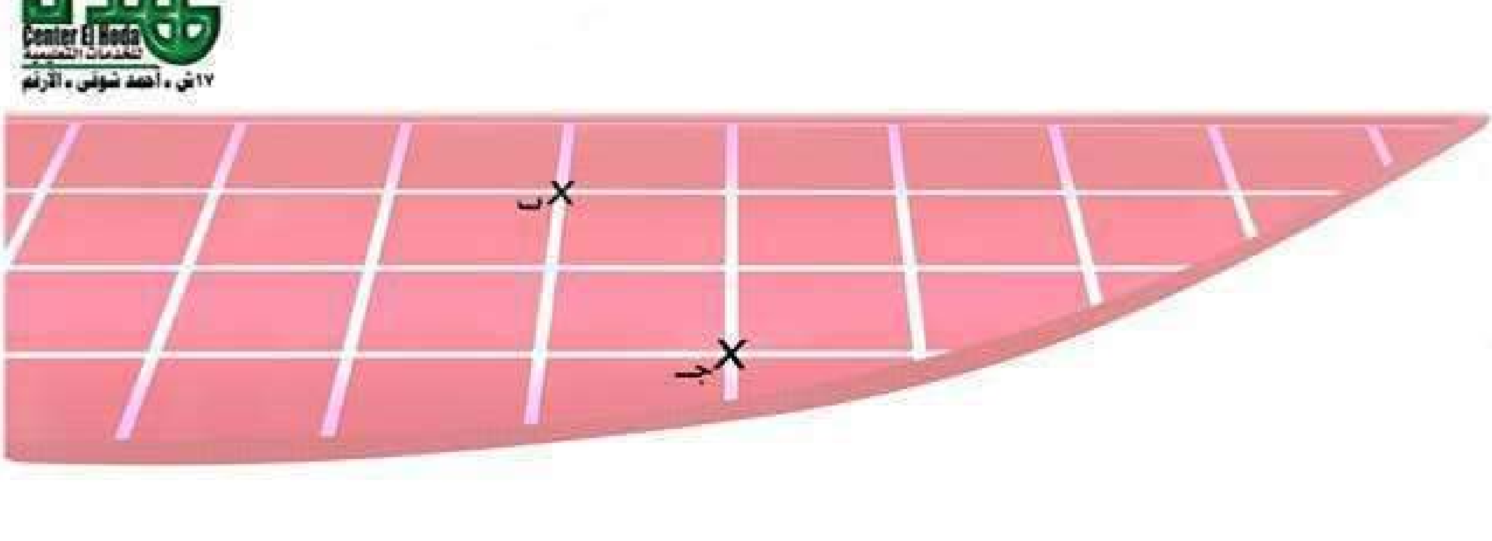
التفوق

فى الاستاتيكا

الصف الثالث الثانوى

أ / صابر عبدالرحيم محمود

٠١٢٢٢٦٢٠٠٢٤٤



بسم الله الرحمن الرحيم

وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صدق الله العظيم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين .. والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

أعزائي طلبة وطالبات الصف الثالث الثانوي

يسعدني أن أقدم لكم هذا الجهد المتواضع .. متمنيا لكم التفوق والنجاح بإذن الله ...

دعاء بدء المذاكرة

اللهم إني أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين .. وإلهام الملائكة المقربين..اللهم اجعل لساني عامراً بذكرك وقلبي بخشيتك ..وجسدي بطاعتك .. إنك على كل شئ قدير

من طرق تقوية المذاكرة

- ✪ الفهم أولا يساعد على الحفظ والتخزين .
- ✪ استذكر موضوعات متكاملة .
- ✪ الترابط بين ما تستذكره وما لديك من معلومات يقوى الذاكرة.
- ✪ تصنيف المواد حسب الموضوعات وحسب البساطة والصعوبة يسهل المذاكرة
- ✪ الصحة بشكل عام عامل أساسي لتقوية الذاكرة .
- ✪ بعد صلاة الفجر من أفضل أوقات المذاكرة .
- ✪ الوضوء قبل المذاكرة والبدء بالقرآن .
- ✪ تخصيص مكان للمذاكرة بعيداً عن مكان النوم .
- ✪ الجلوس بحيث يكون الظهر مستقيم .
- ✪ أن يقع الضوء على الكتاب مباشرة .
- ✪ بعد مذاكرة المادة قم بمراجعة سريعة قبل تركها والانتقال إلى غيرها .

- ✪خطط يومك كل صباح بكتابة الأشياء التى يجب أن تعملها .
- ✪لا تقم بزيارة صديق إلا بعد أخذ موعد سابق للزيارة .
- ✪احتفظ دائماً بورقة وقلم لتسجيل الأفكار خلال أوقات الفراغ .
- ✪خطط أوقات الراحة وحاول أن تجعلها تتفق مع أوقات الصلاة .
- ✪استفد من وقت الفراغ بالقراءة أو بحفظ القرآن الكريم .
- ✪وفر كل المواد و التلخيصات اللازمة قبل أن تبدأ المذاكرة .

مراجعة على ما سبق دراسته في الاستاتيكا

① محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة

$$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 جتا ى}$$

، $$ظا هـ = \frac{ق_2 جا ى}{ق_1 + ق_2 جتا ى}$$

•• حالات خاصة:

① اذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ في نفس الاتجاه
فإن $ح = ق_1 + ق_2$ (ى = صفر)

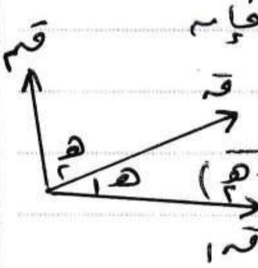
② اذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متضادتين في الاتجاه
فإن $ح = |ق_1 - ق_2|$ (ى = 180°)

③ اذا كانت $\overleftarrow{ق_1} \perp \overleftarrow{ق_2}$
فإن $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ ، $ظا هـ = \frac{ق_2}{ق_1}$

④ اذا كانت $ق_1 = ق_2 = ق$
فإن $ح = 2 ق جتا \frac{ى}{2}$ ، $هـ = \frac{ى}{2}$

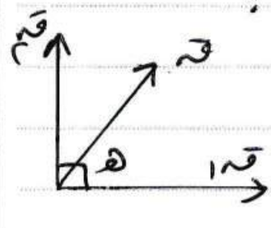
② تحليل القوة إلى مركبتين:

(أ) في اتجاهين معلومين فإن



$$\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ق}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$$

(ب) في اتجاهين متعامدين:



$ق_1 = ق جتا هـ$
، $ق_2 = ق جا هـ$

③ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة:

اذا كانت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، --- ، $هـ_ن$ هي قياسات زوايا ميل القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، --- ، $\overleftarrow{ق_ن}$ على $\overrightarrow{و س}$ فإن

$$س = ق_1 جتا هـ_1 + ق_2 جتا هـ_2 + --- + ق_ن جتا هـ_ن$$

$$ص = ق_1 جا هـ_1 + ق_2 جا هـ_2 + --- + ق_ن جا هـ_ن$$

وتكون

$ح = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ، $ظا هـ = \frac{ص}{س}$

④ الاتزان:

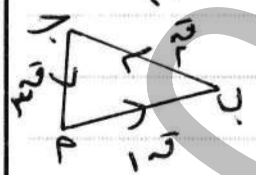
① اذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $ق_1$ ، $ق_2$ فإن $ق_1$ ، $ق_2$ متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وخط عملهما على استقامة واحدة

② اذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $ق_3$ فإن:

① اذا تلاقى خطا عمل قوتين منها في نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد أن يمر بهذه النقطة

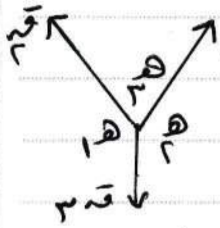
② اذا رسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى الثلاثة وفي اتجاه دوري واحد فإن أطوال أضلاعه تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة

أي أن $\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب ج} = \frac{ق_3}{أ ج}$



وتسمى هذه القاعدة بقاعدة مثلث القوى

③ مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين



أى أن

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_3}{\text{جا هـ}_3}$$

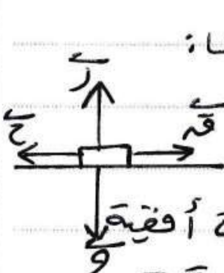
وتسمى هذه القاعدة لقاعدة لامى

③ يتزن الجسم تحت تأثير عدة قوى متلاقية في نقطة واحدة اذا كان
المجموع الجبرى لمركبات القوى في اتجاه ما = صفر
والمجموع الجبرى لمركبات القوى في الاتجاه العمودى عليه = صفر

مفهوم الاحتكاك
اتزان جسم على مستو أفقى خشن

•• مفهوم الاحتكاك:
لقوى الاحتكاك أهمية كبيرة في حياتنا العملية فلولاها لما استطاع الانسان السير دون أن تنزلق قدماه ولا استطاع الجسم المتحرك التوقف عن الحركة عند الحاجة إلى ذلك. ولذلك قد لا نبالغ إذا اعتبرنا أن قوى الاحتكاك سر من أسرار الكون.
وفيما يلي سوف نتعرض لبعض التعاريف التي سوف تساعدنا على التعرف على مفهوم الاحتكاك:

•• قوة الاحتكاك السكونى:

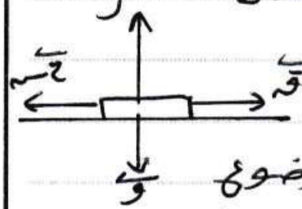


اذا وضعنا جسم مقدار وزنه و على مستوى أفقى خشن وأثرنا على الجسم بقوة أفقية صغيرة ق فإنه يظهر تأثير قوة خفية تقاوم حركة الجسم تسمى قوة الاحتكاك ويرمز لها بالرمز ح تعمل في اتجاه مضاد للقوة ق فإذا لم يكن مقدار القوة ق كافياً لتحريك الجسم فإن الجسم في هذه الحالة يكون متزناً تحت تأثير:

① قوة الوزن و وقوة رد الفعل العمودى ر حيث و = ر
② القوة الأفقية ق، وقوة الاحتكاك ح حيث ق = ح

∴ قوة الاحتكاك السكونى هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن

•• قوة الاحتكاك السكونى النهائى $\text{ح}_{\text{س}}$

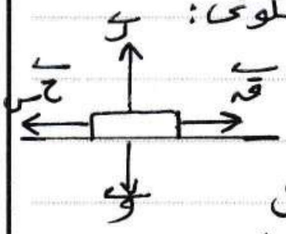


يزداد مقدار قوة الاحتكاك السكونى ح كلما زاد مقدار القوة الأفقية ق المؤثرة على جسم موضوع على مستوى أفقى خشن إلى أن يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى نهايته العظمى حين يصبح الجسم على وشك الحركة وفي هذه الحالة نقول أن الاحتكاك أصبح نهائياً ويرمز له بالرمز $\text{ح}_{\text{س}}$ وتكون معادلتا اتزان الجسم هما

$\text{ق} = \text{ح}_{\text{س}}$ ، ر = و

∴ قوة الاحتكاك السكونى النهائى هى قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته النهائية (العظمى) والتى عندها يكون الجسم على وشك الحركة ويرمز لها بالرمز $\text{ح}_{\text{س}}$

•• معامل الاحتكاك السكوني:



تسمى النسبة بين مقداري قوة الاحتكاك السكوني النهائي $\vec{ح}_س$ ورد الفعل العمودي ر بمعامل الاحتكاك بين السطحين المتلامسين ويرمز له بالرمز $م_س$ أي أن $م_س = \frac{ح_س}{ر}$

ومنها $ح_س = م_س ر$

•• قوة الاحتكاك الحركي:

اذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركي ($ح_ك$) في اتجاه مضاد لاتجاه الحركة ويكون

$$ح_ك = م_ك ر$$

حيث $م_ك$ معامل الاحتكاك الحركي ، ر رد الفعل العمودي ومنها يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركي على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركي وقوة رد الفعل العمودي

ملاحظات:

① المتساوية $ح_س = م_س ر$ تتحقق فقط عند الاحتكاك السكوني النهائي أي عندما يكون الجسم على وشك الحركة وهي أقصى قيمة للاحتكاك السكوني ح أي أن $0 \le ح \le م_س ر$

② معامل الاحتكاك $م_س$ ، $م_ك$ يعتمدان على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما أو مساحة السطوح المتماسة

② قوة الاحتكاك النهائي للأجسام الساكنة $ح_س$ > قوة الاحتكاك للأجسام المتحركة $ح_ك$ وبالتالي معامل الاحتكاك السكوني $م_س$ > معامل الاحتكاك الحركي $م_ك$

•• رد الفعل المحصل:

يرمز لرد الفعل المحصل (رد الفعل الكلي) بالرمز $\vec{ر'}$ وهو محصلة رد الفعل العمودي $\vec{ر}$ وقوة الاحتكاك $\vec{ح}$

أي أن $ر' = \sqrt{ر^2 + ح^2}$

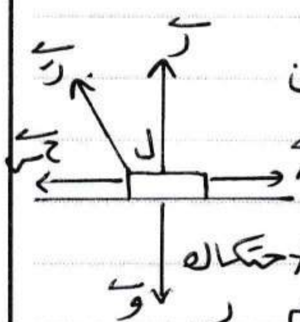
وفي حالة الاحتكاك النهائي يكون

$ر' = \sqrt{ر^2 + ح_س^2}$ ، $\because ح_س = م_س ر$

$\therefore ر' = \sqrt{ر^2 + م_س^2 ر^2}$

$\therefore ر' = ر\sqrt{1 + م_س^2}$

•• زاوية الاحتكاك:



هي الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودي عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى $ح_س = م_س ر$

ويرمز لزاوية الاحتكاك بالرمز ل

ويكون $ظا ل = \frac{ح_س}{ر}$ ولكن $\frac{ح_س}{ر} = م_س$

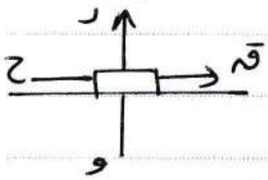
$\therefore م_س = ظا ل$ أي أن

ظل زاوية الاحتكاك يساوي معامل الاحتكاك ، $\because ر' = ر\sqrt{1 + م_س^2}$

$\therefore ر' = ر\sqrt{1 + ظا^2 ل} = ر\sqrt{قا^2 ل} = ر قا ل$

•• اتزان جسم على مستوى أفقي خشن :

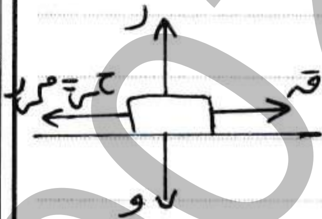
① إذا كانت القوة ق المؤثرة على الجسم أفقية والجسم متزن فإن



ر = و ، ق = ح

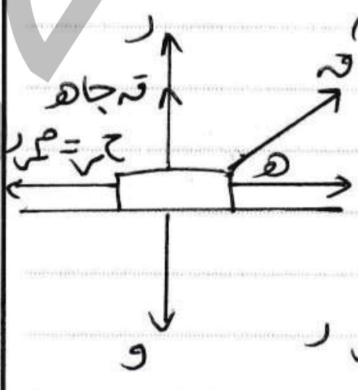
② إذا كانت القوة ق المؤثرة على الجسم أفقية وكان الجسم على وشك الحركة أي أن الاحتكاك أصبح نهائياً فإن

ق = ح_س = م_س ر



ر = و

③ إذا كانت القوة ق المؤثرة على الجسم مائلة بزاوية قياسها هـ على الأفقي وكان الجسم على وشك الحركة فإن



ق جتا هـ = م_س ر

ر + ق جا هـ = و

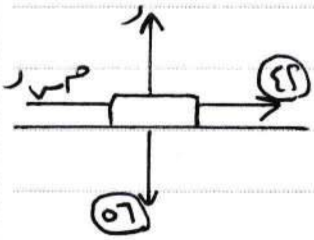
صابر عبد الرحيم محمود

- أمثلة محلولة -

① يدفع فتى حجراً وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على رصيف فكان الحجر على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الحجر والرصيف.

- الحل -

∵ الجسم على وشك الحركة



∴ ر = ٥٦

، ٤٢ = م_س ر

∴ ٤٢ = م_س × ٥٦		∴ م_س = ٣/٤

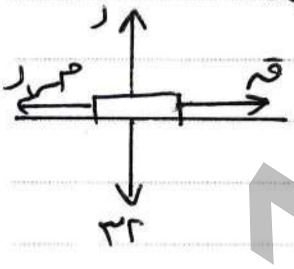
② وضعت كتلة وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة أفقية ق حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة

① إذا كانت ق = ٨ نيوتن أوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلة والمستوى

② إذا كان م_س = ٠,٤ أوجد ق

- الحل -

∵ الجسم على وشك الحركة



① ∵ ر = ٣٢

، ٨ = م_س ر

∴ ٨ = م_س × ٣٢

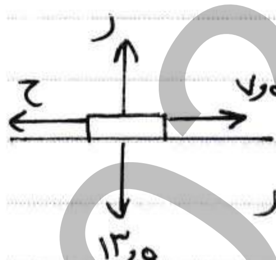
∴ م_س = ١/٤

② ∵ ق = م_س ر

∴ ق = ٠,٤ × ٣٢ = ١٢,٨ نيوتن

③ وضع جسم وزنه ١٣٫٥ ث كجم على مستوى أفقي خشن وكان معامل الاحتكاك بينهما = $\frac{٢}{٣}$. أثرت قوة أفقية مقدارها ٧٫٥ ث كجم على الجسم وظل متزناً . اثبت أن الجسم لا يكون على وشك الحركة عندئذ وأن مقدار الاحتكاك عندئذ = $\frac{٥}{٦}$ قيمتها النهائية

- الحل -



في حالة الاحتكاك النهائي

$ح_س = م_س ر = \frac{٢}{٣} ر$

، ر = ١٣٫٥

∴ $ح_س = \frac{٢}{٣} \times ١٣٫٥ = ٩$ ث كجم

∴ ح = ق = ٧٫٥ ∴ $ح < ح_س$

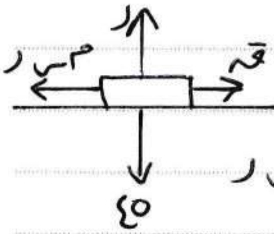
∴ الاحتكاك ليس نهائياً

∴ $\frac{ح}{ح_س} = \frac{٧٫٥}{٩} = \frac{٥}{٦}$

∴ $ح = \frac{٥}{٦} ح_س$

④ جسم وزنه ٤٥ ث كجم موضوع على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم = $\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ أوجد ① مقدار القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى ② مقدار واتجاه رد الفعل المحصل

- الحل -



القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة هي ق = $م_س ر$

، ر = ٤٥

∴ ق = $\frac{١}{٣}\sqrt{٣} \times ٤٥ = ١٥\sqrt{٣}$ ث كجم

∵ $\bar{ر} = ر\sqrt{١ + م_س^٢} = ٤٥\sqrt{١ + \frac{١}{٣}}$

∴ $\bar{ر} = ٤٥ \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = ٣٠\sqrt{٣}$ ث كجم

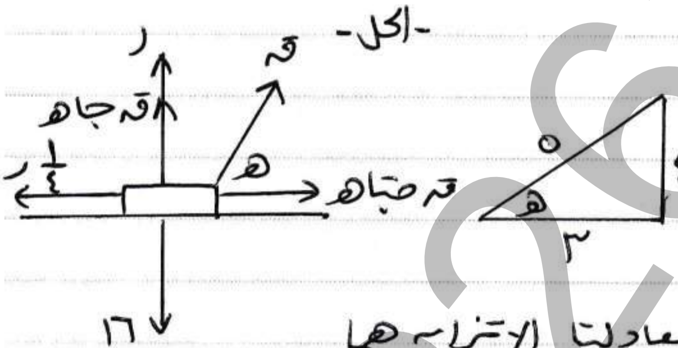
، ظا ل = $م_س = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٣٠°

∴ رد الفعل المحصل يصنع مع الرأسي زاوية قياسها ٣٠°

⑤ جسم وزنه ١٦ ث كجم موضوع على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم = $\frac{١}{٤}$ أوجد
① مقدار القوة التي تؤثر على الجسم في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية جيب تمامها $\frac{٣}{٥}$ وتكفي لجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى
② مقدار واتجاه رد الفعل المحصل

- الحل -



معادلتا الاتزان هما

ق جتا هـ = $م_س ر$ ∴ ق × $\frac{٣}{٥} = \frac{١}{٤}$ ر

∴ ر = $\frac{١٢}{٥}$ ق ①

، ر + ق جا هـ = ١٦

∴ ر + $\frac{٤}{٥}$ ق = ١٦ ②

وبالتعويض من ① في ②

∴ $\frac{١٢}{٥}$ ق + $\frac{٤}{٥}$ ق = ١٦

∴ ق = ٥ ث كجم ، ر = ١٢ ث كجم

∵ $\bar{ر} = ر\sqrt{١ + م_س^٢} = ١٢\sqrt{١ + \frac{١}{١٦}}$

∴ $\bar{ر} = ٣\sqrt{١٧}$ ث كجم

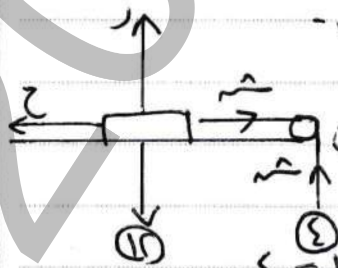
∴ ظا ل = $\frac{١}{٤}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك ل = ٢َ ١٤°

∴ رد الفعل المحصل يصنع مع الرأسي زاوية قياسها ٢َ ١٤°

(٦) وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقي وربط بخيط أفقي يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن فإذا كان الجسم متزناً على النضد فأوجد قوة الاحتكاك . وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلة والنضد يساوي $\frac{١}{٣}$. هل يكون الجسم على وشك الحركة ؟ فسر اجابتك

- الحل -



∵ الجسم متزن

∴ ح = ش = ٤ نيوتن

، ر = ١٢

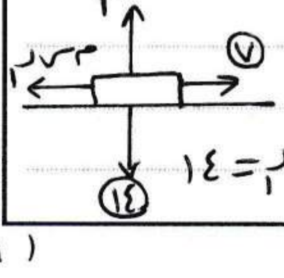
∵ $م_س$ ر = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤

∴ ح = $م_س$ ر = ٤

∴ الجسم على وشك الحركة

(٧) وضع جسم وزنه ١٤ ث كجم على مستو أفقي خشن ولما شد هذا الجسم بقوة أفقية مقدارها ٧ ث كجم أصبح الجسم على وشك الحركة . فإذا وضع فوق الجسم صنجة وزنها ٦ ث كجم فما مقدار القوة الأفقية التي توشك أن تحرك الجسم والصنجة فوقه

- الحل -



• الجسم فقط

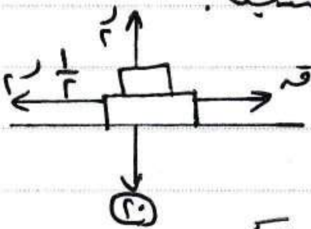
∵ الجسم على وشك الحركة

∴ $م_س ر_١$ = ٧ ، $ر_١$ = ١٤

∴ $م_س$ × ١٤ = ٧ ∴ $م_س$ = $\frac{١}{٢}$

• الجسم بعد وضع الصنجة :

∵ الجسم على وشك الحركة



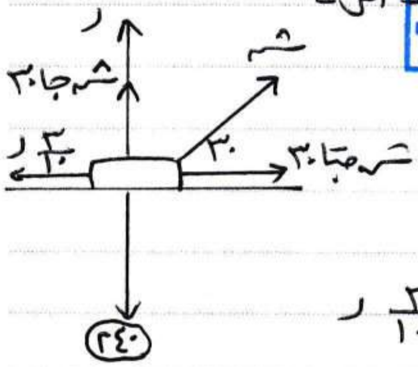
∴ $\frac{١}{٢} ر_٢$ = ق

، $ر_٢$ = ٢٠

∴ ق = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ = ١٠ ث كجم

(٨) جسم مقدار وزنه ٢٤٠ ث كجم موضوع على مستو أفقي خشن ويراد شده بحبل يميل على الأفقي لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني يساوي ٣و فأوجد مقدار الشد الذي يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة مقرباً لرقمين عشريين

- الحل -



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ش جتا ٣٠ = $\frac{٣}{١٠}$ ر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش = $\frac{٣}{١٠}$ ر ∴ ر = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ ش (١)

، ر + ش جا ٣٠ = ٢٤٠

∴ ر + $\frac{١}{٢}$ ش = ٢٤٠ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢)

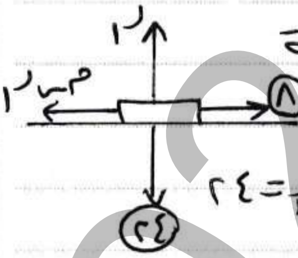
∴ $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ ش + $\frac{١}{٢}$ ش = ٢٤٠

∴ ش = ٧٠و٨٦ ث كجم

⑨ وضع جسم كتلته ٢٤ ث كجم على مستوٍ أفقي خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٨ ث كجم فجعلته على وشك الحركة. أوجد مقدار القوة التي تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° وتعمل لجعل الجسم على وشك الحركة.

