعرضه ١٠ سم، يتناقص طوله بمعدل ٢ سم/ث بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥ سم/ث. أوجد معدل زيادة أو نقصان مساحته بعد مضى ٤ ثوانى. ثم أوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن الزيادة أو النقصان ، وكم تكون مساحة المستطيل وقتئذ؟

١٢- مستطيل مساحته ثابته وتساوى ٨ سم^{٢} يزداد طوله بمعدل ٠,٤ سم فى الثانيه. كم يكون عرض المستطيل عند اللحظة التى يكون معدل تناقص هذا العرض ٠,٠٥ سم فى الثانيه؟

أ / إبراهيم عادل حسنى ت : ٠١٠٠ / ١٩٠٥٤٧٨

١٣- يتمدد طولا ضلعين متوازيين فى مستطيل بمعدل ١ سم/ث بينما يتناقص طولا الضلعين الأخرين بحيث تظل مساحة سطح المستطيل ثابتة = ٢٤ سم^{٢}

أوجد : أولا : معدل تغير محيط المستطيل فى اللحظة التى يكون فيها طول الضلع الذى يتمدد ٤ سم.

ثانياً : بعدى المستطيل فى اللحظة التى يتوقف فيها المحيط عن التناقص.

١٤- مستطيل طوله ١٢ سم وعرضه ٥ سم فإذا كان الطول يتناقص بمعدل ١ سم/دقيقة بينما يتزايد العرض بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/دقيقة فأوجد متى يصبح الشكل مربعاً. ثم اوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن الزيادة وكم تكون المساحة وقتئذ؟

١٥- يرتفع بالون راسيا لاعلى بسرعة ثابته مقدارها ١٥ م/ث وعندما كان البالون على ارتفاع ٩٠ متراً مرت تحته مباشرة سيارة وواصلت سيرها فى خط مستقيم بسرعة ثابته مقدارها ٢٥ م/ث. أوجد المعدل الذى تزداد به المسافه بين السيارة والبالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون.

١٦- تمر طائرة تطير موازيه لسطح الأرض على ارتفاع أربعة كيلومترات فوق محطه رادار بعد وقت قصير أظهرت اجهزة الردار أن المسافه بين الطائرة والمحطة تساوى خمسة كيلو مترات. وان المسافه بين الطائره والمحطة تزيد بمعدل ٢٠٠ كيلو متر فى الساعة. ما السرعة الأفقية التى تتحرك بها الطائرة عند هذه اللحظة؟

١٧- يسير قطار بادئاً حركته فى الحادية عشر صباحاً فى اتجاه الشرق بسرعة ٤٥ كم/ساعة بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة ١٢ ظهراً من نفس النقطة متجهاً الى الجنوب بسرعة ٦٠ كم/ساعة. ما معدل زيادة المسافه بينما عند الساعة الثالثة بعد الظهر؟

١٨- ابحرت سفينه من ميناء الساعة التاسعة صباحاً متجه نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم/ ساعة وبعد ساعة ابحرت سفينه أخرى من نفس الميناء بسرعة ٤٠ كم/ساعة فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد معدل التباعد بين السفينتين الساعة ١١ صباحاً.

١٩- بدأت سفينة الحركة من موقع أ بسرعة منتظمة ١٨ كم/ساعة فى اتجاه الشمال وبعد ساعتين سارت فى اتجاة يصنع ٣٠^o شمال الشرق. أوجد معدل تغير المسافه بين موضع السفينة والموقع أ بعد ٤ ساعات من بدء الحركة.

٢٠- اقلعت طائرة من مطار القاهرة من نقطة أ تصنع مع الافقى زاويه قياسها ٦٠^o قطعت مسافة ١٥ كم فى هذا الاتجاه ثم سارت افقية مبتعدة عن المطار بسرعة ٧٥٠ كم/ساعة. أوجد معدل تغير بعد الطائرة عن نقطة الاقلاع أ بعد مرور دقيقتين على سيرها.

٢١- رجل طول ١,٧ متر يسير بسرعة ٤ م/دقيقة فى خط مستقيم متجها نحو قاعد مصباح يرتفع عن سطح الارض بمقدار ٦,٨ متر أوجد :

اولا : معدل تغير طول ظل الرجل.

ثانياً : معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٦,٨ متر من قاعدة المصباح.