- الحل -

• في حالة القوة الأفقية

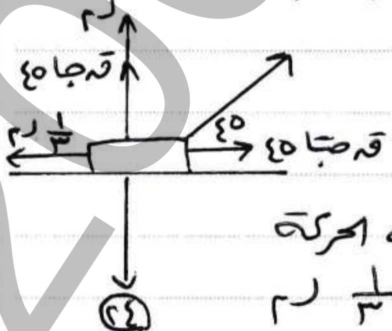


∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ٨ = م س ر١ ، ر١ = ٢٤

∴ ٨ = ٢٤ م س ∴ م س = $\frac{1}{3}$

• في حالة القوة المائلة:



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق جتا ٤٥ = $\frac{1}{3}$ ر٢

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ق = $\frac{1}{3}$ ر٢

∴ ر٢ = $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ق ①

، ر٢ + ق جا ٤٥ = ٢٤ ②

وبالتعويض من ① في ②

∴ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ق + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ق = ٢٤

∴ $\frac{4}{\sqrt{2}}$ ق = ٢٤

∴ ق = ٢٤ × $\frac{\sqrt{2}}{4}$ = ٦$\sqrt{2}$ ث كجم

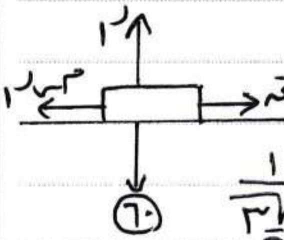
⑩ وضع جسم كتلته ٦٠ جم على مستوٍ أفقي خشن قياس زاوية الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم تساوي ٣٠° أوجد:

① القوة الأفقية التي تكفي لجعل الجسم على وشك الحركة

② القوة التي تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° وتعمل لجعل الجسم على وشك الحركة

- الحل -

• في حالة القوة الأفقية



معامل الاحتكاك السكوني

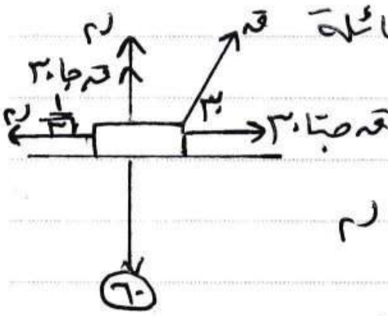
م س = ظا ل = ظا ٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق = م س ر١ ، ر١ = ٦٠

∴ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ × ٦٠ = ٢٠$\sqrt{3}$ ث جم

• في حالة القوة المائلة



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق جتا ٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر٢

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر٢

∴ ر٢ = $\frac{3}{2}$ ق ①

، ∵ ر٢ + ق جا ٣٠ = ٦٠ ②

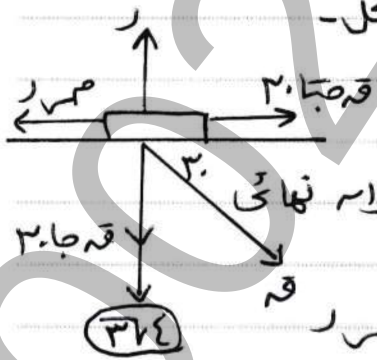
وبالتعويض من ① في ②

∴ $\frac{3}{2}$ ق + $\frac{1}{2}$ ق = ٦٠

∴ ٢ ق = ٦٠ ∴ ق = ٣٠ ث جم

⑪ وضع جسم وزنه $4\sqrt{3}$ نيوتن على مستوٍ أفقي خشن وأثرت فيه قوة مقدارها $4\sqrt{3}$ نيوتن في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى لأسفل فجعلت الجسم في حالة اتزان نهائي.
أوجد: ① معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك ② رد الفعل المحصل

-الحل-



∵ الجسم في حالة اتزان نهائي

∴ ق جتا ٣٠ = م س ر

∴ $4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ = م س ر

∴ م س ر = ٦ ①

، ر = ق جا ٣٠ + $4\sqrt{3}$

∴ ر = $4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

وبالتعويض في ①

∴ م س × $6\sqrt{3}$ = ٦

∴ م س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ ظا ل = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

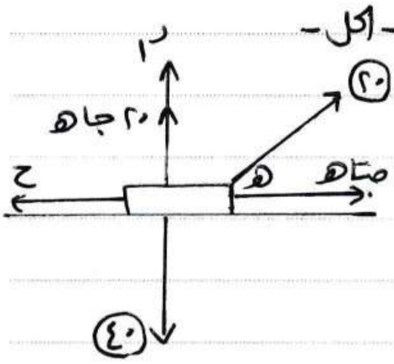
∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٣٠°

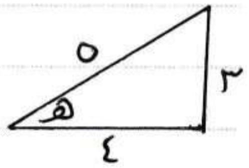
، رَ = ر $\sqrt{1+\text{م س}^2}$ = $6\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{1}{3}}$

∴ رَ = ١٢ نيوتن

⑫ جسم وزنه ٤٠ ث كجم موضوع على مستوٍ أفقي خشن وأثرت فيه قوة مقدارها ٢٠ ث كجم في اتجاه يصنع زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ مع الأفقي لأعلى فظل الجسم متزناً. أوجد مقدار قوة الاحتكاك وإذا زيدت هذه القوة حتى صارت ٢٥ ث كجم عندما أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك السكوني

-الحل-



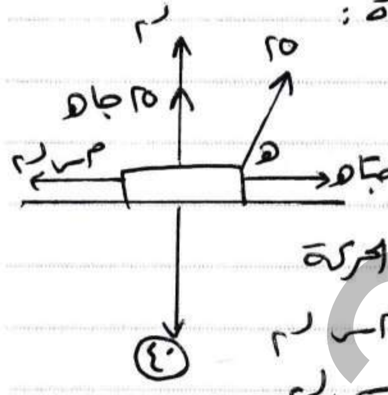


• قبل زيادة القوة:

∵ الجسم متزن ∴ ٢٠ جتا هـ = ح

∴ ح = ٢٠ × $\frac{4}{5}$ = ١٦ ث كجم

• بعد زيادة القوة:



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ٢٥ جتا هـ = م س ر٢

∴ ٢٥ × $\frac{4}{5}$ = م س ر٢

∴ م س ر٢ = ٢٠ ①

، ر٢ + ٢٥ جا هـ = ٤٠

∴ ر٢ + ٢٥ × $\frac{3}{5}$ = ٤٠ ∴ ر٢ = ٢٥

وبالتعويض في ①

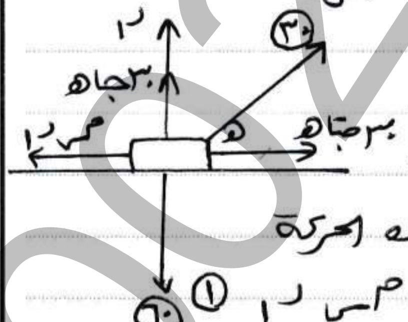
∴ ٢٥ م س = ٢٠

∴ م س = $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

(١٣) جسم كتلته ٦٠ ثكجم وضع على مستوٍ أفقي خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ٣٠ ث كجم في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ لأعلى فأصبح على وشك الحركة ثم أثرت عليه قوة مقدارها ٦٠ ث كجم في الاتجاه المضاد للقوة الأولى فأصبح على وشك الحركة أيضاً . أوجد معامل الاحتكاك السكوني ومقدار الزاوية هـ

- الحل -

صابر عبد الرحيم محمود



• في الحالة الأولى :

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ٣٠ جتا هـ = م س ر١ (١)

، ٣٠ جا هـ + ر١ = ٦٠

∴ ر١ = ٦٠ − ٣٠ جا هـ (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

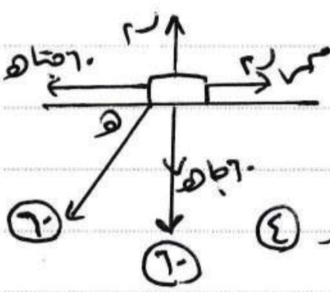
∴ ٣٠ جتا هـ = م س (٦٠ − ٣٠ جا هـ)

∴ جتا هـ = م س (٢ − جا هـ)

∴ $م_س = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{٢ − جا هـ}}$ (٣)

• في الحالة الثانية :

∵ الجسم على وشك الحركة



∴ م س ر٢ = ٦٠ جتا هـ (٤)

، ر٢ = ٦٠ + ٦٠ جا هـ (٥)

بالتعويض من (٥) في (٤)

∴ م س (٦٠ + ٦٠ جا هـ) = ٦٠ جتا هـ

∴ $م_س = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{١ + جا هـ}}$ (٦)

من (٣) ، (٦) ∴ $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{٢ − جا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{١ + جا هـ}}$

∴ ٢ − جا هـ = ١ + جا هـ

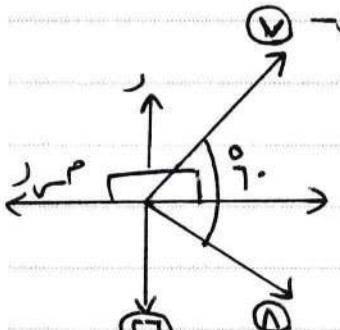
∴ ٢ جا هـ = ١ ∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (هـ) = ٣٠°

∴ $م_س = \frac{\text{جتا ٣٠}}{\text{١ + جا ٣٠}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

(١٤) وضع جسم كتلته ٢٦ جم على مستوٍ أفقي خشن وأصبح الجسم على وشك الحركة عندما أثرت عليه قوتان أفقيتان مقدارهما ٧ ، ٨ ث جم تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° أوجد قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى

- الحل -



∴ $ح = \sqrt{٦٤ + ٤٩ + ٢ \times ٧ \times ٨ \times \frac{١}{٢}}$

∴ ح = ١٣ ث جم

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ١٣ = م س ر ، ر = ٢٦

∴ ١٣ = م س × ٢٦

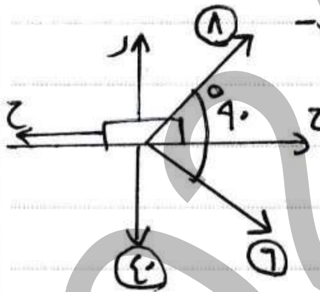
∴ م س = $\frac{١}{٢}$

∴ ظا ل = $\frac{١}{٢}$ ∴ قياس زاوية الاحتكاك

ل = ٢٦° ٣٤َ

(١٥) وضع جسم وزنه ٤٠ ث كجم على مستوٍ أفقي خشن وأثرت على الجسم في نفس المستوى قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٨ ث كجم فبقي الجسم متزناً . اثبت أن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن $\frac{1}{4}$

- الحل -



ح = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ١٠

∵ الجسم متزن

∴ ح (الاحتكاك) = ح = ١٠ ، ر = ٤٠

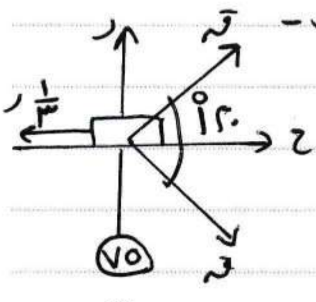
، ∵ ح ≤ م س ر (الجسم متزن)

∴ ١٠ ≤ ٤٠ م س ∴ م س ≥ $\frac{1}{4}$

∴ معامل الاحتكاك السكوني يجب ألا يقل عن $\frac{1}{4}$

(١٦) يرتكز جسم كتلته ٧٥ جم على مستوٍ أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم = $\frac{1}{3}$ أثرت على الجسم قوتان أفقيتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فكان الجسم على وشك الحركة . أوجد مقدار كل من القوتين

- الحل -



∵ ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$

∴ ح = ٢ ق جتا $\frac{١٢٠}{٢}$

∴ ح = ٢ ق جتا ٦٠

∴ ح = ٢ ق × $\frac{1}{2}$ ∴ ح = ق

∵ الجسم على وشك الحركة ∴ ح = م س ر

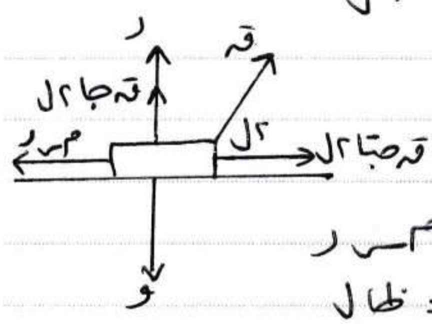
∴ ق = $\frac{1}{3}$ ر (١) ، ر = ٧٥

∴ ق = $\frac{1}{3}$ × ٧٥ = ٢٥ ث جم

∴ مقدار كل من القوتين = ٢٥ ث جم

(١٧) وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوٍ أفقي خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى (ل) شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقي زاوية قياسها (٢ل) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة . اثبت أن مقدار هذه القوة يساوي و ظا ل

- الحل -



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق جتا ٢ل = م س ر

، ∵ م س = ظا ل

∴ ق جتا ٢ل = ر ظا ل (١)

، ر + ق جا ٢ل = و

∴ ر = و − ق جا ٢ل (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق جتا ٢ل = ظا ل [و − ق جا ٢ل]

∴ ق جتا ٢ل = $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ [و − ق جا ٢ل]

∴ ق جتا ٢ل جتا ل = و جا ل − ق جا ل جا ٢ل

∴ ق [جتا ٢ل جتا ل + جا ٢ل جا ل] = و جا ل

∴ ق [جتا (٢ل − ل)] = و جا ل

∴ ق جتا ل = و جا ل

∴ ق = $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا ل}}$

∴ ق = و ظا ل

صابر عبد الرحيم محمود

- تمارين عامة -

① وضع جسم وزنه ٢٧ ث كجم على مستو أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم $\frac{1}{3}$ أوجد مقدار القوة المماسة للمستوى التي توشك أن تحرك الجسم (٩ ث كجم)

② وضعت كتلة خشبية وزنها ٦ ث كجم على نضد أفقي وربطت بخيط أفقي يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٥ر١ ث كجم فإذا كانت الكتلة الخشبية متزنة على النضد فعين قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودي وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلة والنضد يساوي $\frac{1}{3}$ فهل كان الجسم على وشك الحركة أم لا (٥ر١ ث كجم ، ٦ ث كجم ، ليس)

③ وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستو أفقي خشن ، معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى = $\frac{1}{4}$
أوجد ① القوة الأفقية التي تلزم لجعل الجسم على وشك الحركة
② القوة التي تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° وتلزم لجعل الجسم على وشك الحركة (٥ نيوتن ، ٠٥ر٥ نيوتن)

④ وضع جسم كتلته ٣٦ كجم على مستو أفقي خشن وأثرت عليه قوة قدرها ٧٢ ث كجم تصنع مع المستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أسفل فجعلته على وشك الحركة ، أوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى ومقدار رد الفعل المحصل ($\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ، $36\sqrt{7}$ ث كجم)

⑤ وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستو أفقي خشن وأثرت فيه قوة مقدارها ١٥ نيوتن في اتجاه يصنع زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ لأعلى فظل الجسم متزناً . أوجد مقدار قوة الاحتكاك ، وإذا زيدت هذه القوة حتى أصبح مقدارها ٢٠ نيوتن وأصبح الجسم عندئذ على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك السكوني
(١٢ نيوتن ، $\mu_s = \frac{4}{7}$)

⑥ وضع جسم وزنه $\sqrt{75}$ ث كجم على مستو أفقي خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٢ ، ٣ ث كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين وواقعتين في نفس المستوى الأفقي مع الجسم فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك ($\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ٣٠°)

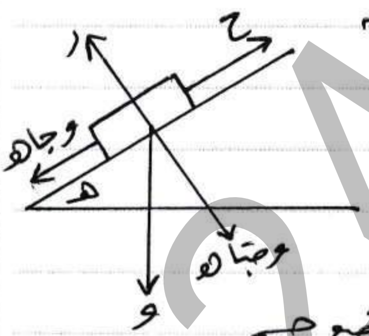
صابر عبد الرحيم محمود

اتزان جسم على مستوٍ مائل خشن

اذا وضع جسم مقدار وزنه و على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ واتزن الجسم على المستوى فإن

ر = و جتا هـ

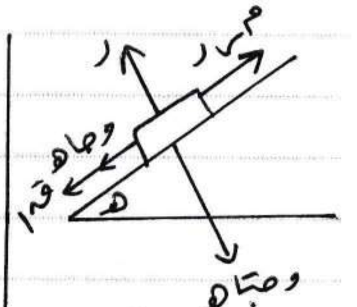
، ح = و جا هـ



ملاحظة: اذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوي قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي أي أن ظا ل = ظا هـ ومنها ل = هـ

ملاحظات:

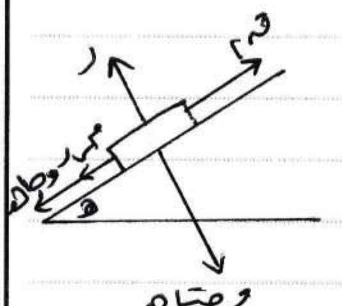
① اذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي أصغر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم يستقر على المستوى حيث لا يكون الاحتكاك نهائياً ويمكن جعل الاحتكاك نهائياً بأن تؤثر على الجسم بقوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى كما يلي



معادلات الاتزان

ر = وجتاهـ

$م_س$ ر = $ق_1$ + وجاهـ



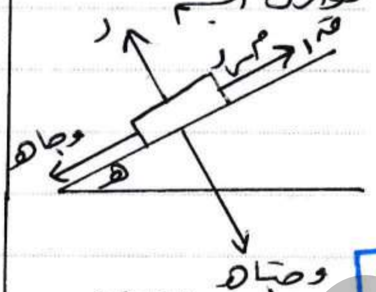
معادلات الاتزان

ر = وجتاهـ

$ق_2$ = $م_س$ ر + وجاهـ

② اذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي أكبر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط ويمكن جعل الجسم في حالة اتزان نهائي أي على وشك الحركة لأسفل أو لأعلى بالتأثير عليه بقوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى كما يلي:

القوة $ق_1$ عندها الجسم على وشك الانزلاق وهي أقل قوة تحفظ توازن الجسم

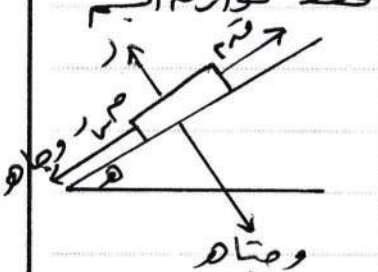


معادلات الاتزان

ر = وجتاهـ

$ق_1$ + $م_س$ ر = وجاهـ

القوة $ق_2$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى للمستوى وهي أكبر قوة تحفظ توازن الجسم



معادلات الاتزان

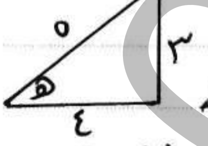
ر = وجتاهـ

$ق_2$ = $م_س$ ر + وجاهـ

- أمثلة محلولة -

① وضع جسم وزنه ١٦ نيوتن على مستوٍ مائل خشن ولوحظ أن الجسم أصبح على وشك الحركة لأسفل المستوى تحت تأثير وزنه فقط عندما كان المستوى يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ أوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك

- الحل -



∵ الجسم على وشك الحركة لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

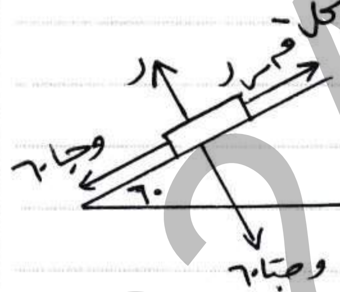
∴ زاوية الاحتكاك السكوني = زاوية ميل المستوى

∴ $م_س$ = ظا ل = ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك السكوني = ٣٦° ٥٢′

(٢) وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها $60°$ وكان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{6}$ وضح مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً

- الحل -



∵ ر = و جتا ٦٠

∴ ر = $\frac{1}{2}$ و

، ∵ م س = $\frac{\sqrt{3}}{6}$

∴ م س ر = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ر

∴ م س ر = $\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1}{2}$ و = $\frac{\sqrt{3}}{12}$ و

، ∵ و جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

∴ و جا ٦٠ > م س ر أي أن

مركبة الوزن في اتجاه خط أكبر ميل لأسفل أكبر من الاحتكاك السكوني النهائي

∴ الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً

(٣) جسم وزنه ٣٨ ث كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقي في نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقي زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ وتقع في مستوى رأسي فجعلته على وشك الحركة أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودي

- الحل -

• على المستوى المائل:

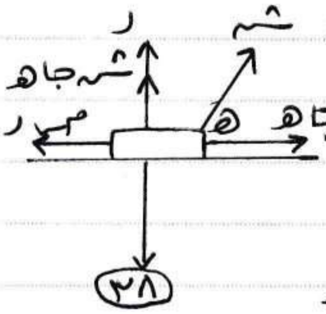
∵ الجسم على وشك الحركة (الانزلاق) تحت تأثير وزنه فقط

∴ م س = ظا هـ = $\frac{1}{4}$

• على المستوى الأفقي:

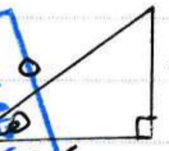
∵ الجسم على وشك الحركة

∴ معادلات الاتزان



شـ جتا هـ = م س ر

∴ $\frac{4}{5}$ شـ = $\frac{1}{4}$ ر



∴ ر = $\frac{16}{5}$ شـ (١)

، ر + شـ جا هـ = ٣٨

وبالتعويض من (١)

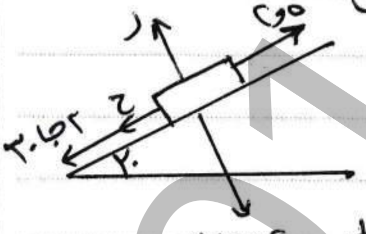
∴ $\frac{16}{5}$ شـ + $\frac{3}{5}$ شـ = ٣٨

∴ $\frac{19}{5}$ شـ = ٣٨ ∴ شـ = ١٠ ث كجم

، ر = $\frac{16}{5} \times 10 = 32$ ث كجم

(٤) تتزن قطعة من الخشب وزنها ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها $30°$ ومعامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يساوي ٩و٠ . أثرت قوة مقدارها ٥و٢ ث كجم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وإلى أعلى . أوجد قوة الاحتكاك ثم وضح ما إذا كانت القطعة الخشبية على وشك الحركة أم لا

- الحل -



∵ و جا هـ = ٢ جا ٣٠ = ١ ث كجم

∴ ق > و جا هـ

∴ ح تعمل في اتجاه خط أكبر ميل لأسفل ، ∵ الجسم متزن

∴ ق = ح + و جا هـ ∴ ٥و٢ = ح + ١

∴ ح = ٥و٢ − ١ = ٥و١ ث كجم

، ر = ٢ جتا ٣٠

٤ ∵ م$_س$ ر = $\frac{9}{10} \times 2 \times$ جتا٣٠ = $\frac{9\sqrt{3}}{10}$ = ١,٥٥٩

∴ م$_س$ ر > ح

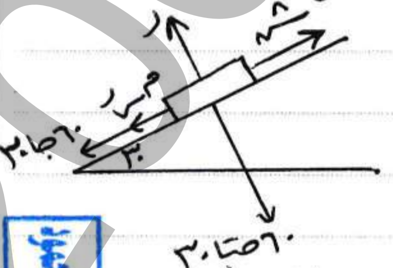
∴ الاحتكاك السكوني ليس نهائياً

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة

⑤ وضع جسم وزنه ٦٠ ث كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° شد الجسم لأعلى المستوى بقوة موازية لخط أكبر ميل جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{1}{\sqrt{3}}$ فأوجد مقدار قوة الشد

-الحل-

∵ الجسم على وشك الحركة فإن



ش = م$_س$ ر + ٦٠ جا٣٠

∴ ش = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ر + ٣٠ ①

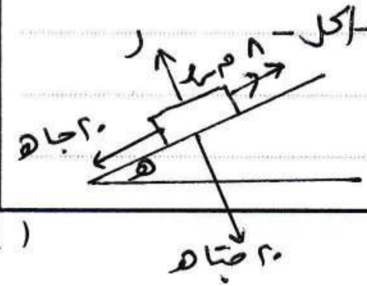
∵ ر = ٦٠ جتا٣٠ = ٣٠$\sqrt{3}$

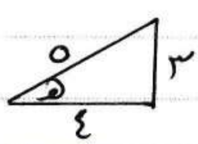
بالتعويض في ①

∴ ش = $\frac{1}{\sqrt{3}} \times 30\sqrt{3} + 30$ = ٦٠ ث كجم

⑥ يرتكز جسم وزنه ٢٠ ث كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{3}{4}$ فإذا كانت أقل قوة تعمل في اتجاه المستوى لأعلى لتحفظ توازن الجسم مقدارها يساوي ٨ ث كجم. فأوجد قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى

-الحل-





∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ق + م$_س$ ر = و جاهـ

∴ ٨ + م$_س$ ر = ٢٠ × $\frac{3}{5}$

∴ ٨ + م$_س$ ر = ١٢

∴ م$_س$ ر = ٤ ①

، ر = ٢٠ جتاهـ = ٢٠ × $\frac{4}{5}$ = ١٦ ②

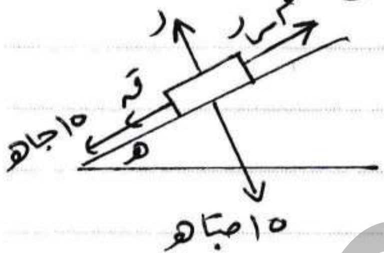
من ①، ② ينتج أن

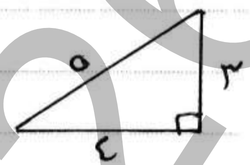
م$_س$ = $\frac{1}{4}$ ∴ ظا ل = $\frac{1}{4}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك = $14^\circ\ 2'$

⑦ وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية جيب تمامها $\frac{4}{5}$ وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° بين أن الجسم يبقى متزناً ثم أوجد مقدار القوة التي تؤثر في الجسم في اتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل ويكون الجسم على وشك الحركة

-الحل-





• قبل تأثير القوة   ∵ ظا هـ = $\frac{3}{4}$

∴ ق(هـ) = $36^\circ\ 52'$

∴ قياس زاوية الاحتكاك > قياس زاوية ميل المستوى   ∴ الجسم يبقى متزناً

• بعد تأثير القوة:

∵ الجسم على وشك الحركة

∴ ر = ١٥ جتاهـ   ∴ ر = ١٥ × $\frac{4}{5}$ = ١٢

، م$_س$ ر = ق + ١٥ جاهـ

∵ م$_س$ = ظا ٤٥ = ١

∴ ١٢ = ق + ١٥ × $\frac{3}{5}$ ∴ ق = ٣ نيوتن

⑧ جسم وزنه ١٨ ث كجم موضوع على مستوٍ مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° فإذا نقص قياس زاوية ميل المستوى إلى ٣٠° فأوجد مقدار قوة الاحتكاك ثم أوجد مقدار القوة التي تؤثر في الجسم عندئذ في اتجاه خط أكبر ميل في المستوى وتجعله مع وشك الانزلاق

- الحل -

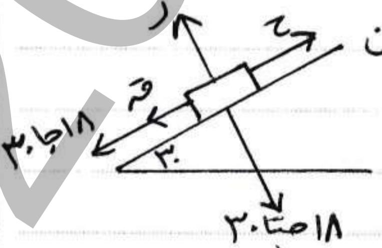
• في الحالة الأولى هـ = ٦٠°

∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط ∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٦٠°

∴ م س = ظا ٦٠ = √٣

• في الحالة الثانية هـ = ٣٠°

∵ الجسم متزن بدون تأثير القوة



∴ ح = ١٨ جا ٣٠

∴ ح = ١٨ × ١/٢

= ٩ ث كجم

• بعد تأثير القوة

∵ الجسم على وشك الانزلاق

∴ م س ر = قه + ١٨ جا ٣٠

∴ √٣ ر = قه + ٩

، ر = ١٨ جتا ٣٠ = ٩√٣

∴ √٣ × ٩√٣ = قه + ٩

∴ قه = ٢٧ − ٩ = ١٨ ث كجم

⑨ وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن . لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠°

فأوجد مقدار :

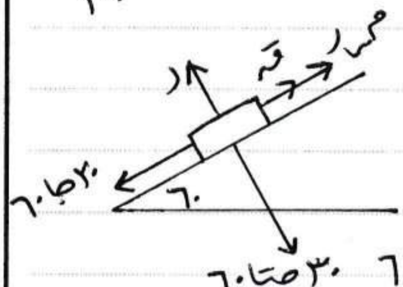
① أقل قوة تؤثر في الجسم موازية لخط أكبر ميل في المستوى وتمنعه من الانزلاق

② القوة التي تؤثر في الجسم موازية لخط أكبر ميل في المستوى وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

- الحل -

∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل المستوى بزاوية قياسها ٣٠° ∴ م س = ظا ٣٠ = ١/√٣

أولاً : ∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل



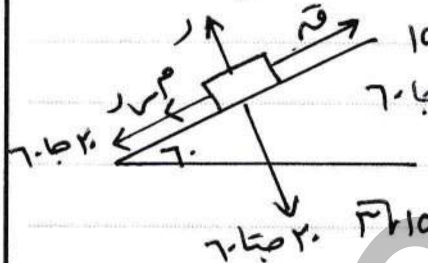
∴ ر = ٣٠ جتا ٦٠ = ١٥

، م س ر + قه = ٣٠ جا ٦٠

∴ ١/√٣ × ١٥ + قه = ١٥√٣

∴ قه = ١٠√٣ نيوتن

ثانياً : ∵ الجسم على وشك الحركة لأعلى



∴ ر = ٣٠ جتا ٦٠ = ١٥

، قه = م س ر + ٣٠ جا ٦٠

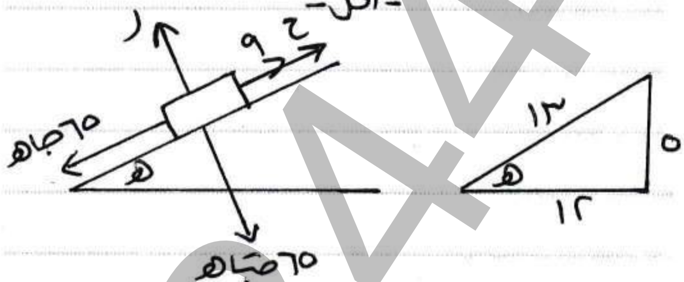
∴ قه = ١/√٣ × ١٥ + ١٥√٣

∴ قه = ٢٠√٣ نيوتن

⑩ وضع جسم وزنه ٦٥ نيوتن على مستوٍ خشن يميل على الأفقي بزاوية ظلها ٥/١٢ ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين المستوى = ١/٣ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٩ نيوتن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بحيث ظل الجسم متزناً . عين مقدار واتجاه قوة الاحتكاك وبيّن ما إذا كانت

نهائية أم لا واذكر التغيير الذي يجب أن يحدث لمقدار القوة حتى يصبح الجسم على وشك الحركة إلى أسفل

-الحل-



$\because$ ٦٥ جاهـ = ٦٥ × $\frac{٥}{١٣}$ = ٢٥

$\therefore$ قه < و جاهـ

$\therefore$ قوة الاحتكاك السكوني لأعلى:

$\therefore$ ح + ٩ = ٢٥　　$\therefore$ ح = ١٦ نيوتن

، $\because$ ر = ٦٥ جتاهـ = ٦٥ × $\frac{١٢}{١٣}$ = ٦٠

$\therefore$ مس ر = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

$\therefore$ ح < مس ر

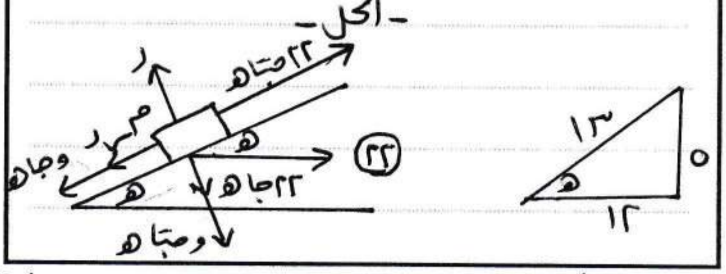
$\therefore$ الجسم ليس على وشك الحركة ، الاحتكاك غير نهائي　$\because$ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$\therefore$ مس ر + قه = ٢٥　　$\therefore$ قه = ٥

$\therefore$ قه تنقص من ٩ إلى ٥ نيوتن

(١١) وضع جسم وزنه و نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٥}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة في المستوى الأفقي المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى هو $\frac{١}{٢}$ فأوجد مقدار وزن الجسم و

-الحل-



$\because$ الجسم على وشك الحركة لأعلى

$\therefore$ ر = ٢٢ جاهـ + و جتاهـ

$\therefore$ ر = ٢٢ × $\frac{٥}{١٣}$ + $\frac{١٢}{١٣}$ و　(١)

، ٢٢ جتاهـ = مس ر + و جاهـ

وبالتعويض من (١)

$\therefore$ ٢٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{١١٠}{١٣}$ + $\frac{١٢}{١٣}$ و) + $\frac{٥}{١٣}$ و

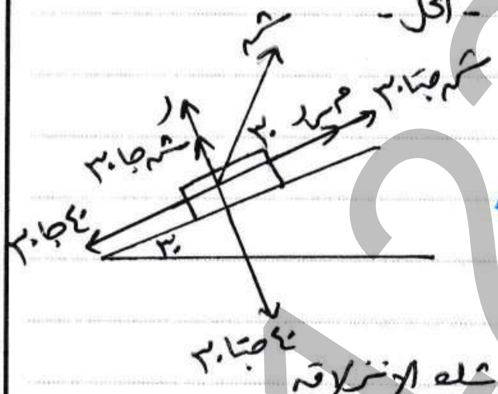
× ١٣

$\therefore$ ٢٦٤ = ٥٥ + ٦و + ٥و

$\therefore$ ١١و = ٢٠٩　　$\therefore$ و = ١٩ نيوتن

(١٢) وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ثم شد الجسم إلى أعلى بواسطة خيط واقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل وفي اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى. فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني يساوي $\frac{١}{٤}$ فبرهن على أن أقل قيمة للشد في الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسفل المستوى تساوي ١٥٫٣ نيوتن تقريباً

-الحل-



$\because$ الجسم على وشك الانزلاق

$\therefore$ ش جتا٣٠ + مس ر = ٤٠ جا٣٠

$\therefore$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش + $\frac{١}{٤}$ ر = ٢٠　(١)

، ر + ش جا٣٠ = ٤٠ جتا٣٠

$\therefore$ ر + $\frac{١}{٢}$ ش = ٢٠$\sqrt{٣}$

$\therefore$ ر = ٢٠$\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ش　(٢)

بالتعويض من ② في ①

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}$ ش $+ \frac{1}{4}(20\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ ش$) = 20$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}$ ش $+ 5\sqrt{3} - \frac{1}{8}$ ش $= 20$

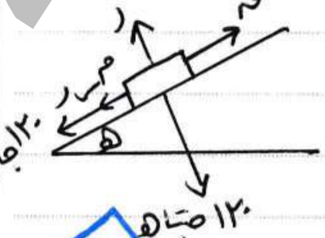
$\therefore \frac{4\sqrt{3} - 1}{8}$ ش $= 20 - 5\sqrt{3}$

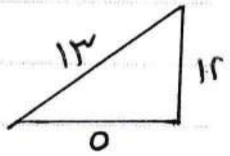
$\therefore$ ش $= 15.3$ نيوتن

⑬ مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيب تمامها يساوي $\frac{5}{13}$ ، وضع عليه جسم مقدار وزنه 130 نيوتن وأثرت عليه قوة في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني يساوي $\frac{2}{5}$ فأوجد النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار القوة التي تجعل الجسم في حالة اتزان على المستوى

- الحل -

① عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى





$\therefore$ ق $=$ م$_س$ ر $+ 130$ جاهـ

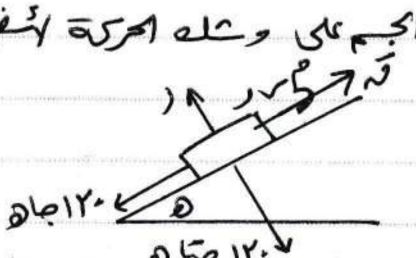
$\therefore$ ق $= \frac{2}{5}$ ر $+ 130 \times \frac{12}{13}$

$\therefore$ ق $= \frac{2}{5}$ ر $+ 120$ ①

، ر $= 130$ جتاهـ $= 130 \times \frac{5}{13} = 50$

$\therefore$ ق $= \frac{2}{5} \times 50 + 120 = 140$ نيوتن

② عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل



$\therefore$ ق $+$ م$_س$ ر $= 130$ جاهـ

$\therefore$ ق $+ \frac{2}{5}$ ر $= 130 \times \frac{12}{13}$

$\therefore$ ق $+ \frac{2}{5} \times 50 = 120$

$\therefore$ ق $+ 20 = 120$ $\therefore$ ق $= 100$ نيوتن

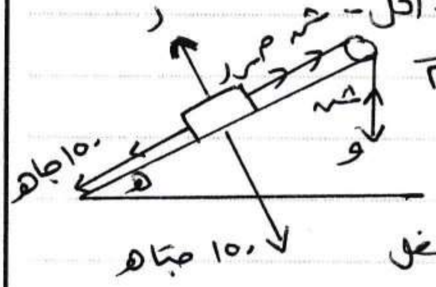
⑭ وضع جسم وزنه 150 ث جم على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ ثم ربط بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى . فإذا كان مقدار أقل ثقل يمكن تعليقه في الطرف الآخر للخيط هو $25\sqrt{2}$ ث جم ومقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه هو $125\sqrt{2}$ ث جم دون أن يختل التوازن . فأوجد هـ وكذلك معامل الاحتكاك السكوني .

- الحل -

عندما و $= 25\sqrt{2}$

$\therefore$ ش $= 25\sqrt{2}$

والجسم يكون على وشك الحركة لأسفل



$\therefore 25\sqrt{2} +$ م$_س$ ر $= 150$ جاهـ

$\therefore 25\sqrt{2} +$ م$_س \times 150$ جتاهـ $= 150$ جاهـ

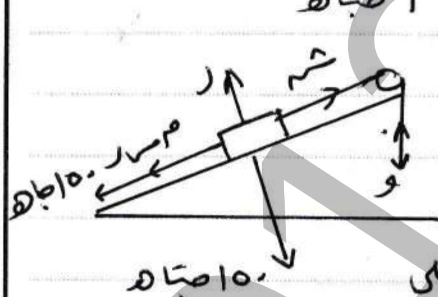
$\therefore \sqrt{2} + 6$ م$_س$ جتاهـ $= 6$ جاهـ

$\therefore$ م$_س = \frac{6 \text{ جاهـ} - \sqrt{2}}{6 \text{ جتاهـ}}$ ①

عندما و $= 125\sqrt{2}$

$\therefore$ ش $= 125\sqrt{2}$

والجسم يكون على وشك الحركة لأعلى



$\therefore$ ر $= 150$ جتاهـ

، $125\sqrt{2} =$ م$_س$ ر $+ 150$ جاهـ

$\therefore 125\sqrt{2} =$ م$_س \times 150$ جتاهـ $+ 150$ جاهـ

$\therefore 5\sqrt{2} = 6$ م$_س$ جتاهـ $+ 6$ جاهـ

$\therefore$ م$_س = \frac{5\sqrt{2} - 6 \text{ جاهـ}}{6 \text{ جتاهـ}}$ ②

من ①، ② فإن

٦ جاهـ − √٢ = ٥√٢ − ٦ جاهـ

∴ ١٢ جاهـ = ٦√٢　　∴ جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

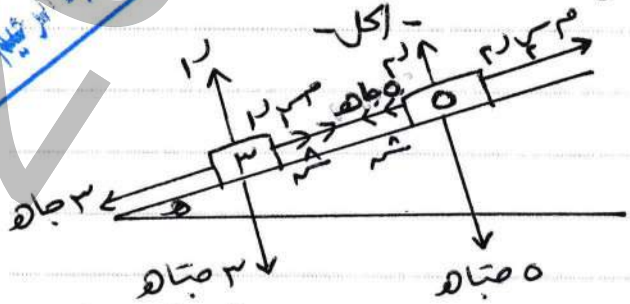
∴ ق(هـ) = ٤٥°

∴ م س = $\frac{٣\sqrt{٢} - \sqrt{٢}}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٢}{٣}$

---

⑮ كتلتان ٣، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك السكوني بين المستوى والجسمين $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ على الترتيب بين أي الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم اثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقي عندما يكون الجسمان على وشك الحركة = $\frac{٣}{٤}$

- الحل -



الجسم ذو معامل الاحتكاك الأصغر يوضع أسفل الجسم ذو معامل الاحتكاك الأكبر حتى يتحرك الجسمان معاً والخيط مشدود بينهما : بالنسبة للجسم الذي وزنه ٣ ث كجم