٢٢- يستند قضيب أ ب طوله ١٠ متر بطرفه أ على أرض افقية وبإحدى نقطة حـ على حائط رأس ارتفاعه ٦ متر. اذا انزلق الطرف أ مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢,٥ م/دقيقة فأوجد معدل هبوط الطرف ب عندما يصل الى حافة الحائط.

٢٣- يصعد رجل طوله ١٧٠ سم بسرعة منتظمة ٦ متر/دقيقة أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ وطوله ٢٥ متراً. وهناك مصباح مثبت على ارتفاع $١١\frac{١}{٤}$ متراً فوق المستوى الأفقى المار بقاعدة المنحدر رأسيا فوق أعلى نقطة للمنحدر، أوجد معدل انكماش طول ظل الرجل، وكذلك معدل اقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر.

٢٤- مكعب تزداد مساحة سطحه بمعدل ٠,٨ سم^{2}/ث فى اللحظة التى يزداد فيها طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/ث أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة وكذلك معدل الزيادة فى حجمه.

٢٥- مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠١ سم/دقيقة فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة ما ٧٥ سم٣/دقيقة. فأوجد :

أولا : طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة.

ثانياً : معدل تغير المساحة الكلية للمكعب عند هذه اللحظة.

٢٦- متوازى مستطيلات من المعدن قاعدته على شكل مربع فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٠,٣ سم/ث وتناقص الأرتفاع بمعدل ٠,٤ سم/ث أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة ٥ سم والأرتفاع ٨ سم.

٢٧- تتمدد قطعة من المعدن على هيئه متوازى مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٣ سم وارتفاعه ٤ أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل ابعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٣ سم٣/دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل $\frac{١}{٣٢}$ سم/دقيقة فأوجد عند تلك اللحظة أبعاد القطعة.

٢٨- علبه معدنيه على شكل متوازى مستطيلات ابعادها فى لحظة ما هى ٤ ، ٣ ، ١٢ سم فإذا كان البعد الأول يزداد بمعدل ١ سم/ث، يتزايد البعد الثانى بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث بينما يتناقص البعد الثالث بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث. أوجد :

أولا : معدل تغير حجم متوازى المستطيلات بعد ٤ ثوان.

ثانياً : معدل تغير طول قطر متوازى المستطيلات عند نفس اللحظة.

٢٩- متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل ١ سم/دقيقة وارتفاع متوازى المستطيلات ينقص بمعدل ٢سم/دقيقة أوجد فى اللحظة التى يكون فيها طول ضلع القاعدة ٦ سم والارتفاع ٢٤ سم معدل الزيادة فى حجم متوازى المستطيلات ثم أوجد بعد كم دقيقة من هذه اللحظة تنعدم هذه الزيادة.

٣٠ - برميل اسطوانى الشكل طول نصف قطره ١٠ أمتار وارتفاعه ١٨ متراً فإذا كان معدل دخول البترول فى البرميل $\frac{١٠٠٠}{ل + ١}$ متر مكعب فى الدقيقة حيث ل أرتفاع البترول عند اى لحظة أوجد معدل ارتفاع البترول عندما يمتلىء نصف البرميل.

٢١- إذا كان ح حجم كرة نصف قطرها نق ، س مساحة سطحها فأثبت أن :

$\frac{ءح}{ءن} = \frac{١}{٢}$ نق $\frac{ءس}{ءن}$ وإذا كان $\frac{ءس}{ءن} = \frac{٢}{٥}$ عندما نق = ٢,٥ فأوجد $\frac{ء نق}{ءن}$

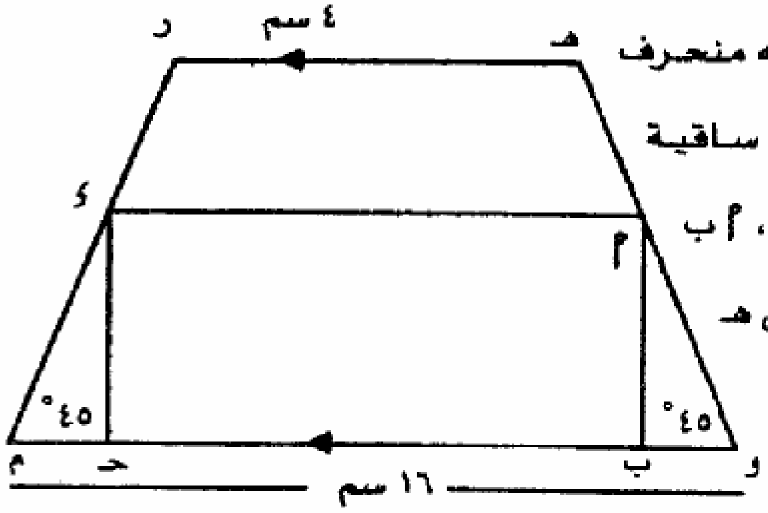
٢٢ - كرة حديدية طول قطرها ٨ سم مغطاه بطبقه من الشمع منتظمه السمك إذا كان الشمع يذوب بمعدل ١٠سم^٣/دقيقة. أوجد معدل تناقص سمك طبقة الشمع عندما يكون سمك الشمع ٢ سم، ما سرعة تناقص مساحة السطح الخارجى بطبقة الشمع علماً بأن الشمع يظل محتفظاً بشكلة الكروى؟