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ ش + م١ ر١ = ٣ جاهـ

، ر١ = ٣ صتاهـ

∴ ش = ٣ جاهـ − $\frac{٢}{٣}$ × ٣ صتاهـ

∴ ش = ٣ جاهـ − ٢ صتاهـ ①

بالنسبة للجسم الذي وزنه ٥ ث كجم

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل

∴ م٢ ر٢ = ش + ٥ جاهـ

، ر٢ = ٥ صتاهـ

∴ ش = $\frac{٤}{٥}$ × ٥ صتاهـ − ٥ جاهـ

∴ ش = ٤ صتاهـ − ٥ جاهـ ②

من ①، ②

∴ ٣ جاهـ − ٢ صتاهـ = ٤ صتاهـ − ٥ جاهـ

∴ ٨ جاهـ = ٦ صتاهـ

∴ $\frac{\text{جاهـ}}{\text{صتاهـ}} = \frac{٦}{٨}$　　∴ ظاهـ = $\frac{٣}{٤}$

- تمارين عامة -

① جسم مقدار وزنه ٣٨ نيوتن يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{١}{٥}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقي في نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقي زاوية جيبها $\frac{٤}{٥}$ فجعلته على وشك الحركة . أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودي　(١٠، ٣٠ نيوتن)

② وضع جسم وزنه ٤ نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوي $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ أثرت على الجسم قوة تعمل في خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها $\frac{١}{٢}$ نيوتن فإذا كان الجسم متزناً فعين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا

(ح = ٥,١ نيوتن لأعلى ، يكون على وشك الحركة)

③ وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ وشد الجسم بقوة لأعلى المستوى وموازية لخط أكبر ميل فجعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان مقدار هذه القوة يساوي ١٣ نيوتن . فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى　($\frac{١}{٣}$)

٤) جسم وزنه ٢٥ ث كجم موضوع على مستوى مائل خشن يصنع مع الأفقي زاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ فإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى = $\frac{١}{٥}$ فأوجد أقل قوة تؤثر في اتجاه يوازي المستوى وتمنع الجسم من الانزلاق (١١ ث كجم)

٥) وضع جسم كتلته ١٠ كجم على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وكان الجسم على وشك الانزلاق . أوجد القوة الموازية للمستوى التي إذا أثرت على الجسم تجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى (١٠ ث كجم)

٦) وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائي ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذ . وإذا أثرت على الجسم قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى فأوجد مقدار واتجاه هذه القوة :

١) ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

٢) ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى (٢ ، ٥ ، ١ ث كجم)

٧) وضع جسم وزنه ٣٠ نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ ومعامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{٢}{٣}$ أوجد مقدار القوة الأفقية التي تؤثر في الجسم والواقعة في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل وتمنع الجسم من الانزلاق (٢٠ نيوتن)

٨) وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة ق في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ٣٠ نيوتن ويكون على وشك الحركة إلى أسفل عندما ق = ٢٠ نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\left(\frac{\sqrt{٣}}{١٥}\right)$

عزم قوة أو عدة قوى بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد

تعريف: يعرف متجه عزم القوة $\vec{ق}$ بالنسبة للنقطة و ويرمز له بالرمز $\vec{ج}_و$ على أنه الكمية المتجهة $\vec{ر} \times \vec{ق}$

أي أن

$\vec{ج}_و = \vec{ر} \times \vec{ق}$ حيث $\vec{ر}$ هو متجه الموضع لأي نقطة على خط عمل القوة

ومن تعريف الضرب الاتجاهي يكون

$\vec{ج}_و = \vec{ر} \times \vec{ق} = ر ق جا \theta \, \vec{ك}$

حيث $ر = \|\vec{ر}\|$ ، $ق = \|\vec{ق}\|$

ويكون $\|\vec{ج}_و\| = \|\vec{ر} \times \vec{ق}\| = ر ق جا \theta$

وإذا كان ل هو طول العمود الساقط من و على خط عمل $\vec{ق}$ فإن ل = ر جا هـ

$\therefore \|\vec{ج}_و\| = ر ق جا هـ$

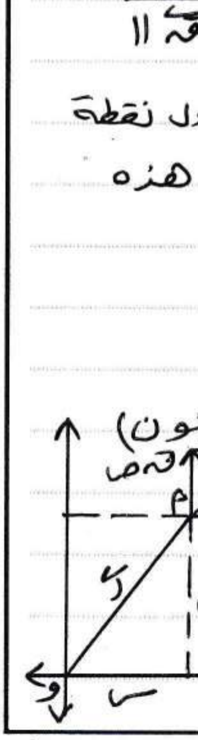
$\therefore \|\vec{ج}_و\| = ق ل$

$\therefore$ طول العمود الساقط من نقطة العزم على خط عمل القوة $ل = \frac{\|\vec{ج}_و\|}{\|\vec{ق}\|}$

ملاحظة: لإيجاد عزم قوة حول نقطة ولتكن و نوجد متجه موضع هذه النقطة كالآتي:

$\vec{ر}$ = التأثير − حول

.. مبدأ العزم (نظرية فارينون)



لنفرض القوة

$\vec{ق} = ق_س \vec{س} + ق_ص \vec{ص}$

تؤثر في نقطة م متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\vec{ر} = (س ، ص)$ فإن

$\vec{ج}_و = \vec{ر} \times \vec{ق}$

$= (س ، ص) \times (ق_س ، ق_ص)$

$= (س ق_ص) \vec{ك} + (- ص ق_س) \vec{ك}$

$= (س ق_ص - ص ق_س) \vec{ك}$

= عزم $ق_ص$ حول و + عزم $ق_س$ حول و

النظرية العامة للعزوم:

المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة

صابر عبد الرحيم محمود

نتائج وملاحظات:

① المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول أي نقطة على خط عمل المحصلة = صفر

أي أن: إذا كانت م $\in$ خط عمل المحصلة فإن $\vec{ج}_م$ = صفر

② إذا كان المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوي صفر فإما أن يكون مقدار المحصلة يساوي صفر أو خط عملها يمر بهذه النقطة

أي أن إذا كان $\vec{ج}_م$ = صفر

فإما مقدار المحصلة ح = صفر

أو م $\in$ خط عمل المحصلة ح

③ إذا كان $\vec{ج}_م = \vec{ج}_ب$ فإن خط عمل $\vec{ق} \parallel \overline{م ب}$

④ إذا كان $\vec{ج}_م = - \vec{ج}_ب$ فإن خط عمل $\vec{ق}$ ينصف $\overline{م ب}$

- أمثلة محلولة -

① تؤثر القوة ق→ = ٢ س→ + ٥ ص→ في النقطة أ = (-٣ ، ١) عين متجه عزم ق→ بالنسبة لنقطة الأصل و كذلك بالنسبة للنقطة ن = (٢ ، -٤)

- الحل -

ر→١ = أ - و = (-٣ ، ١)

∴ جـ→و = ر→١ × ق→ = (-٣ ، ١) × (٢ ، ٥)

= (-١٥ - ٢) ع→ = -١٧ ع→

، ر→٢ = أ - ن = (-٣ ، ١) - (٢ ، -٤)

∴ ر→٢ = (-٥ ، ٥)

∴ جـ→ن = ر→٢ × ق→ = (-٥ ، ٥) × (٢ ، ٥)

= (-٢٥ - ١٠) ع→ = -٣٥ ع→

② اذا كانت ق→ = ٣ س→ + ٤ ص→ تؤثر في النقطة أ(-١ ، ٣) من جـ أوجد:

① عزم القوة ق→ بالنسبة لنقطة الأصل

② طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة ق→

- الحل -

ر→ = أ - و = (-١ ، ٣)

∴ جـ→و = ر→ × ق→ = (-١ ، ٣) × (٣ ، ٤)

∴ جـ→و = (-٤ - ٩) ع→ = -١٣ ع→

∴ ل = $\frac{\|\text{جـ}_{و}\|}{\|\text{ق}\|} = \frac{١٣}{\sqrt{٩+١٦}} = \frac{١٣}{٥}$

∴ ل = ٢,٦ وحدة طول

③ اثرت القوتان ق→١ = ٥ س→ - ٤ ص→ ، ق→٢ = س→ - ٤ ص→ في نقطة الأصل ، اثبت أن خط عمل محصلتهما يمر بالنقطة أ(-٣ ، ٤) ثم أوجد متجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة ب(٢ ، -٥)

- الحل -

ح→ = ق→١ + ق→٢ = ٦ س→ - ٨ ص→

ر→١ = و - أ = (٣ ، -٤)

∴ جـ→أ = ر→١ × ح→ = (٣ ، -٤) × (٦ ، -٨)

= (-٢٤ + ٢٤) ع→ = صفر

∴ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة أ

ر→٢ = و - ب = (-٢ ، ٥)

∴ جـ→ب = ر→٢ × ح→ = (-٢ ، ٥) × (٦ ، -٨)

= (١٦ - ٣٠) ع→ = -١٤ ع→

④ اذا كانت ق→ = ل س→ - ٢ ص→ تؤثر في النقطة أ(٥ ، ٢) وكان متجه عزم ق→ بالنسبة لنقطة ب(٧ ، -٤) يساوي ٢٠ ع→ فأوجد قيمة ل

- الحل -

ر→ = أ - ب = (-٢ ، ٦)

∴ جـ→ب = ر→ × ق→

∴ ٢٠ ع→ = (-٢ ، ٦) × (ل ، -٢)

∴ ٢٠ ع→ = (٤ - ٦ل) ع→

∴ ٤ - ٦ل = ٢٠ ∴ -٦ل = ١٦

∴ ل = $\frac{-١٦}{٦} = \frac{-٨}{٣}$

⑤ تؤثر القوتان $\overline{ق_1} = م\overline{س} + ٢\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = ل\overline{س} - \overline{ص}$ عند النقطتين $أ_1 = (١،١)$ ، $أ_2 = (-١،-٢)$ على الترتيب عين قيمة كل من الثابتين م ، ل بحيث ينعدم مجموع عزمي هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل و وبالنسبة للنقطة ب = (٢،٣)

- الحل -

$\overline{ر_1} = أ_1 - و = (١،١)$

، $\overline{ر_2} = أ_2 - و = (-١،-٢)$

∵ $\overline{جـ_و} = \overline{ر_1} \times \overline{ق_1} + \overline{ر_2} \times \overline{ق_2}$

∴ $(١،١) \times (م،٢) + (-١،-٢) \times (ل،-١) = \overline{0}$

∴ $(٢ - م)\overline{ع} + (١ + ٢ل)\overline{ع} = \overline{0}$

∴ $(٢ - م + ١ + ٢ل)\overline{ع} = \overline{0}$

∴ $-م + ٢ل + ٣ =$ صفر

∴ $٢ل - م = -٣$ ①

العزوم حول نقطة ب

$\overline{ر_1} = أ_1 - ب = (-١،-٢)$

$\overline{ر_2} = أ_2 - ب = (-٣،-٥)$

∵ $\overline{جـ_ب} = \overline{ر_1} \times \overline{ق_1} + \overline{ر_2} \times \overline{ق_2}$

∴ $(-١،-٢) \times (م،٢) + (-٣،-٥) \times (ل،-١) = \overline{صفر}$

∴ $(-٢ + ٢م)\overline{ع} + (٣ + ٥ل)\overline{ع} = \overline{0}$

∴ $(-٢ + ٢م + ٣ + ٥ل)\overline{ع} = \overline{0}$

∴ $٢م + ٥ل + ١ =$ صفر

∴ $٢م + ٥ل = -١$ ②

من ① ، ②

∴ $ل = \frac{-٧}{٩}$ ، $م = \frac{١٣}{٩}$

⑥ تؤثر القوى $\overline{ق_1} = \overline{س} + ٢\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = ٣\overline{س} - \overline{ص}$ في النقطة أ(-٢،٣) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب(-١،٥) ، جـ(١،٢)

- الحل -

$\overline{ح} = \overline{ق_1} + \overline{ق_2} = ٤\overline{س} + \overline{ص}$

$\overline{ر_1} = أ - ب = (-١،-٢)$

∴ $\overline{جـ_ب} = \overline{ر_1} \times \overline{ح} = (-١،-٢) \times (٤،١)$

$= (-١ + ٨)\overline{ع} = ٧\overline{ع}$

$\overline{ر_2} = أ - جـ = (-٣،١)$

∴ $\overline{جـ_{جـ}} = \overline{ر_2} \times \overline{ح} = (-٣،١) \times (٤،١)$

$= (-٣ - ٤)\overline{ع} = -٧\overline{ع}$

∵ $\overline{جـ_ب} = -\overline{جـ_{جـ}}$

∴ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{ب جـ}$

⑦ القوى $\overline{ق_1} = ٢\overline{س} - \overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = ٥\overline{س} + ٢\overline{ص}$ ، $\overline{ق_3} = -٣\overline{س} + ٢\overline{ص}$ تؤثر في النقطة أ(١،١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٢،١) ، (٦،٤)

- الحل -

$\overline{ح} = \overline{ق_1} + \overline{ق_2} + \overline{ق_3} = ٤\overline{س} + ٣\overline{ص}$

بالنسبة للنقطة (٢،١)

$\overline{ر_1} = (١،١) - (٢،١) = (-١،٠)$

∴ $\overline{جـ_1} = (-١،٠) \times (٤،٣) = (-٣ - ٠)\overline{ع} = -٣\overline{ع}$

بالنسبة للنقطة (٦،٤)

$\overline{ر_2} = (١،١) - (٦،٤) = (-٥،-٣)$

∴ $\overline{جـ_2} = (-٥،-٣) \times (٤،٣) = (-١٥ + ١٢)\overline{ع}$

$= -٣\overline{ع}$ ∵ $\overline{جـ_1} = \overline{جـ_2}$ ∴ خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين

⑧ أثرت قوة ق في مستوى △ أ ب جـ حيث أ(٣، ٢) ، ب(١، -٤) ، جـ(-١، ٠) بحيث كان جـأ = جـب = ٦٠ ع ، جـجـ = -٦٠ ع أوجد ق وعين مقدارها

- الحل -

∵ جـب = -جـجـ

∴ خط عمل ق يمر بمنتصف ب جـ

∴ خط عمل ق يمر بالنقطة د حيث

د = ((١-١)/٢ ، (-٤+٠)/٢) = (صفر ، -٢)

ونفرض أن ق = ل س + م ص

∴ رأ = د - أ = (٠، -٢) - (٣، ٢) = (-٣، -٤)

، ∵ جـأ = ٦٠ ع

∴ ٦٠ ع = (-٣، -٤) × (ل، م)

∴ ٦٠ ع = (-٣ م + ٤ ل) ع

∴ -٣ م + ٤ ل = ٦٠ ①

رب = د - ب = (٠، -٢) - (١، -٤) = (-١، ٢)

∵ جـب = ٦٠ ع

∴ ٦٠ ع = (-١، ٢) × (ل، م)

٦٠ ع = (-م - ٢ ل) ع

∴ -م - ٢ ل = ٦٠ ②

من ① ، ②

∴ م = -٣٦ ، ل = -١٢

∴ ق = -١٢ س - ٣٦ ص

∴ ||ق|| = √((-١٢)² + (-٣٦)²) = ١٢√١٠

وحدة قوة

⑨ قوة ق = ل س + م ص تؤثر في النقطة أ = (١، -٣) ، القياس الجبري لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة (-٥، ٠) يساوي -٢١ وحدة عزم وينعدم عزمها بالنسبة للنقطة (٢، -٧) أوجد مقدار ق ومعادلة خط عملها

- الحل -

• بالنسبة للنقطة (-٥، صفر)

ر١ = (١، -٣) - (-٥، ٠) = (٦، -٣)

∴ جـ = (٦، -٣) × (ل، م) = -٢١ ع

∴ (٦ م + ٣ ل) ع = -٢١ ع

∴ ٦ م + ٣ ل = -٢١ ÷٣

∴ ٢ م + ل = -٧ ①

• بالنسبة للنقطة (٢، -٧)

ر٢ = (١، -٣) - (٢، -٧) = (-١، ٤)

∴ جـ = (-١، ٤) × (ل، م) = صفر ع

∴ (-م - ٤ ل) ع = صفر ع

∴ -م - ٤ ل = صفر ②

من ① ، ② فإن

م = -٤ ، ل = ١

∴ ق = س - ٤ ص

∴ ||ق|| = √(١+١٦) = √١٧ وحدة قوة

، ميل ق = ص/س = -٤/١ = -٤

• معادلة خط عمل القوة ق :

∵ الميل = -٤ وتمر بالنقطة (١، -٣)

∴ (ص+٣)/(س-١) = -٤

∴ ص + ٣ = -٤ س + ٤

∴ ٤ س + ص - ١ = صفر

⑩ قوة ق مقدارها يساوي ١٥ ث جم وتعمل في أب حيث أ = (-٣، ١) ، ب = (١، ٤) أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل.

- الحل -

أب = ب - أ = (١، ٤) - (-٣، ١) = (٤، ٣)

∴ ||أب|| = √(١٦+٩) = ٥

∴ متجه وحدة في $\overrightarrow{\text{أب}} = \frac{(4,3)}{5} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

∴ $\overrightarrow{\text{ق}} = 15 (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (12, 9)$

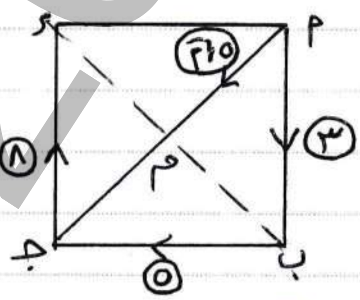
∴ $\overrightarrow{\text{ر}} = \text{أ} - \text{و} = (-3, 1)$

∴ $\overrightarrow{\text{ج}_\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (-3, 1) \times (12, 9)$

∴ $\overrightarrow{\text{ج}_\text{و}} = (-27 - 12)\,\overrightarrow{\text{ع}} = -39\,\overrightarrow{\text{ع}}$

(١١) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٥$\sqrt{2}$ نيوتن في اتجاهات $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ على الترتيب . أوجد مجموع عزوم القوى ① بالنسبة للنقطة أ
② بالنسبة للنقطة ب
③ بالنسبة لمركز المربع

-الحل-



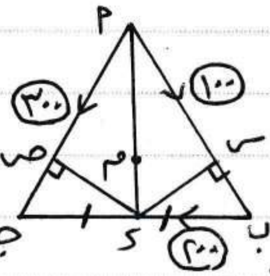
① $\text{ج}_\text{أ} = -5 \times 10$
$-8 \times 10 = -130$ نيوتن.سم

② $\text{ج}_\text{ب} = -8 \times 10 + 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$
$= -30$ نيوتن.سم

③ $\text{ج}_\text{م} = -3 \times 5 - 8 \times 5 - 5 \times 5$
$= -80$ نيوتن.سم

(١٢) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه ٢٠ سم تؤثر القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن في $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبري لعزوم هذه القوى
① حول نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث
② حول منتصف $\overline{\text{بجـ}}$

- الحل -



$\text{أد} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

، $\text{م د} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

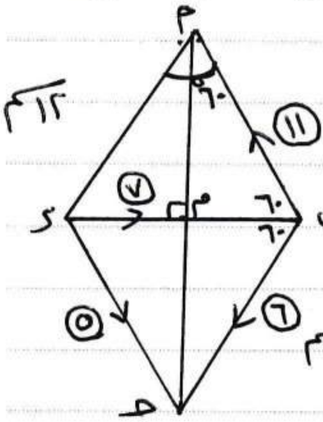
= بُعد م عن أي ضلع من أضلاع △ أ ب جـ

∴ $\text{ج}_\text{م} = (-100 - 200 + 300) \times \frac{10\sqrt{3}}{3} =$ صفر

$\text{ج}_\text{د} = -1000 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 300 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= -5000\sqrt{3} + 1500\sqrt{3}$
$= -1000\sqrt{3}$ نيوتن.سم

(١٣) أ ب جـ د معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦٠° ، أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ نيوتن في $\overleftarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{دجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{دب}}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبري لعزوم هذه القوى ① حول أ
② حول م نقطة تقاطع قطري المعين

- الحل -



$\text{ج}_\text{أ} = 7 \times 6\sqrt{3} - 6 \times 12$
$\times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

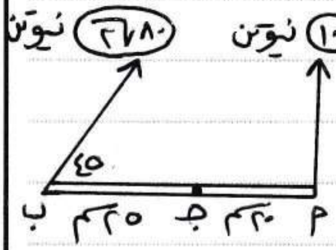
∴ $\text{ج}_\text{أ} = 42\sqrt{3} - 36\sqrt{3}$
$+ 30\sqrt{3}$

∴ $\text{ج}_\text{أ} = 36\sqrt{3}$ نيوتن.سم

، بُعد م عن أي ضلع من أضلاع المعين
$= \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{12} = 3\sqrt{3}$

∴ $\text{ج}_\text{م} = 3\sqrt{3}\,(11 - 6 + 5)$
$= 30\sqrt{3}$ نيوتن.سم

(١٤) فى الشكل المقابل: اثبت أن محصلة القوتين ١٠٠ نيوتن، ٨٠√٢ نيوتن تمر بالنقطة جـ



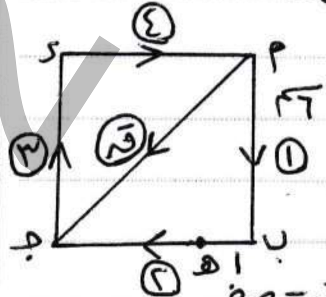
- الحل -

جـ_جـ = ١٠٠ × ٢٠ − ٨٠√٢ × ٢٥ جا ٤٥ = صفر

∴ المحصلة تمر بالنقطة جـ

(١٥) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٦ سم، هـ ∈ ب جـ حيث ب هـ = ١ سم، أثرت قوى مقاديرها ١، ٢، ٣، ٤، ق نيوتن فى أب، ب جـ، جـ د، د أ، أ جـ على الترتيب اذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة هـ أوجد قيمة ق

- الحل -



∵ جـ_هـ = صفر

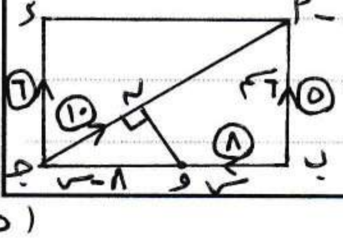
∴ −١×١ − ٤×٦ − ٣×٥ + ق × ٥ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = صفر

∴ −١ − ٢٤ − ١٥ + $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ق = صفر

∴ $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ق = ٤٠   ∴ ق = ٨√٢ نيوتن

(١٦) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم. أثرت القوى ٥، ٨، ٦، ١٠ ث جم فى ب أ، ب جـ، جـ د، جـ أ على الترتيب. أوجد نقطة و ∈ ب جـ بحيث يكون مجموع عزوم القوى حول و = ٤٥ ث جم سم فى اتجاه أ ب جـ د.

- الحل -



∵ جـ_و = −٤٥ ث جم سم

∴ ٥س − ٦(٨ − س) − ١٠(٨ − س) × $\frac{3}{5}$ = −٤٥

∴ ٥س − ٤٨ + ٦س − ٤٨ + ٦س = −٤٥

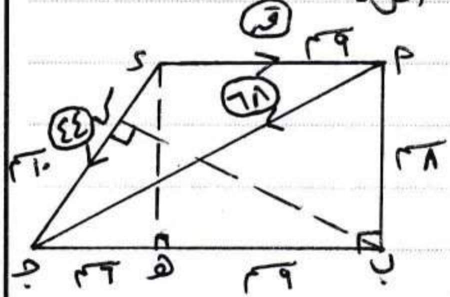
∴ ١٧س = −٤٥ + ٩٦ = ٥١

∴ س = ٣ سم

∴ ب و = ٣ سم ، و جـ = ٥ سم

(١٧) أ ب جـ د شبه منحرف قائم الزاوية فى ب، أد // ب جـ، أ ب = ٨ سم، ب جـ = ١٥ سم، أ د = ٩ سم، أثرت قوى مقاديرها ق، ٤٤، ٦٨ ث جم فى أد، د جـ، أ جـ على الترتيب اذا كان خط عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة ب فأوجد قيمة ق

- الحل -



∵ جـ_ب = صفر

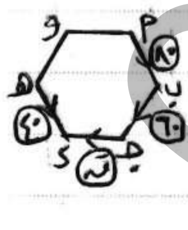
∴ −ق × ٨ + ٦٨ × $\frac{15 \times 8}{17}$ + ٤٤ × ١٥ × $\frac{8}{10}$ = صفر

∴ −٨ق + ٤٨٠ + ٥٢٨ = صفر

∴ ٨ق = ١٠٠٨   ∴ ق = ١٢٦ ث جم

(١٨) أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨٠، ٦٠، ق، ٤٠ ث جم فى أب، ب جـ، جـ د، هـ د على الترتيب. فإذا انعدم المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس أ فأوجد ق

- الحل -

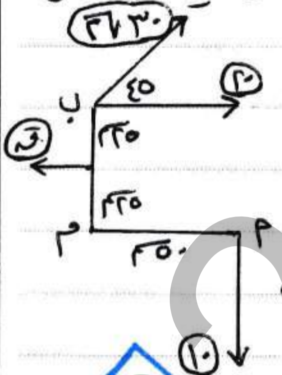


نفرض أن طول ضلع السداسى المنتظم = ل ، ∵ جـ_أ = صفر

∴ −٦٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل − ق × √٣ ل + ٤٠ × √٣ ل = صفر   ∴ −٣٠ل − ق ل + ٤٠ل = ٠

∴ −٣٠ − ق + ٤٠ = صفر   ∴ ق = ١٠ ث جم

(١٩) ثنى قضيب $\overline{أب}$ طوله ١٠٠سم من منتصفه م بحيث أصبح $\overline{أم}$ عمودياً على $\overline{مب}$ أثرت القوى ١٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، $٣٠\sqrt{٢}$ ث.كجم عند الطرفين أ ، ب كما هو مبين بالشكل المقابل . ماهو مقدار القوة ق التي يجب أن تؤثر عند منتصف $\overline{مب}$ وفي الاتجاه الموضح بالشكل بحيث ينعدم المجموع الجبري لعزوم القوى حول النقطة م ؟



- الحل -

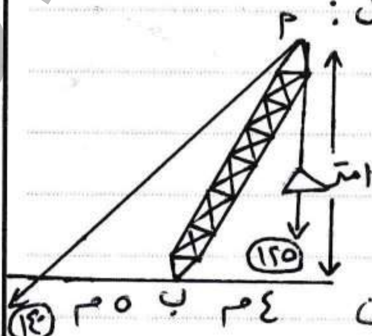
∵ جـم = صفر

∴ $-١٠ \times ٥٠ + ق \times ٢٥ - ٢٠ \times ٥٠ - ٣٠\sqrt{٢} \times \frac{٥٠}{\sqrt{٢}}$ = صفر

∴ $-٥٠٠ + ٢٥ق - ١٠٠٠ - ١٥٠٠$ = صفر

∴ ٢٥ ق = ٣٠٠٠ ∴ ق = ١٢٠ ث.كجم

(٢٠) في الشكل المقابل : $\overline{أب}$ تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد في الخيط يساوي ١٤٠ نيوتن ، ووزن الصندوق ١٢٥ نيوتن أوجد مجموع عزوم القوتين بالنسبة للنقطة ب



- الحل -

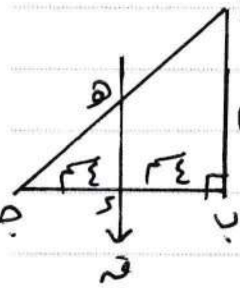
جـب = $-١٢٥ \times ٤ + ١٤٠ \times ٥ \times \frac{١٢}{١٥}$

∴ جـب = ٦٠ نيوتن.متر

(٢١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم أثرت قوة ق في مستوى المثلث بحيث كان جـأ = جـب = ٦٠ نيوتن.سم ، جـجـ = −٦٠ نيوتن.سم

أوجد مقدار ق وعين خط عملها

- الحل -



∵ جـأ = جـب ∴ خط عمل ق // $\overleftrightarrow{أب}$

، ∵ جـب = − جـجـ ∴ خط عمل ق ينصف $\overline{ب جـ}$

، ∵ جـب = ق × ٤ = ٦٠

∴ ق = ١٥ نيوتن وخط عملها يوازي $\overline{أب}$ ويمر بمنتصف $\overline{ب جـ}$ أي تعمل في اتجاه $\overleftarrow{هـ د}$

- تمارين عامة -

(١) إذا كانت ق = س − ٢ص تؤثر في النقطة أ(٢،٣) أوجد:

(١) عزم القوة ق بالنسبة للنقطة ب(١،٢)

(٢) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة (−٣ع ، $\frac{٣\sqrt{٥}}{٥}$)

(٢) القوى ق١ = ٢س − ٣ص ، ق٢ = ٥س + ص ، ق٣ = −٤س + ٧ص تؤثر في النقط أ(١،١) ، ب(−٢،٢) ، جـ(٣،١) على الترتيب . أوجد متجه عزم المحصلة بالنسبة لنقطة الأصل (٨ع)

(٣) قوة ق = ١٢س + ل ص تؤثر في النقطة أ(−٥،٣) وخط عملها ينصف $\overline{ب جـ}$ حيث ب(١،٢) ، جـ(١،٩) أوجد قيمة ل ، بُعد النقطة ب عن خط عمل ق (٥ ، $\frac{٤٤}{١٣}$)

④ تؤثر القوة $\overline{ق}$ في النقطة أ(-٣ ، ٢) فإذا كان عزم $\overline{ق}$ حول كل من النقطتين ب(٣ ، ١) ، جـ(-١ ، ٤) يساوي ٢٨ $\overline{ع}$ أوجد $\overline{ق}$ (٨ $\overline{س}$ - ٦ $\overline{ص}$)

⑤ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٢ متر أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٠ ، ٦√٢ ، ٤√٢ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{د جـ}$ ، $\overleftarrow{أ د}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{ب د}$ على الترتيب . أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول :

① الرأس أ ② هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

③ م نقطة تقاطع القطرين

(صفر ، ٢٦ ، ٦ نيوتن.م)

⑥ أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ٤ ، ٢√٣ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{هـ د}$ على الترتيب ، أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول الرأس و (٢٥√٣ نيوتن.سم)

⑦ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه ق(أ^) = ١٢٠° تؤثر قوى مقاديرها ٤ ، ٤ ، ٤√٣ ث كجم في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ على الترتيب ، اثبت أن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{ب جـ}$ ويوازي $\overleftrightarrow{أ جـ}$

⑧ أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ٨ سم ، ب جـ = ٣٢ سم ، القوى ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث جم تؤثر في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{أ د}$ على الترتيب ، فإذا كان المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول كلٍّ من جـ ، مركز المستطيل يساوي صفر فأوجد قيمة ق ، ك ($\frac{٢٨}{٣}$ ، ٢٤ ث جم)

عزم قوة أو عدة قوى بالنسبة لنقطة فى نظام ثلاثى الأبعاد

•• عزم قوة حول نقطة فى الفراغ :

اذا كانت القوة $\vec{ق} = (ق_س ، ق_ص ، ق_ع)$ تؤثر فى النقطة أ(س، ص، ع) التى متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\vec{ر} = (س ، ص ، ع)$ فإن عزم القوة $\vec{ق}$ حول النقطة و هو $\vec{ج_و} = \vec{ر} \times \vec{ق}$

ومن تعريف الضرب الاتجاهى لمتجهين فى الفراغ

$$\therefore \vec{ج_و} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_س & ق_ص & ق_ع \end{vmatrix}$$

$$= (ص\,ق_ع - ع\,ق_ص)\,\vec{س} + (ع\,ق_س - س\,ق_ع)\,\vec{ص} + (س\,ق_ص - ص\,ق_س)\,\vec{ع}$$

•• ملاحظات :

① طول العمود الساقط من و على خط عمل $\vec{ق} = \dfrac{\|\vec{ج_و}\|}{\|\vec{ق}\|}$

② اذا كانت القوة $\vec{ق}$ تؤثر فى نقطة أ فإن عزم القوة $\vec{ق}$ حول نقطة ب $= \vec{بأ} \times \vec{ق}$

•• مركبات عزم القوة حول المحاور س، ص، ع

① $ج_س = ص\,ق_ع - ع\,ق_ص$ وهى مركبة العزم فى اتجاه محور س

② $ج_ص = ع\,ق_س - س\,ق_ع$ وهى مركبة العزم فى اتجاه محور ص

③ $ج_ع = س\,ق_ص - ص\,ق_س$ وهى مركبة العزم فى اتجاه محور ع

•• ملاحظات : ينعدم عزم قوة حول محور

① اذا اشترك خط عمل القوة مع المحور

② اذا كانت القوة توازى المحور

- أمثلة محلولة -

① اذا كان $\vec{ق} = ٤\,\vec{س} + ٥\,\vec{ص} - ٣\,\vec{ع}$ تؤثر فى النقطة أ(٢، −٣، ٤) أوجد عزم هذه القوة حول نقطة الأصل

- الحل -

$\vec{ر} = أ - و = (٢ ، -٣ ، ٤)$

$$\therefore \vec{ج_و} = \vec{ر} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & -٣ & ٤ \\ ٤ & ٥ & -٣ \end{vmatrix}$$

$$= (٩ - ٢٠)\,\vec{س} - (-٦ - ١٦)\,\vec{ص} + (١٠ + ١٢)\,\vec{ع}$$

$$= -١١\,\vec{س} + ٢٢\,\vec{ص} + ٢٢\,\vec{ع}$$

② اذا كانت القوة $\vec{ق} = ٣\,\vec{س} - ٤\,\vec{ص} - ١٢\,\vec{ع}$ تؤثر فى نقطة أ = (−١، ٢، ١) أوجد :

① عزم القوة $\vec{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل

② طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل $\vec{ق}$

- الحل -

$\vec{ر} = أ - و = (-١ ، ٢ ، ١)$

$$\therefore \vec{ج_و} = \vec{ر} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ & -١٢ \end{vmatrix}$$

$$= (-٢٤ + ٤)\,\vec{س} - (١٢ - ٣)\,\vec{ص} + (٤ - ٦)\,\vec{ع}$$

$$= -٢٠\,\vec{س} - ٩\,\vec{ص} - ٢\,\vec{ع}$$

طول العمود من نقطة الأصل

ل = ||ج_و|| / ||ق|| = √(٤٠٠ + ٨١ + ٤) / √(٩ + ١٦ + ١٤٤)

∴ ل = √٤٨٥ / ١٣ وحدة طول

(٣) إذا أثرت القوة ق = ٢س - ص + ٥ع في النقطة أ = (١، ٠، -٣) احسب عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب التي متجه موضعها ص + ٣ع

-الحل-

ب أ = أ - ب = (١، ٠، -٣) - (٠، ١، ٣)

∴ ب أ = ر = (١، -١، -٦)

∴ ج_ب = ر × ق =
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

= -١١س - ١٧ص + ع

(٤) قوة ق = ١٥س - ٢٥ص + ٤٠ع تؤثر في نقطة أ(-٣، -٣، ٢) أوجد مركبة عزم ق حول محور ص

-الحل-

ج_ص = ع ق_س - س ق_ع

= ٢ × ١٥ + ٣ × ٤٠ = ١٥٠

(٥) إذا كانت ق = ٢س + ل ص - ع تؤثر في النقطة أ(٤، -٢، ٠) وكان عزم ق حول نقطة الأصل يساوي ٢س + ٤ص + ١٦ع فما قيمة ل

-الحل-

∴ ج_و = و أ × ق = ر × ق

= (٤، -٢، ٠) × (٢، ل، -١)

∴ ج_و =
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & \text{ل} & -1 \end{vmatrix}$$

= ٢س + ٤ص + (٤ل + ٤)ع

∴ ج_و = ٢س + ٤ص + ١٦ع

∴ ٤ل + ٤ = ١٦ ∴ ٤ل = ١٢

∴ ل = ٣

(٦) إذا كانت س، ص، ع مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة ق = ٣س + ل ص + ٤ع تؤثر في النقطة أ(١، ٠، -١) وكان عزم القوة ق بالنسبة للنقطة ب(٢، -١، ٣) يساوي -٤س - ٨ص - ع فما قيمة ل

-الحل-

∴ ر = ب أ = أ - ب = (-١، ١، -٤)

∴ ج_ب = ر × ق =
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & \text{ل} & 4 \end{vmatrix}$$

= (٤ + ٤ل)س - ٨ص + (-ل - ٣)ع

∴ ج_ب = -٤س - ٨ص - ع

∴ ٤ + ٤ل = -٤ ∴ ٤ل = -٨

∴ ل = -٢

(٧) إذا كان عزم القوة ق = ٢س + ٢ص - ع حول نقطة الأصل و هو ج_و = -٥س + ٣ص - ع ، إذا كانت القوة تمر بنقطة احداثي ص لها يساوي ٢ أوجد الاحداثيين س، ع للنقطة وكذلك طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة .

- الحل -

نفرض أن نقطة تأثير القوة هي $(\text{س} ، ٢ ، \text{ع})$

$\therefore \vec{\text{ر}} = (\text{س} ، ٢ ، \text{ع}) - (٠ ، ٠ ، ٠)$

$\therefore \vec{\text{ر}} = (\text{س} ، ٢ ، \text{ع})$

$$\therefore \vec{\text{ج}}_{\text{و}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ \text{س} & ٢ & \text{ع} \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= (-٢ - ٣\text{ع})\,\hat{\text{س}} - (-\text{س} - ٢\text{ع})\,\hat{\text{ص}} + (٣\text{س} - ٤)\,\hat{\text{ع}}$$

$\because \vec{\text{ج}}_{\text{و}} = -٥\,\hat{\text{س}} + ٣\,\hat{\text{ص}} - \hat{\text{ع}}$

$\therefore -٢ - ٣\text{ع} = -٥ \quad \therefore -٣\text{ع} = -٣$

$\therefore \text{ع} = ١$

، $٣\text{س} - ٤ = -١ \quad \therefore ٣\text{س} = ٣$

$\therefore \text{س} = ١$

$\therefore$ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل

$$\text{ل} = \frac{\|\vec{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\vec{\text{ق}}\|} = \frac{\sqrt{٢٥ + ٩ + ١}}{\sqrt{٤ + ٩ + ١}}$$

$\therefore \text{ل} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$ وحدة طول

⑧ قوة $\vec{\text{ق}}$ تؤثر في النقطة أ حيث أ $= (٢ ، -١ ، ٣)$ فإذا كان $\text{ق}_{\text{ع}} = ٥$ وكان عزم $\vec{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوي $٢١\,\hat{\text{ص}} + ٧\,\hat{\text{ع}}$ أوجد $\vec{\text{ق}}$

- الحل -

$\because \vec{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{و أ}} = \text{أ} - \text{و} = (٢ ، -١ ، ٣)$

$$\therefore \vec{\text{ج}}_{\text{و}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ ٢ & -١ & ٣ \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= (-٥ - ٣\text{ق}_{\text{ص}})\,\hat{\text{س}} - (١٠ - ٣\text{ق}_{\text{س}})\,\hat{\text{ص}} + (٢\text{ق}_{\text{ص}} + \text{ق}_{\text{س}})\,\hat{\text{ع}}$$

، $\because \vec{\text{ج}}_{\text{و}} = ٢١\,\hat{\text{ص}} + ٧\,\hat{\text{ع}}$

$\therefore -٥ - ٣\text{ق}_{\text{ص}} = \text{صفر} \quad \therefore \text{ق}_{\text{ص}} = \frac{-٥}{٣}$

، $٢\text{ق}_{\text{ص}} + \text{ق}_{\text{س}} = ٧ \quad \therefore \frac{-١٠}{٣} + \text{ق}_{\text{س}} = ٧$

$\therefore \text{ق}_{\text{س}} = ٧ + \frac{١٠}{٣} = \frac{٣١}{٣}$

$\therefore \vec{\text{ق}} = \left(\frac{٣١}{٣} ، \frac{-٥}{٣} ، ٥\right)$

⑨ اذا كانت القوة $\vec{\text{ق}} = \text{ل}\,\hat{\text{س}} + \text{م}\,\hat{\text{ص}} - ٢\,\hat{\text{ع}}$ تؤثر في نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\vec{\text{ر}} = (٣ ، ١ ، ١)$ فإذا كانت مركبتا عزم $\vec{\text{ق}}$ حول المحورين س ، ص هما $-١ ، -٨$ على الترتيب أوجد قيمة كل من ل ، م

- الحل -

$\because \text{ج}_{\text{س}} = \text{ص}\,\text{ق}_{\text{ع}} - \text{ع}\,\text{ق}_{\text{ص}}$

$\therefore -١ = ١ \times -٢ - ١ \times \text{م}$

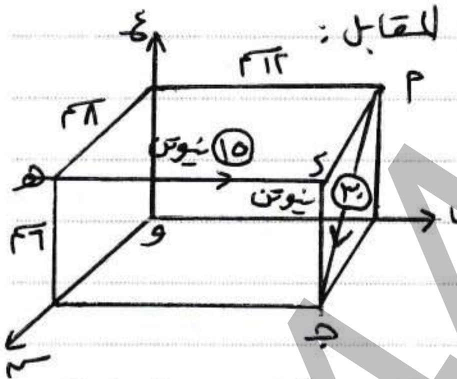
$\therefore -١ = -٢ - \text{م} \quad \therefore \text{م} = -١$

، $\because \text{ج}_{\text{ص}} = \text{ع}\,\text{ق}_{\text{س}} - \text{س}\,\text{ق}_{\text{ع}}$

$\therefore -٨ = ١ \times \text{ل} - ٣ \times -٢$

$\therefore -٨ = \text{ل} + ٦ \quad \therefore \text{ل} = -١٤$

(١٠) فى الشكل المقابل :



أوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

- الحل -

من هندسة الشكل

هـ د→ = د − هـ = (٨، ١٢، ٦) − (٨، ٠، ٦)

∴ هـ د→ = (٠، ١٢، ٠)

∴ ق١→ = ١٥ × هـ د→ / ‖هـ د‖ = ١٥ × (٠، ١٢، ٠) / √(٠ + ١٤٤ + ٠)

∴ ق١→ = (٠، ١٥، ٠)

، م جـ→ = جـ − م = (٨، ١٢، ٠) − (٠، ١٢، ٦)

∴ م جـ→ = (٨، ٠، −٦)

∴ ق٢→ = ٣٠ × م جـ→ / ‖م جـ‖ = ٣٠ × (٨، ٠، −٦) / √(٦٤ + ٠ + ٣٦)

∴ ق٢→ = (٢٤، ٠، −١٨)

∴ ج و→ = و هـ→ × ق١→ + و م→ × ق٢→

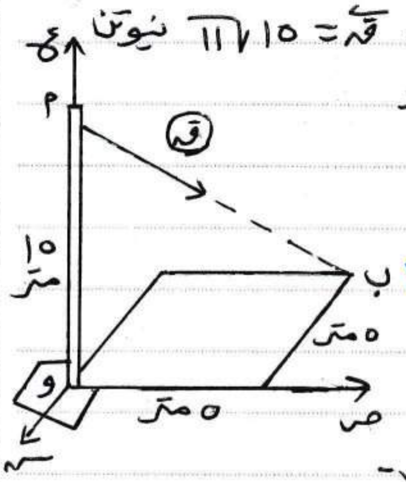
س	ص	ع		س	ص	ع
٨	٠	٦	+	٠	١٢	٦
٠	١٥	٠		٢٤	٠	−١٨

= −٩٠ س + ١٢٠ ع − ٢١٦ س + ١٤٤ ص − ٢٨٨ ع

= −٣٠٦ س + ١٤٤ ص − ١٦٨ ع

(١١) فى الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة ق→ = ١٥√١١ نيوتن حول نقطة و



- الحل -

من هندسة الشكل :

م = (٠، ٠، ١٥) ، ب = (−٥، ٥، ٠)

∴ م ب→ = ب − م = (−٥، ٥، −١٥)

∴ ق→ = ق × م ب→ / ‖م ب‖

∴ ق→ = ١٥√١١ × (−٥، ٥، −١٥) / √(٢٥ + ٢٥ + ٢٢٥)

∴ ق→ = (−١٥، ١٥، −٤٥)

∴ ج و→ = و م→ × ق→

= (٠، ٠، ١٥) × (−١٥، ١٥، −٤٥)