٢٣- كرة مجوفه من الحديد يتغير طولا نصفى قطريها الداخلى والخارجى بحيث يكون حجم الحديد ثابتاً. أوجد معدل التغير فى طول نصف القطر الداخلى عند اللحظة التى يكون طول نصف القطر الداخلى ٧ سم، الخارجى ١٠,٥ سم ومعدل الزيادة فى طول نصف القطر الخارجى $\frac{٢}{٩}$ سم/ث.

٢٤- كرة حجمها ح سم٣ ونصف قطرها نق سم ومساحتها السطحية س سم٢ فأثبت :

١٦ ط × $\frac{ءح}{ءن}$ × $\frac{ء نق}{ءن}$ = $\left(\frac{ءس}{ءن}\right)^٢$ ثم احسب معدل زيادة ح فى اللحظة التى يزداد فيها نق بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم/ث وتزداد فيها س بمعدل ٢ ط سم٢/ث.

٢٥- يرفع رجل دلواً مملوءاً بالاسمنت الى سقاله تقع على ارتفاع ٨ متر فوق رأسه بواسطة حبل طوله ١٧ متر يمر على بكرة ملساء مثبته فى السقاله وكان الرجل يحفظ الطرف الخالص للحبل افقيا فى مستوى رأسه ويمشى افقيا بسرعة ٤ متر/دقيقة أوجد السرعة التى يرتفع بها الدلو عندما يمشى الرجل ٦ متر.



٣٦- كما فى الشكل : هـ و م ر شبه منحرف متساوي الساقين ويميل كل من ساقيه بزاوية ٤٥° على القاعدة الكبرى، أ ب حـ ء مستطيل بحيث تتحرك أ من هـ إلى و

وتتحرك ء من (ر) الى (م) فاذا كان معدل تغير طول أ ب = $\frac{١}{٤}$ سم /ث

فأوجد معدل تغير مساحة المستطيل أ ب حـ ء عندما يكون طول أ ب = ٣ سم واحسب مساحة المستطيل عندما تتوقف مساحته عن الزيادة .

٣٧- مصباح مضيء فوق عمود ارتفاعه ٢٤,٥ متر عن سطح الأرض اسقطت كرة من نفس الارتفاع وعلى بعد $\frac{١}{٨}$ ٦ متر من المصباح، فإذا كانت الكرة تهبط رأسيا طبقا للعلاقة ف = ٤,٩ ن^{٢} حيث ف بالمتر، ن بالثانية فأوجد سرعة تحرك ظل الكرة على سطح الأرض بعد ١ ثانيه.

٣٨- يعبر رجل كوبرى يعلو سطح الماء بمقدار ١٢ متراً بسرعة منتظمة ٢ م/ دقيقة شاهد قارب يسير فى اتجاه عمودى على الكوبرى بسرعة منتظمة ٦ م/دقيقة فى اللحظة التى كان فيها تحته تماماً. أوجد المعدل الذى يبتعد به كل منهما عن الاخر بعد ٦ دقائق من اللحظة التى كانا فيها على خط رأس واحد.

٣٩- مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٠ سم وقياس الزاوية بينهما يساوى (س) فاذا تغير س بمعدل ٣° فى الدقيقة فأوجد معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٦٠°.

٤٠- أ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = أ ب = حـ ء = ٦ سم ، ق (< أ ب حـ) = س فإذا كانت س تزداد بمعدل ٢° فى الدقيقة فأوجد معدل التغير فى مساحة شبه المنحرف عند اللحظة التى تكون فيها س = ٣٠°