∴ ج و→ =

س	ص	ع
٠	٠	١٥
−١٥	١٥	−٤٥

∴ ج و→ = −٢٢٥ س + ٢٢٥ ص

- تمارين عامة -

① اذا كانت $\overrightarrow{ق} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$ تؤثر في النقطة أ حيث أ = (٢، ٥، ٦) احسب عزم هذه القوة حول نقطة الأصل و

② أوجد عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل حيث $\overrightarrow{ق} = -٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ وتؤثر في نقطة أ متجه موضعها حول نقطة الأصل هو $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$
$(٢\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع} ، \frac{\sqrt{٧٤١}}{١٩})$

③ اذا كانت $\overrightarrow{س}$، $\overrightarrow{ص}$، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ تؤثر في نقطة أ = (١، -١، ٤) أوجد

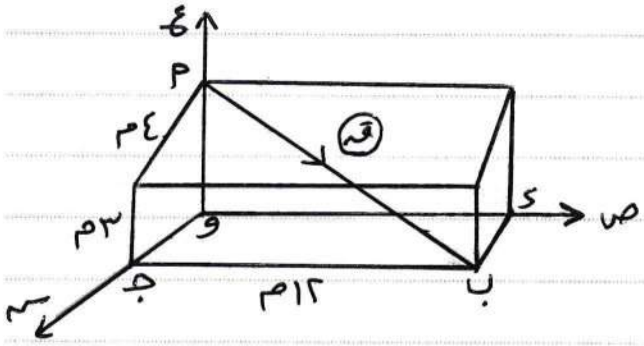
① عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) $(-١١\overrightarrow{س} + ٩\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع})$

② عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة ب حيث ب = (٢، -٣، ١) $(-١١\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع})$
ثم طول العمود المرسوم من نقطة ب على خط عمل القوة (٣,٧٣ وحدة طول)

④ اذا كانت $\overrightarrow{ق} = ٥\overrightarrow{س} + ل\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ تؤثر في النقطة أ (١، -٢، ٣) وكان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب حيث ب = (-٢، ٢، ٤) يساوي $-٥\overrightarrow{س} + ٩\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع}$ فما قيمة ل (-٩)

⑤ اذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ تؤثر في النقطة أ (-١، ٣، -٢) وكانت مركبة عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور س يساوي -٣ وحدات عزم. أوجد قيمة ب. ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة
$(-٣ ، \frac{٣\sqrt{٤٢}}{١٤}$ وحدة طول)

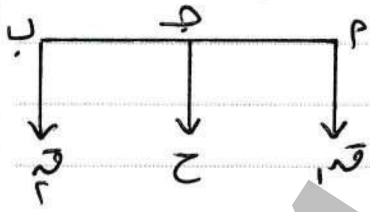
⑥ في الشكل المقابل:



قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في القطر $\overline{أب}$ في متوازي مستطيلات أبعاده ٣م ، ٤م ، ١٢م كما بالشكل أوجد عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة د
$(١٢٠\overrightarrow{ص} + ٤٨٠\overrightarrow{ع})$

محصلة القوى المتوازية المستوية

(١) القوتان متحدتا الاتجاه:



تتعين المحصلة تعيناً تاماً كما يلي:

مقدار المحصلة $ح = ق_1 + ق_2$

اتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوتين

نقطة تأثير المحصلة ج تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بحيث

$ق_1 \times أج = ق_2 \times ب ج$

أو

$$\frac{ق_1}{ب ج} = \frac{ق_2}{أ ج} = \frac{ح}{أ ب}$$

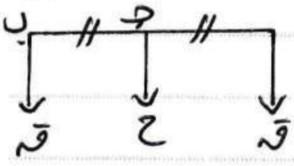
•• ملاحظة:

اذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متساويتين في المقدار ومقدار كل منهما يساوي ق فإن

مقدار المحصلة $ح = ٢ق$

اتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوتين

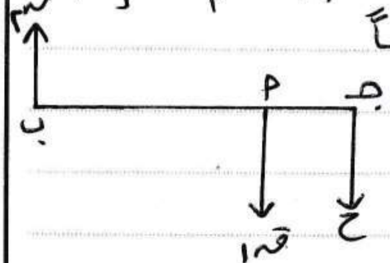
نقطة تأثير المحصلة ج منتصف $\overline{أب}$



(٢) القوتان متضادتان في الاتجاه

بفرض أن $ق_1 > ق_2$ فإن

تتعين المحصلة تعيناً تاماً كما يلي:



مقدار المحصلة $ح = ق_1 - ق_2$

اتجاه المحصلة في اتجاه القوة الأكبر $ق_1$

نقطة تأثير المحصلة ج تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بحيث $ق_1 \times أج = ق_2 \times ب ج$

أو

$$\frac{ق_1}{ب ج} = \frac{ق_2}{أ ج} = \frac{ح}{أ ب}$$

•• عزوم القوى المتوازية:

نظرية: المجموع الجبري لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول نقطة في مستويها يساوي عزم محصلتها حول نفس النقطة

أي أن

$ج_م$ للقوى = $ج_م$ للمحصلة

•• محصلة عدة قوى متوازية مستوية:

اذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، --- ، $\overrightarrow{ق_ن}$ عدة قوى متوازية مستوية فإن:

(١) لتعيين مقدار واتجاه المحصلة نستخدم العلاقة

$$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \dots + \overrightarrow{ق_ن}$$

(٢) لتعيين نقطة تأثير المحصلة نستخدم نظرية العزوم

ملاحظة: اذا كان $\overrightarrow{ق_1} \parallel \overrightarrow{ق_2}$ فإن $\overrightarrow{ق_1} = ل \, \overrightarrow{ق_2}$ حيث ل ثابت $\neq$ صفر

ويكون

•• $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ في اتجاه واحد اذا كان ل > صفر

•• $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ في اتجاهين متضادين اذا كان ل < صفر

•• معلومة للطلاب فقط:

اذا كانت $ق_1$، $ق_2$، ...، $ق_ن$ هي القياسات الجبرية لعدة قوى متوازية تؤثر في النقط $أ_1(س_1، ص_1)$، $أ_2(س_2، ص_2)$، ...، $أ_ن(س_ن، ص_ن)$ على الترتيب فإن القياس الجبري للمحصلة $ح = ق_1 + ق_2 + ... + ق_ن$ وتؤثر المحصلة في نقطة ب(س، ص) وباستخدام مبدأ ونظرية العزوم نجد أن

$$س = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر س_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر} ،$$

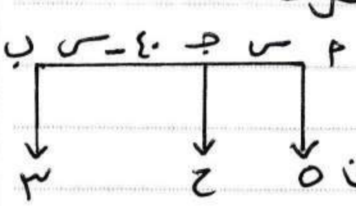
$$ص = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر ص_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر}$$

- أمثلة محلولة -

(1) اذا كانت $ق_1$، $ق_2$ هما مقدارا قوتين متوازيتين وفي اتجاه واحد تؤثران في نقطتين أ، ب من جسم متماسك، عين محصلتهما اذا كانت

(1) $ق_1 = ٥$ نيوتن، $ق_2 = ٣$ نيوتن، أب = ٤٠ سم

- الحل -



$ح = ق_1 + ق_2$

∴ ح = ٥ + ٣ = ٨ نيوتن

، $ق_1 \times$ أ جـ $= ق_2 \times$ ب جـ

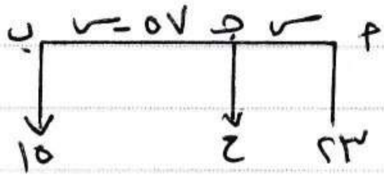
∴ ٥ س = ٣ × (٤٠ − س)

∴ ٥ س = ١٢٠ − ٣ س ∴ ٨ س = ١٢٠

∴ س = ١٥ ∴ المحصلة تبعد ١٥ سم عن النقطة أ

(2) $ق_1 = ٢٣$ نيوتن، $ق_2 = ١٥$ نيوتن، أب = ٥٧ سم

- الحل -



$ح = ق_1 + ق_2$

∴ ح = ٢٣ + ١٥

∴ ح = ٣٨ نيوتن

، $ق_1 \times$ أ جـ $= ق_2 \times$ ب جـ

∴ ٢٣ × س = ١٥ × (٥٧ − س)

∴ ٢٣ س = ٨٥٥ − ١٥ س

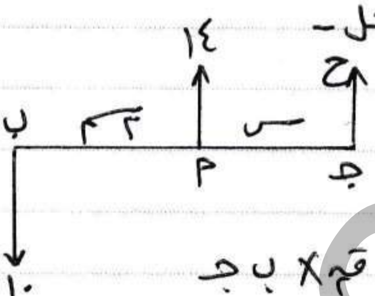
∴ ٣٨ س = ٨٥٥ ∴ س = ٢٢,٥

∴ المحصلة تبعد ٢٢,٥ سم من أ

(2) اذا كانت $ق_1$، $ق_2$ هما مقدارا قوتين متوازيتين وفي اتجاهين متضادين تؤثران في نقطتين أ، ب من جسم متماسك عين محصلتهما اذا كانت:

(1) $ق_1 = ١٤$ نيوتن، $ق_2 = ١٠$ نيوتن، أب = ٢ سم

- الحل -



$ح = ق_1 - ق_2$

∴ ح = ١٤ − ١٠

∴ ح = ٤ نيوتن

، $ق_1 \times$ أ جـ $= ق_2 \times$ ب جـ

∴ ١٤ × س = ١٠ × (س + ٢)

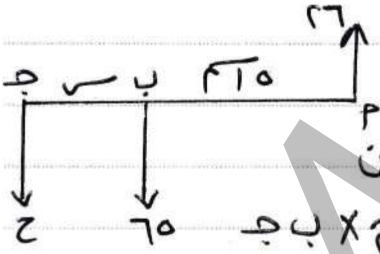
∴ ١٤ س = ١٠ س + ٢٠

∴ ٤ س = ٢٠ ∴ س = ٥

∴ المحصلة تبعد ٥ سم عن النقطة أ

② ق٢ = ٢٦ نيوتن ، ق٢ = ٦٥ نيوتن ، أب = ١٥ سم

- الحل -



ح = ق٢ − ق١

∴ ح = ٦٥ − ٢٦

∴ ح = ٣٩ نيوتن

، ق١ × أجـ = ق٢ × ب جـ

∴ ٢٦ × (١٥ + س) = ٦٥ × س

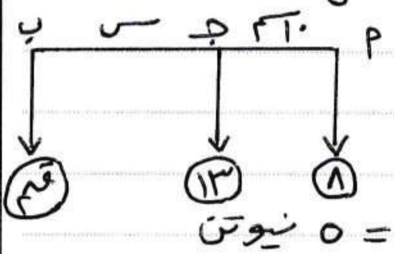
∴ ٣٩٠ + ٢٦ س = ٦٥ س

∴ ٣٩ س = ٣٩٠ ∴ س = ١٠

∴ المحصلة تبعد ١٠ سم عن النقطة ب

③ إذا كان ق١ ، ق٢ قوتين متوازيتين في نفس الاتجاه وتؤثران في النقطتين أ ، ب وكانت محصلتهما ح تؤثر في نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ أوجد ق٢ ، أب إذا كان ق١ = ٨ نيوتن ، ح = ١٣ نيوتن ، أجـ = ١٠ سم

- الحل -



∵ ح = ق١ + ق٢

∴ ١٣ = ٨ + ق٢

∴ ق٢ = ١٣ − ٨ = ٥ نيوتن

، ق١ × أجـ = ق٢ × ب جـ

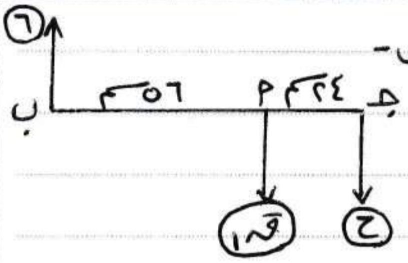
∴ ٨ × ١٠ = ٥ × س

∴ ٥ س = ٨٠ ∴ س = ١٦

∴ أب = ١٠ + ١٦ = ٢٦ سم

④ إذا كان ق١ ، ق٢ قوتين متوازيتين متضادتين في الاتجاه وتؤثران في النقطتين أ ، ب وكانت محصلتهما تؤثر في نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ أوجد ق١ ، ح إذا كان ق٢ = ٦ نيوتن ، أجـ = ٢٤ سم ، جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ ، أب = ٥٦ سم

- الحل -



∴ ق١ × أجـ = ق٢ × ب جـ

∴ ق١ × ٢٤ = ٦ × ٨٠

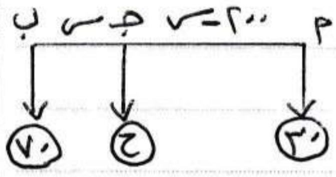
∴ ق١ = ٢٠ نيوتن

، ح = ق١ − ق٢ = ٢٠ − ٦ = ١٤ نيوتن

⑤ قوتان متوازيتان مقدارهما ٣٠ ، ٧٠ نيوتن تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث أب = ٢٠٠ سم أوجد محصلة القوتين ولتحديد نقطة تأثيرها عن أ إذا كانت القوتين ① في اتجاه واحد ② في اتجاهين متضادين

- الحل -

① في اتجاه واحد :



∵ ح = ق١ + ق٢

∴ ح = ٣٠ + ٧٠

∴ ح = ١٠٠ نيوتن

، ٣٠ × أجـ = ٧٠ × ب جـ

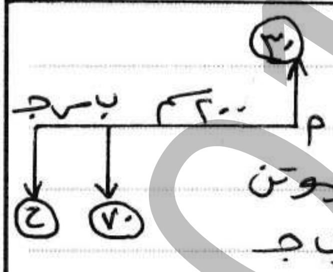
∴ ٣٠ (٢٠٠ − س) = ٧٠ × س

∴ ٦٠٠٠ − ٣٠ س = ٧٠ س

∴ ١٠٠ س = ٦٠٠٠ ∴ س = ٦٠

∴ المحصلة تبعد ١٤٠ سم عن أ

② في اتجاهين متضادين



∵ ح = ق٢ − ق١

∴ ح = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠ نيوتن

، ٣٠ × أجـ = ٧٠ × ب جـ

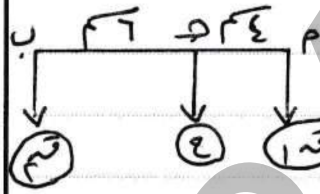
∴ ٣٠ × (٢٠٠ + س) = ٧٠ × س

∴ ٦٠٠٠ + ٣٠ س = ٧٠ س ∴ س = ١٥٠

∴ المحصلة تبعد عن أ مسافة ٣٥٠ سم

(٦) قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدار محصلتهما ٢٥ نيوتن وتؤثر في نقطة تبعد ٤سم عن القوة الأولى و٦سم عن القوة الثانية ، أوجد القوتين

-الحل-



∵ ح = ق١ + ق٢

∴ ق١ + ق٢ = ٢٥ (١)

∵ ق١ × أجـ = ق٢ × ب جـ

∴ ق١ × ٤ = ق٢ × ٦

∴ ٤ ق١ − ٦ ق٢ = صفر (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن

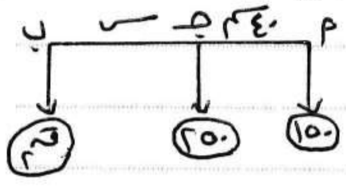
ق١ = ١٥ نيوتن ، ق٢ = ١٠ نيوتن

(٧) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن وإحدى القوتين مقدارها ١٥٠ نيوتن وخط عملها يبعد ٤٠سم عن خط عمل المحصلة . أوجد القوة الثانية وكذلك البعد بين القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

(١) في اتجاه واحد (٢) في اتجاهين متضادين

-الحل-

(١) في اتجاه واحد :



∵ ح = ق١ + ق٢

∴ ٢٥٠ = ١٥٠ + ق٢

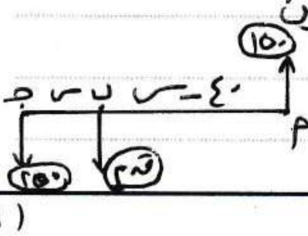
∴ ق٢ = ٢٥٠ − ١٥٠ = ١٠٠ نيوتن

∵ ١٥٠ × ٤٠ = ١٠٠ × س

∴ س = ٦٠ ∴ ب جـ = ٦٠سم

∴ البعد بين القوتين = ١٠٠سم

(٢) في اتجاهين متضادين



∵ ح = ق٢ − ق١

∴ ٢٥٠ = ق٢ − ١٥٠

∴ ق٢ = ٤٠٠ نيوتن

∵ ١٥٠ × ٤٠ = ٤٠٠ × س

∴ س = ١٥ ∴ ب جـ = ١٥سم

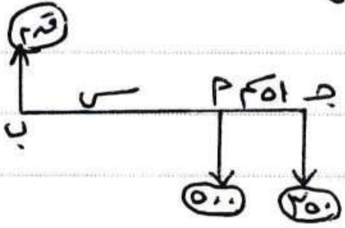
∴ البعد بين القوتين = ٢٥سم

(٨) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بُعد ٥١سم من المحصلة أوجد القوة الثانية والبعد بين خطي عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

(١) في اتجاه واحد (٢) في اتجاهين متضادين

-الحل-

(١) في اتجاه واحد :



∵ ح = ق١ − ق٢

∴ ٣٥٠ = ٥٠٠ − ق٢

∴ ق٢ = ٥٠٠ − ٣٥٠ = ١٥٠ نيوتن

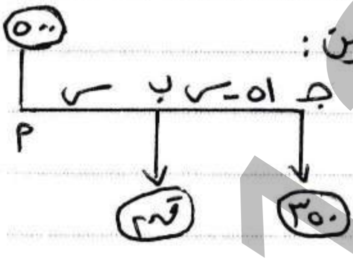
∵ ٥٠٠ × ٥١ = ١٥٠ × (٥١ + س)

∴ ٥٠٠ × ٥١ = ١٥٠ × ٥١ + ١٥٠ × س

∴ س = ١١٩

∴ البعد بين القوتين = ١١٩سم

(٢) في اتجاهين متضادين :



∵ ح = ق٢ − ق١

∴ ٣٥٠ = ق٢ − ٥٠٠

∴ ق٢ = ٨٥٠ نيوتن

∵ ٥٠٠ × ٥١ = ٨٥٠ × (٥١ − س)

∴ ٥٠٠ × ٥١ = ٨٥٠ × ٥١ − ٨٥٠ × س

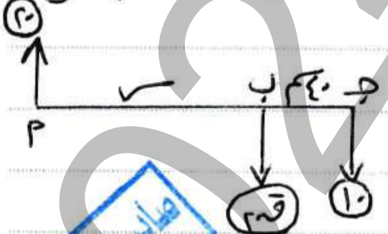
∴ س = ٢١

∴ البعد بين القوتين = ٢١سم

(٩) قوتان متوازيتان تؤثران في نقطتين أ، ب أصغرهما عند أ مقدارها ٢٠ ث كجم والثانية عند ب فإذا كانت محصلتهما = ١٠ ث كجم ويبعد خط عملها عن نقطة ب مسافة ٤٠ سم فأوجد طول $\overline{أب}$ ومقدار القوة الكبرى

- الحل -

∵ ح < ق٢ ∴ القوتان في اتجاهين متضادين



∴ ح = ق٢ − ق١

∴ ١٠ = ق٢ − ٢٠

∴ ق٢ = ١٠ + ٢٠

∴ ق٢ = ٣٠ ث كجم

∵ ٢٠ × (٤٠ + س) = ٣٠ × ٤٠

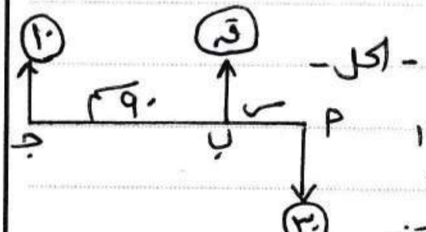
∴ ٨٠٠ + ٢٠ س = ١٢٠٠

∴ س = ٢٠

∴ طول $\overline{أب}$ = ٢٠ سم

(١٠) قوتان متوازيتان أصغرهما ٣٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{أب}$ والكبرى تؤثر في الطرف ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم فما طول $\overline{أب}$

- الحل -



∵ ح = ق٢ − ق١

∴ ١٠ = ق٢ − ٣٠

∴ ق٢ = ٤٠ نيوتن

∵ ٤٠ × ٩٠ = ٣٠ (س + ٩٠)

∴ ٤٠ × ٩٠ = ٣٠ س + ٣٠ × ٩٠

∴ س = ٣٠

∴ طول $\overline{أب}$ = ٣٠ سم

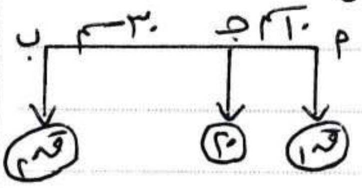
(١١) قوتان متوازيتان تؤثران في نقطتين أ، ب فإذا كان مقدار محصلتهما = ٢٠ نيوتن وتؤثر في نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أب = ٤٠ سم، أجـ = ١٠ سم. أوجد مقدار كل من القوتين:

(١) إذا كانت في اتجاه واحد

(٢) إذا كانت في اتجاهين متضادين

- الحل -

(١) في اتجاه واحد:



∵ ح = ق١ + ق٢

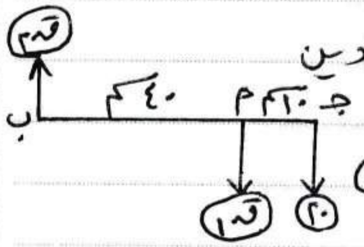
∴ ق١ + ق٢ = ٢٠ (١)

∵ ق١ × ١٠ = ق٢ × ٣٠ ÷ ١٠

∴ ق١ = ٣ ق٢ (٢) من (١)، (٢)

∴ ق١ = ١٥ نيوتن ، ق٢ = ٥ نيوتن

(٢) في اتجاهين متضادين



∵ ح = ق١ − ق٢

∴ ق١ − ق٢ = ٢٠ (١)

∵ ق١ × ١٠ = ق٢ × ٥٠ ÷ ١٠

∴ ق١ = ٥ ق٢ (٢) من (١)، (٢)

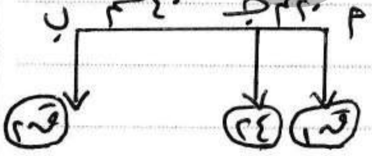
∴ ق١ = ٢٥ نيوتن ، ق٢ = ٥ نيوتن

(١٢) أ، ب، جـ ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث أب = ٦٠ سم، ب جـ = ٤٠ سم، أثرت قوتان متوازيتان في النقطتين أ، ب فإذا كان مقدار محصلتهما = ٢٤ نيوتن وتؤثر في نقطة جـ فأوجد مقدار كل من القوتين.

- الحل -

يوجد حالتان

(١) جـ ∈ $\overline{أب}$



∵ ح = ق٢ + ق١　∴ ق١ + ق٢ = ٢٤ (١)

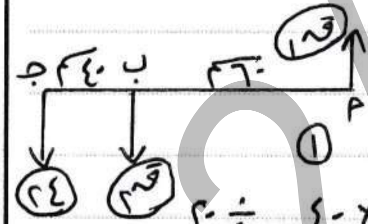
، ق١ × ٢٠ = ق٢ × ٤٠

∴ ق١ = ٢ ق٢ (٢)

من (١) ، (٢) فإن

ق١ = ١٦ نيوتن ، ق٢ = ٨ نيوتن

(٢) جـ ∉ أب



∵ ح = ق٢ − ق١

∴ ق٢ − ق١ = ٢٤ (١)

، ق١ × ١٠٠ = ق٢ × ٤٠　÷ ٢٠

∴ ٥ ق١ = ٢ ق٢　∴ ٢ ق٢ − ٥ ق١ = صفر (٢)

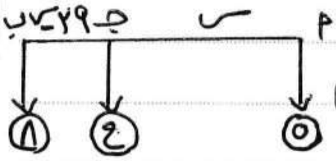
من (١) ، (٢)

∴ ق١ = ١٦ نيوتن ، ق٢ = ٤٠ نيوتن

(١٣) قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث أب = ٣٩ سم ، إذا أضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ق في نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ وحدات ، أوجد ق

- الحل -

أولاً : قبل إضافة القوة



∵ ح = ٥ + ٨ = ١٣

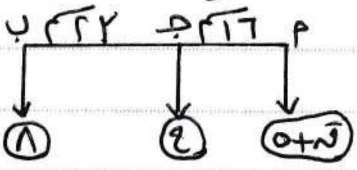
، ٥ × س = ٨ × (٣٩ − س)

∴ ٥ س = ٨ × ٣٩ − ٨ س

∴ س = ٢٤ سم

ثانياً : بعد إضافة القوة ق

∵ المحصلة تتحرك ٨ وحدات



∴ أجـ = ٢٤ − ٨ = ١٦ سم ، جـ ب = ٢٣ سم

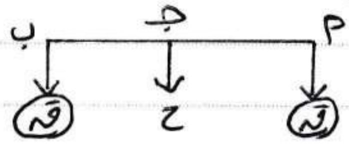
∴ (ق + ٥) × ١٦ = ٨ × ٢٣

∴ ١٦ ق + ٨٠ = ١٨٤　∴ ق = ٦٫٥ نيوتن

(١٤) قوتان متوازيتان وفي اتجاه واحد مقدارهما ق ، ق تؤثران في النقطتين أ ، ب فإذا تحركت إحداهما موازية لنفسها مسافة قدرها س على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ فاثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{1}{2}$ س في نفس الاتجاه

- الحل -

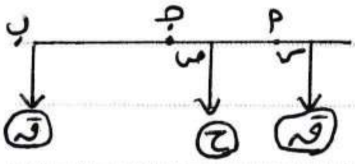
(١) قبل التحرك :



ق × أجـ = ق × ب جـ

∴ أجـ = ب جـ

(٢) بعد التحرك :



صابر عبد الرحيم محمود

ق (س + أجـ − ص) = ق (ب جـ + ص)

∴ س + أجـ − ص = ب جـ + ص

∵ أجـ = ب جـ

∴ س − ص = ص

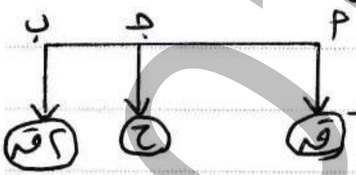
∴ س = ٢ ص　∴ ص = $\frac{1}{2}$ س

∴ المحصلة تتحرك مسافة = $\frac{1}{2}$ س

(١٥) قوتان متوازيتان وفي نفس الاتجاه مقدارهما ق ، ٢ق تؤثران في نقطتين أ ، ب إذا تحركت القوة ٢ق موازية لنفسها في اتجاه $\overleftarrow{أب}$ مسافة س سم . اثبت أن محصلة القوتين تتحرك في نفس الاتجاه مسافة قدرها $\frac{2}{3}$ س

- الحل -

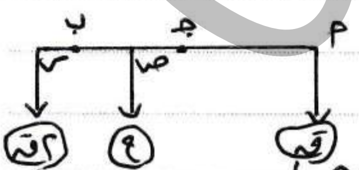
قبل التحرك :



ق × أجـ = ٢ق × ب جـ

∴ أجـ = ٢ ب جـ (١)

بعد التحرك :



ق × (أجـ + ص) = ٢ق × (س + ب جـ − ص)

∵ $أجـ + ص = ٢س + ٢ب جـ - ٢ص$

∵ $أجـ = ٢ب جـ$

∴ $ص = ٢س - ٢ص$

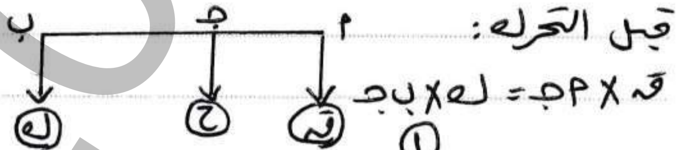
∴ $٣ص = ٢س$ ∴ $ص = \frac{٢}{٣} س$

∴ المحصلة تتحرك مسافة قدرها $= \frac{٢}{٣} س$

(١٦) قوتان متوازيتان وفي اتجاه واحد مقدارهما ق ، ك تؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب ، فإذا تحركت القوة ق موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overrightarrow{أب}$ فأثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{ق}{ق+ك} \times س$ في نفس الاتجاه

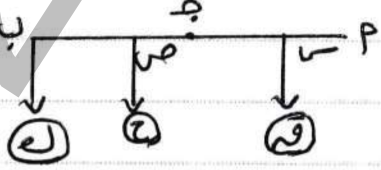
- الحل -

قبل التحرك :



$ق \times أجـ = ك \times ب جـ$ (١)

بعد التحرك



$ق (أجـ - س + ص) = ك (ب جـ - ص)$

∴ $ق أجـ - ق س + ق ص = ك ب جـ - ك ص$ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢)

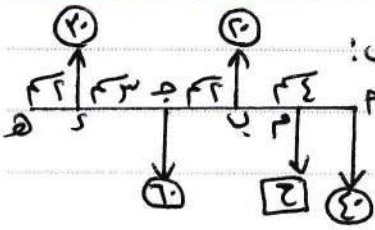
$- ق س + ق ص = - ك ص$

∴ $ق س = ق ص + ك ص$

∴ $ق س = ص (ق + ك)$

∴ $ص = \frac{ق}{ق+ك} \times س$

(١٧) في الشكل المقابل :



أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة

- الحل -

نفرض أن المحصلة ح وتؤثر في نقطة م ولأسفل

∴ $ح = ٤٠ + ٦٠ - ٢٠ - ٣٠ = ٥٠$ نيوتن

∵ جـ للقوى = جـ م للمحصلة

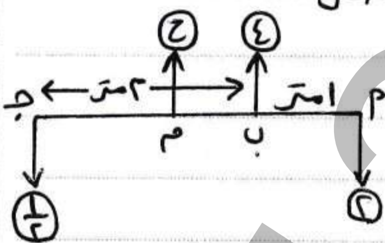
∴ $٦٠ \times ٦ - ٢٠ \times ٤ - ٣٠ \times ٩ = ٥٠ \times أم$

∴ $أم = ٠,٢$ سم

∴ المحصلة تبعد ٠,٢ سم عن النقطة أ

(١٨) أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقي حيث أب = ١ متر ، أجـ = ٣ متر ، ب ∈ $\overline{أجـ}$. أثرت القوى التي مقاديرها ٢ ، $\frac{١}{٢}$ نيوتن رأسياً لأسفل في النقطتين أ ، جـ على الترتيب كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن في نقطة ب رأسياً لأعلى ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبُعد نقطة تأثيرها عن نقطة أ

- الحل -



$ح = ٤ - ٢ - \frac{١}{٢}$

∴ $ح = ١,٥$ نيوتن

∵ جـ م للقوى = جـ م للمحصلة

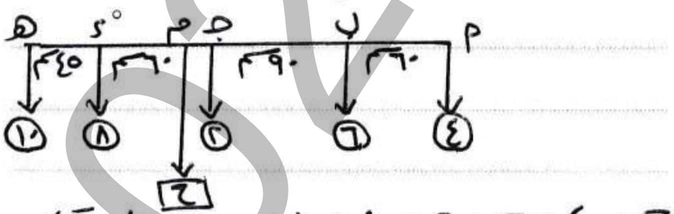
∴ $-٤ \times ١ + \frac{١}{٢} \times ٣ = -١,٥ \times أم$

∴ $أم = \frac{٥}{٣}$ متر

∴ المحصلة تبعد مسافة قدرها $\frac{٥}{٣}$ متر عن النقطة أ

(١٩) خمس قوى متوازية متحدة الاتجاه مقاديرها ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٨ ، ١٠ نيوتن تؤثر في النقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ الواقعة على خط مستقيم واحد عمودي على اتجاه القوى . أوجد بُعد نقطة تأثير محصلة هذه القوى عن أ علماً بأن أب = جـ د = ٦٠ سم ، ب جـ = ٢ د هـ = ٩٠ سم

- الحل -



ح = ٤ + ٦ + ٢ + ٨ + ١٠ = ٣٠ نيوتن

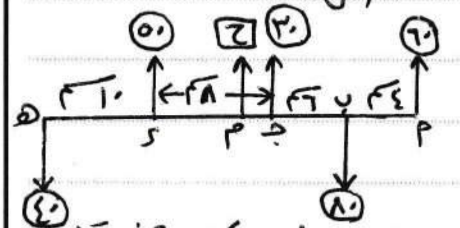
∵ جـم للقوى = جـم للمحصلة

∴ ٦ × ٦٠ + ٢ × ١٥٠ + ٨ × ٢١٠ + ١٠ × ٢٥٥ = ٣٠ × أم

∴ أم = ١٦٣ سم

(٢٠) أ ، ب ، جـ ، د ، هـ تقع على خط مستقيم واحد بحيث أب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ جـ د = ٨ سم ، د هـ = ١٠ سم . أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث كجم في النقط أ ، جـ ، د ، ب ، هـ على الترتيب وفي اتجاه عمودي على $\overleftrightarrow{أهـ}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه ، والقوتان الأخريان في الاتجاه المضاد عين محصلة هذه القوى

- الحل -



∴ ح = ٦٠ + ٣٠ + ٥٠ − ٨٠ − ٤٠ = ٢٠ نيوتن

∵ جـم للقوى = جـم للمحصلة

∴ ٤ × ٨٠ + ٢٨ × ٤٠ − ١٠ × ٣٠ − ١٨ × ٥٠

= −٢٠٠ × أم

∴ ٢٤٠ = −٢٠ أم

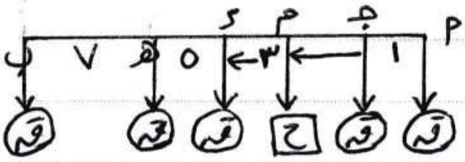
∴ أم = −١٢ سم وتقع على اليمين من أ

∴ م ∈ $\overrightarrow{هـ أ}$ ، م ∉ $\overrightarrow{أهـ}$

∴ المحصلة تبعد ١٢ سم عن النقطة أ في اتجاه $\overrightarrow{هـ أ}$

(٢١) إذا كانت جـ ، د ، هـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث أجـ : جـ د : د هـ : هـ ب = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية وفي نفس الاتجاه ومتساوية في المقدار في النقط أ ، جـ ، د ، هـ ، ب برهن أن المحصلة تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٣ : ٥

- الحل -



∴ ح = ق + ق + ق + ق + ق = ٥ ق

∵ جـم للقوى = جـم للمحصلة

∴ ق × ل + ق × ٤ل + ق × ٩ل + ق × ١٦ل

= ٥ ق × أم

∴ ٣٠ ل = ٥ أم

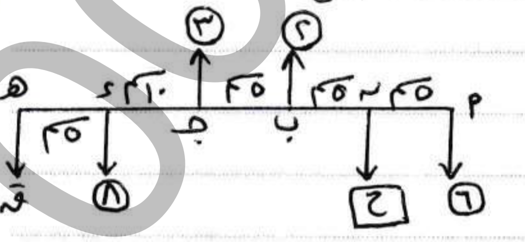
∴ أم = ٦ ل

∴ $\frac{أم}{أب} = \frac{٦ل}{١٦ل} = \frac{٣}{٨}$

∴ $\frac{أم}{مب} = \frac{٣}{٥}$

(٢٢) أ ، ب ، جـ ، د ، هـ خمس نقط ∈ مستقيم واحد ومرتبة في اتجاه واحد بحيث أب = ٢ ب جـ = جـ د = ٢ د هـ = ١٠ سم أثرت القوى ٦ ، ٢ ، ٣ ، ٨ ، ق نيوتن في النقط بالترتيب بحيث كانت عمودية على $\overline{أهـ}$ وكانت القوتان ٦ ، ٨ في اتجاه واحد والقوتان ٢ ، ٣ في الاتجاه المضاد ، فإذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر عند نقطة م ∈ $\overline{أهـ}$ حيث أم = ٥ سم ، فأوجد مقدار واتجاه كل من القوة ق ، المحصلة ح

- الحل -



∵ مجموع عزوم القوى حول م = عزم المحصلة حول م

، ∵ م ∈ خط عمل المحصلة

∴ $ج_م$ = صفر

∴ −٦×٥ − ٢×٥ − ٣×١٠ + ٨×٢٠ + ق×٢٥ = صفر

∴ −٣٠ − ١٠ − ٣٠ + ١٦٠ + ٢٥ ق = صفر

∴ ق = − ٣٫٦ نيوتن

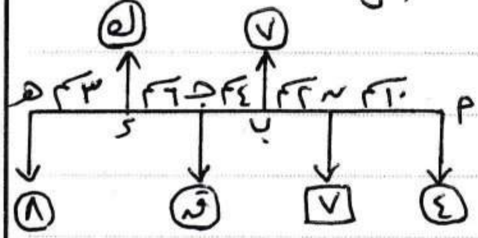
∴ ق تعمل في اتجاه القوتين ٢ ، ٣

، ح = ٦ − ٢ − ٣ + ٨ − ٣٫٦

∴ ح = ٥٫٤ نيوتن وتعمل في اتجاه القوتين ٦ ، ٨ نيوتن

(٢٣) أ ، ب ، جـ ، د ، هـ خمس نقط في مستقيم أفقي واحد ومرتبة في اتجاه واحد بحيث أب = ١٢ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ د = ٦ سم ، د هـ = ٣ سم . أثرت القوى ٤ ، ق ، ٨ نيوتن رأسياً لأسفل عند النقط أ ، جـ ، هـ على الترتيب وأثرت القوتان ٧ ، ل رأسياً لأعلى عند النقط ب ، د على الترتيب . فإذا كانت محصلة القوى = ٧ نيوتن وتؤثر عند نقطة م ∈ $\overline{أهـ}$ حيث أم = ١٠ سم وتعمل رأسياً لأسفل فأوجد قيمتي ق ، ل

- الحل -



∵ ٧ = ٤ + ق + ٨ − ٧ − ل

∴ ٧ = ق − ل + ٥   ∴ ق − ل = ٢ (١)

∵ $ج_م$ للقوى = $ج_م$ للمحصلة

، ∵ م ∈ خط عمل المحصلة

∴ $ج_م$ = صفر

∴ −٧×٢ − ٤×١٠ + ق×٦ − ل×١٢ + ٨×١٥ = صفر

∴ −١٤ − ٤٠ + ٦ ق − ١٢ ل + ١٢٠ = صفر

∴ ٦ ق − ١٢ ل + ٦٦ = صفر

∴ ٦ ق − ١٢ ل = −٦٦   ÷ ٦

∴ ق − ٢ ل = −١١ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ل = ١٣ نيوتن ، ق = ١٥ نيوتن

(٢٤) تؤثر القوى المتوازية التي مقاديرها ٥ ، ٨ ، ١٢ نيوتن في اتجاه واحد في النقط أ(٢ ، -٢) ، ب(٠ ، ٣) ، جـ(٤ ، -١) على الترتيب . أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى

- الحل -

س = (ق١ س١ + ق٢ س٢ + ق٣ س٣) / (ق١ + ق٢ + ق٣)

∴ س = (٥ × ٢ + ٨ × ٠ + ١٢ × ٤) / (٥ + ٨ + ١٢) = ٥٨ / ٢٥

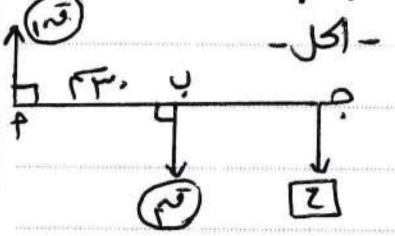
ص = (ق١ ص١ + ق٢ ص٢ + ق٣ ص٣) / (ق١ + ق٢ + ق٣)

∴ ص = (٥ × -٢ + ٨ × ٣ + ١٢ × -١) / (٥ + ٨ + ١٢) = ٢ / ٢٥

∴ نقطة تأثير محصلة القوى = (٥٨/٢٥ ، ٢/٢٥)

(٢٥) قوتان ق١ ، ق٢ تؤثران عند النقطتين أ ، ب على الترتيب في اتجاه عمودي على أب حيث أب = ٣٠ سم وكانت محصلتهما ح = -٣ س + ٤ ص وتؤثر عند نقطة جـ ∈ أب فإذا علمت أن ق٢ = -٦ س + ٨ ص فعين ق١ واحسب طول ب جـ

- الحل -



∵ ح = ق١ + ق٢

∴ ق١ = ح - ق٢

= (-٣ س + ٤ ص) - (-٦ س + ٨ ص)

∴ ق١ = ٣ س - ٤ ص

∴ ||ق١|| = √(٩ + ١٦) = ٥

، ق٢ = -٦ س + ٨ ص

= -٢ (٣ س - ٤ ص) = -٢ ق١

∴ القوتان في اتجاهين متضادين

∴ ||ق٢|| = √(٣٦ + ٦٤) = ١٠

، ||ح|| = √(٩ + ١٦) = ٥

∴ ق١ × (٣٠ + ب جـ) = ق٢ × ب جـ

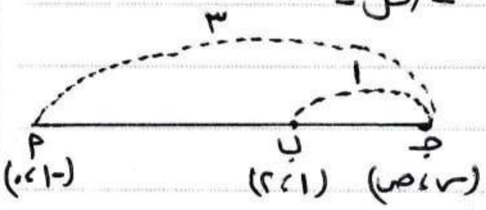
∴ ٥ × (٣٠ + ب جـ) = ١٠ × ب جـ

∴ ١٥٠ + ٥ ب جـ = ١٠ ب جـ

∴ ٥ ب جـ = ١٥٠ ∴ ب جـ = ٣٠ سم

(٢٦) تؤثر القوتان ق١ = ٣ س - ص ، ق٢ = -٩ س + ٣ ص في النقطتين أ(-١ ، ٠) ، ب(١ ، ٢) على الترتيب . أوجد محصلة القوتين ونقطة تأثيرها

- الحل -



ح = ق١ + ق٢ = -٦ س + ٢ ص

∵ ق٢ = -٩ س + ٣ ص

= -٣ (٣ س - ص) = -٣ ق١

∴ القوتان ق١ ، ق٢ متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه

ونفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة جـ(س ، ص)

∴ جـ تقسم أب من الخارج بحيث أن

أجـ / ب جـ = ٣ / ١

∴ س = (٣ × ١ - ١ × -١) / (٣ - ١) = ٢

∴ ص = (٣ × ٢ - ١ × صفر) / (٣ - ١) = ٣

∴ جـ = (٢ ، ٣)

(٢٧) اذا كانت القوتان
$\vec{\text{ق}}_1$ = -٢ $\vec{\text{س}}$ + ل $\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ = ٨ $\vec{\text{س}}$ - ٤ $\vec{\text{ص}}$
متوازيتين . عين قيمة ل وإذا أثرت $\vec{\text{ق}}_1$ في النقطة (-٢، ٠) وأثرت $\vec{\text{ق}}_2$ في النقطة (٤، ٠) عين نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع محور السينات وأوجد معادلة خط عمل المحصلة

- الحل -

∵ $\vec{\text{ق}}_1$ // $\vec{\text{ق}}_2$ ∴ $\vec{\text{ق}}_1$ × $\vec{\text{ق}}_2$ = $\vec{0}$

∴ (-٢ ، ل) × (٨ ، -٤) = $\vec{0}$

∴ (٨ - ٨ل) $\vec{\text{ع}}$ = ٠ $\vec{\text{ع}}$

∴ ٨ - ٨ل = صفر ∴ ل = ١

∴ $\vec{\text{ح}}$ = $\vec{\text{ق}}_1$ + $\vec{\text{ق}}_2$ = ٦ $\vec{\text{س}}$ - ٣ $\vec{\text{ص}}$

ونفرض أن نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع محور السينات = (س ، صفر)

∵ مجموع عزمي $\vec{\text{ق}}_1$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ حول و = عزم المحصلة حول و

∴ (-٢×١ - ٠×-٢) $\vec{\text{ع}}$ + (٤×-٤ - ٠×٨) $\vec{\text{ع}}$ = (س×-٣ - ٠×٦) $\vec{\text{ع}}$

∴ -٢ $\vec{\text{ع}}$ - ١٦ $\vec{\text{ع}}$ = -٣س $\vec{\text{ع}}$

∴ -١٨ = -٣س ∴ س = ٦

∴ نقطة تقاطع المحصلة مع محور السينات = (٦ ، صفر)

∴ معادلة خط عمل المحصلة هي

$\frac{\text{ص - صفر}}{\text{س - ٦}} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$

∴ ٢ص = -س + ٦

∴ س + ٢ص - ٦ = صفر

(٢٨) أثرت القوى المتوازية
$\vec{\text{ق}}_1$ = -٢ $\vec{\text{س}}$ + ٦ $\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ = $\vec{\text{س}}$ - ٣ $\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ق}}_3$ = ٥ $\vec{\text{س}}$ - ١٥ $\vec{\text{ص}}$ في النقط
أ(٢، ٣) ، ب(-٣، ١) ، جـ(-١، ٢) على الترتيب . أوجد معادلة خط عمل محصلة هذه القوى .

- الحل -

$\vec{\text{ح}}$ = (-٢ + ١ + ٥) $\vec{\text{س}}$ + (٦ - ٣ - ١٥) $\vec{\text{ص}}$

∴ $\vec{\text{ح}}$ = ٤ $\vec{\text{س}}$ - ١٢ $\vec{\text{ص}}$

ونفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م(س ، ص)

∵ مجموع عزوم القوى حول و = عزم المحصلة حول و

∴ $\vec{\text{وأ}}$ × $\vec{\text{ق}}_1$ + $\vec{\text{وب}}$ × $\vec{\text{ق}}_2$ + $\vec{\text{وجـ}}$ × $\vec{\text{ق}}_3$ = $\vec{\text{وم}}$ × $\vec{\text{ح}}$

∴ (٢×٦ + ٣×٢) $\vec{\text{ع}}$ + (-٣×-٣ - ١×١) $\vec{\text{ع}}$ + (-١×-١٥ - ٢×٥) $\vec{\text{ع}}$ = (س×-١٢ - ص×٤) $\vec{\text{ع}}$

∴ ١٨ + ٨ + ٥ = -١٢س - ٤ص

∴ معادلة خط عمل المحصلة هي

١٢س + ٤ص + ٣١ = صفر

صابر عبد الرحيم محمود

- تمارين عامة -

① $\vec{ق}_1$ ، $\vec{ق}_2$ قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث أب = ١٢٫٥ سم فإذا كان $ق_1$ = ٨٠ نيوتن ، $ق_2$ = ٣٠ نيوتن فأوجد محصلة هاتين القوتين (٥٠ نيوتن وتبعد ٧٫٥ سم عن أ)

② قوتان متوازيتان $\vec{ق}_1$ ، $\vec{ق}_2$ مقدار الأولى ٥٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ٧٥ نيوتن والبعد بين خطي عمل القوة الأولى والمحصلة ٣٥ سم . عين مقدار واتجاه وخط عمل $\vec{ق}_2$ اذا كان

① $\vec{ق}_1$ ، $\vec{ح}$ في اتجاه واحد

② $\vec{ق}_1$ ، $\vec{ح}$ في اتجاهين متضادين

(٢٥ نيوتن ، ٧٥ سم ، ١٢٥ نيوتن ، ٣٥ سم)

③ $ق_1$ ، $ق_2$ قوتان متوازيتان متحدتان في الاتجاه والبعد بين خطي عملهما ٢٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما يساوي ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن خط عمل $ق_1$ مسافة ٤ سم ، أوجد مقدار كل من القوتين (٤٠ ، ١٠ نيوتن)

④ قوتان متوازيتان تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث أب = ١٠٠ سم ، وتؤثر محصلتهما في نقطة جـ $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، فإذا كانت القوتان في اتجاه واحد فإن ب جـ = ٢٥ سم ، واذا كانتا متضادتين في الاتجاه فإن المحصلة = ١٠ نيوتن أوجد مقدار كل من القوتين (٥ ، ١٥ نيوتن)

⑤ أ ، ب ، جـ ، د أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث أب = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ ، جـ د = ٨ سم أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن في أ ، جـ على الترتيب وأثرت القوتان ٧ ، ٣ نيوتن في ب ، د في اتجاه مضاد للقوتين عند أ ، جـ عين محصلة هذه المجموعة وبعد نقطة تأثيرها عن أ (ح = ٨ نيوتن ، أم = ٣٢ سم)

⑥ أ ، ب ، جـ ، د ، هـ خمس نقط تقع على مستقيم واحد ومرتبة في اتجاه واحد حيث أن : ٥ أب = ٣ ب جـ = جـ د = ٦ د هـ = ٣٠ سم . أثرت القوى المتوازية التي مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ق نيوتن في النقط أ ، جـ ، هـ ، د على الترتيب وفي اتجاه عمودي على $\overleftrightarrow{أهـ}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى في اتجاه واحد والقوة ق في الاتجاه المضاد . فإذا كانت محصلة هذه المجموعة تؤثر في نقطة ب أوجد قيمة ق (ق = ١٩٫٨ نيوتن ، ح = ١٦٫٢ نيوتن)

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

اذا أثرت مجموعة من القوى المتوازية في جسم متماسك وظل هذا الجسم ساكناً فإنه يقال أن هذا الجسم متزن تحت تأثير هذه القوى كما يقال أن مجموعة القوى المؤثرة على الجسم متوازنة

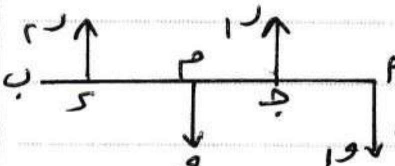
•• شروط توازن عدة قوى متوازية مستوية:

اذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن:

① مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى تساوي صفر

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أي نقطة في مستويها = صفر

ملاحظة:



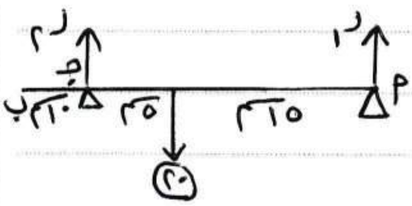
اذا ارتكز قضيب $\overline{أب}$ مقدار وزنه و على حاملين عند نقطتين جـ، ء منه وعلق ثقل مقداره $و_{١}$ من أحد طرفيه وليكن أ و ذكر أن: الثقل المعلق من أ أكبر ثقل يجعل القضيب متزناً أو يجعل القضيب على وشك الدوران أو الانقلاب حول جـ أو يجعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ء فهذا يعني أن مقدار رد فعل القضيب عند ء = صفر أي أن

$ر_{٢}$ = صفر

- أمثلة محلولة -

① ترتكز ساق من الحديد طولها ٣٠ سم ووزنها ٢٠ نيوتن (يؤثر عند منتصف الساق) في وضع أفقي على حاملين، أحدهما عند أحد الطرفين والآخر على بعد ١٠ سم من الطرف الآخر. أوجد رد فعل كل من الحاملين على الساق

- الحل -



من شروط الاتزان

$ر_{١} + ر_{٢} = ٢٠$ ①

، $ج_{أ}$ = صفر

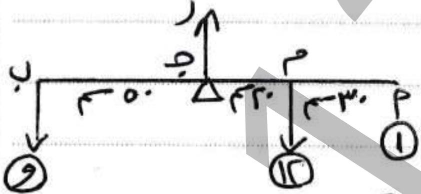
∴ $٢٠ \times ١٥ - ر_{٢} \times ٢٠$ = صفر

∴ $ر_{٢} = \frac{٣٠٠}{٢٠} = ١٥$ نيوتن

ومن ① ∴ $ر_{١} = ٥$ نيوتن

② $\overline{أب}$ قضيب طوله متر ووزنه ١٢ ث كجم يؤثر عند نقطة على بعد ٣٠ سم من الطرف أ وضع على حامل أملس عند منتصفه. أوجد مقدار الثقل الذي يجب أن يعلق من الطرف ب ليتزن القضيب في وضع أفقي وكذلك رد فعل الحامل

- الحل -



∵ الجسم متزن

∴ $ر = ١٢ + و$ ①

، $١٢ \times ٢٠ = و \times ٥٠$

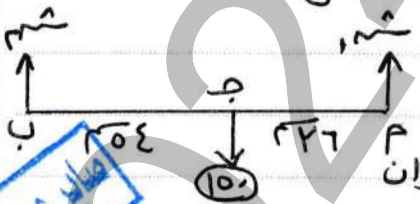
∴ $و = \frac{١٢ \times ٢٠}{٥٠} = ٤٫٨$ ث كجم

ومن ①

∴ $ر = ١٢ + ٤٫٨ = ١٦٫٨$ ث كجم

③ قضيب خفيف $\overline{أب}$ مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، علق في وضع أفقي من طرفيه أ ، ب بواسطة حبلين رأسيين ثم علق جسم وزنه ١٥٠ ث جم عند نقطة جـ على القضيب بحيث أجـ = ٣٦ سم احسب مقدار الشد في كل من الحبلين عندما يكون القضيب متزناً أفقياً

- الحل -



من شروط الاتزان

∴ ش١ + ش٢ = ١٥٠ ①

، جأ = صفر

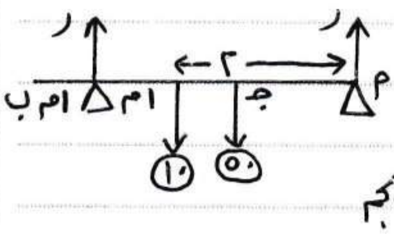
∴ ١٥٠ × ٣٦ − ش٢ × ٩٠ = صفر

∴ ش٢ = $\frac{١٥٠ \times ٣٦}{٩٠}$ = ٦٠ ث جم

ومن ① فإن ش١ = ٩٠ ث جم

④ $\overline{أب}$ لوح خشبي منتظم الكتلة كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب بين أين يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكي يتساوى ردي الفعل على الحاملين

- الحل -



∵ اللوح متزن

∴ ٢ر = ٥٠ + ١٠

∴ ر = ٣٠ ث كجم

، جأ = صفر

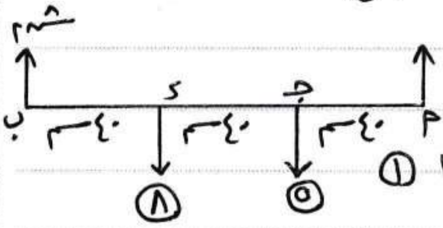
∴ ٥٠ × أجـ + ١٠ × ٢ − ٣٠ × ٣ = صفر

∴ ٥٠ أجـ = ٧٠ ∴ أجـ = ١٫٤ متر

∴ الطفل يقف على بعد ١٫٤ متر من الطرف أ

⑤ علق قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم في وضع أفقي بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه ثم علق فيه ثقلان مقدارهما ٥ نيوتن ، ٨ نيوتن عند نقطتي تثليثه أوجد الشد في كل من الخيطين

- الحل -



من شروط الاتزان

ش١ + ش٢ = ١٣ ①

، جأ = صفر

∴ ٥ × ٤٠ + ٨ × ٨٠ − ش٢ × ١٢٠ = صفر

∴ ش٢ = ٧ نيوتن

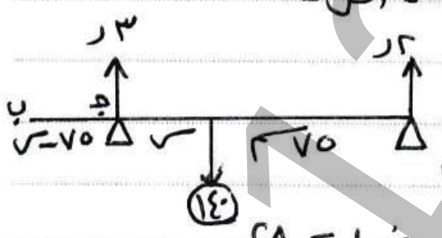
من ① ∴ ش١ = ٦ نيوتن

⑥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٫٥ متر ووزنه ١٤٠ نيوتن يؤثر في نقطة منتصفه ويرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند الطرف أ والثاني عند نقطة جـ من القضيب فإذا كان مقدار رد فعل الحامل عند أ يساوي ثلثي مقدار رد فعل الحامل عند جـ أوجد:

① مقدار رد الفعل عند كل من الحاملين

② بعد جـ عن الطرف ب

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ ٢ر + ٣ر = ١٤٠

∴ ٥ر = ١٤٠ ∴ ر = ٢٨

∴ رد الفعل عند أ = ٢ × ٢٨ = ٥٦ نيوتن

، رد الفعل عند جـ = ٣ × ٢٨ = ٨٤ نيوتن

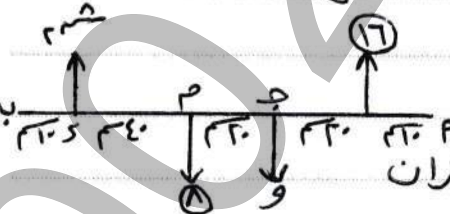
، ٢ر × ٧٥ = ٣ر × س

∴ س = ٥٠ سم

∴ جـ تبعد عن الطرف ب مسافة = ٢٥ سم

⑦ قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ، ووزنه ٨ ث كجم علق فى وضع أفقى من نقطتين تبعد كل منهما ١٠سم عند أحد طرفيه بخيطين رأسيين لا يتحمل كل منهما شداً أكثر من ١٦ ث كجم . فإذا علق ثقل قدره و على بُعد ٢٠سم من منتصف القضيب ، أوجد مقدار و التى تجعل أحد الخيطين على وشك أن يقطع ثم أوجد مقدار الشد فى الخيط الآخر.

- الحل -



من شروط الاتزان

١٦ + ش٢ = و + ٨

∴ ش٢ = و − ٨ ①

، جـد = صفر

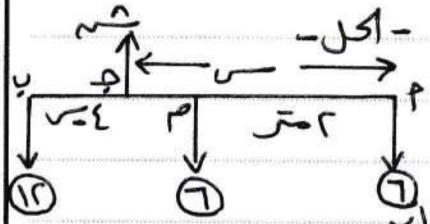
∴ ١٦ × ٨٠ − و × ٦٠ − ٨ × ٤٠ = صفر

∴ و = ١٦ ث كجم

ومن ① ∴ ش٢ = ٨ ث كجم

⑧ قضيب منتظم أب طوله ٤ متر وكتلته ٦ كجم علق فى طرفيه أ ، ب جسمان كتلتاهما ٦ ، ١٢ كجم على الترتيب فمن أى نقطة يجب تعليق القضيب كى يتزن أفقياً

- الحل -



نفرض أن نقطة التعليق هى جـ

ومن شروط الاتزان

∴ ش = ٦ + ٦ + ١٢ = ٢٤ كجم

، جـأ = صفر

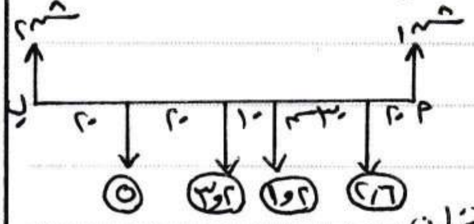
∴ ٦ × ٢ + ١٢ × ٤ − ٢٤ س = صفر

∴ س = ٢٫٥

∴ القضيب يعلق عند نقطة تبعد ٢٫٥ متر من أ

⑨ أب ساق منتظمة طولها ١٠٠سم وكتلتها ٢٫١ كجم علقت فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيها أ ، ب ثم علقت الأثقال ٢٫٦ ، ٣٫٢ ، ٥ ث كجم على أبعاد ٢٠ ، ٦٠ ، ٨٠ سم من الطرف أ عين الشد فى كل من الخيطين

- الحل -



من شروط الاتزان

ش١ + ش٢ = ١٢ ①

، جـأ = صفر

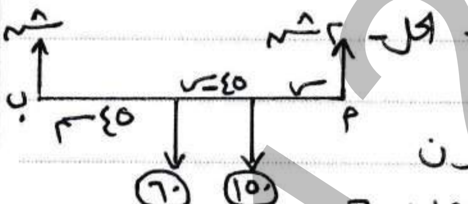
∴ ٢٫٦ × ٢٠ + ٢٫١ × ٥٠ + ٣٫٢ × ٦٠ + ٥ × ٨٠ − ش٢ × ١٠٠ = صفر

∴ ش٢ = ٧٫٠٤ ث كجم

ومن ① ∴ ش١ = ٤٫٩٦ ث كجم

⑩ أب قضيب منتظم طوله ٩٠سم ووزنه ٦٠ نيوتن معلق فى وضع أفقى بخيطين رأسيين من طرفيه أ ، ب أين يعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند أ ضعف مقدار الشد عند ب

- الحل -



∴ القضيب متزن

∴ ٣ش = ١٥٠ + ٦٠

∴ ش = ٧٠

، جـأ = صفر

∴ ١٥٠ × س + ٦٠ × ٤٥ − ٧٠ × ٩٠ = صفر

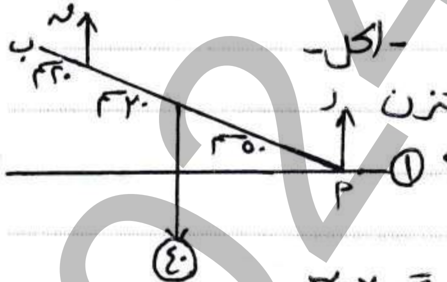
∴ ١٥٠ س = ٣٦٠٠

∴ س = ٢٤ سم

∴ يتم تعليق الثقل على بُعد ٢٤ سم من الطرف أ

(١١) $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث كجم وطوله ١ متر يتزن عندما يرتكز بطرفه أ على نضد أفقي أملس ويرتفع طرفه الآخر ب بتأثير قوة رأسية تؤثر عند نقطة على بعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل النضد

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ ر + ق = ٤٠ (١)

، ر × ٥٠ = ق × ٣٠

∴ ٥ ر = ٣ ق ∴ ر = $\frac{٣}{٥}$ ق (٢)

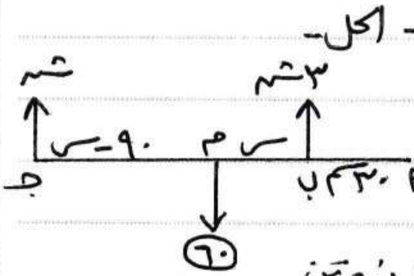
وبالتعويض من (٢) في (١)

∴ $\frac{٣}{٥}$ ق + ق = ٤٠ ∴ ق = ٢٥ ث كجم

∴ ر = ١٥ ث كجم

(١٢) $\overline{أجـ}$ قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن علق في وضع أفقي بواسطة خيطين رأسيين عند ب ، جـ حيث أب = ٣٠ سم فكان الشد في الخيط عند ب ثلاثة أمثال الشد في الخيط عند جـ عين نقطة تأثير وزن القضيب ومقدار الشد في كل من الخيطين.

- الحل -



من شروط الاتزان

∴ ٤ ش = ٦٠

∴ ش = ١٥ نيوتن

∴ عند جـ الشد = ١٥ نيوتن ،

عند ب الشد = ٤٥ نيوتن

، جـب = صفر

∴ ٦٠ س − ١٥ × ٩٠ = صفر

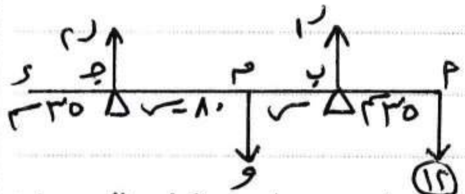
∴ س = ٢٢٫٥

∴ وزن القضيب يؤثر عند م حيث

أم = ٥٢٫٥ سم

(١٣) $\overline{أب جـ د}$ قضيب غير منتظم يرتكز في وضع أفقي على حاملين أملسين عند ب ، جـ حيث أب = جـ د = ٣٥ سم ، ب جـ = ٨٠ سم فإذا كان القضيب يصبح على وشك الدوران حول ب إذا علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢ ث كجم ، كما يصبح على وشك الدوران حول جـ إذا علق من الطرف د ثقل قدره ٢٠ ث كجم فأوجد وزن القضيب وبعد مركز ثقله عن الطرف أ

- الحل -

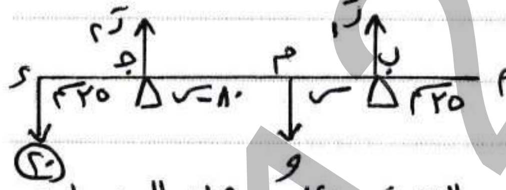


عندما يصبح القضيب على وشك الدوران حول ب فإن ر٢ = صفر

ومن شروط الاتزان

∴ جـب = صفر ∴ −١٢ × ٣٥ + و س = صفر

∴ و س = ٤٢٠ (١)



عندما يصبح القضيب على وشك الدوران حول جـ فإن ر١ = صفر

ومن شروط الاتزان ∴ جـجـ = صفر

∴ −و (٨٠ − س) + ٢٠ × ٣٥ = صفر

∴ −٨٠ و + و س + ٧٠٠ = صفر ومن (١)

∴ −٨٠ و + ٤٢٠ + ٧٠٠ = صفر

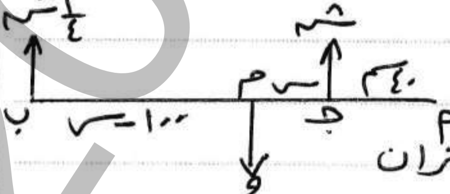
∴ −٨٠ و = −١١٢٠ ∴ و = ١٤ ث كجم

ومن ① ∴ س = ٣٠ سم

∴ وزن القضيب = ١٤ ث كجم ويؤثر في نقطة على بعد ٦٥ سم من أ

⑭ أب قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقياً بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠ سم من أ ، فإذا كان الشد في الخيط الأول $\frac{1}{4}$ الشد في الخيط الثاني ، فعين نقطة تأثير وزن القضيب . وإذا علم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من أ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب

- الحل -



من شروط الاتزان

∴ جـم = صفر

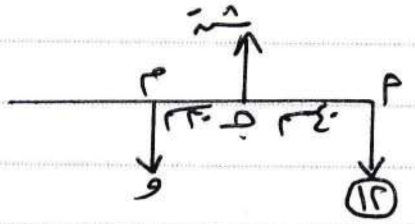
∴ ش س - $\frac{1}{4}$ ش (١٠٠ - س) = صفر

∴ س - ٢٥ + $\frac{1}{4}$ س = صفر

∴ $\frac{5}{4}$ س = ٢٥

∴ س = ٢٥ × $\frac{4}{5}$ = ٢٠ سم

∴ نقطة تأثير الوزن على بعد ٦٠ سم من أ



عندما يكون التوازن على وشك أن يختل يكون الشد في الخيط عند ب = صفر

∴ جـ = صفر

∴ -١٢ × ٤٠ + و × ٢٠ = صفر

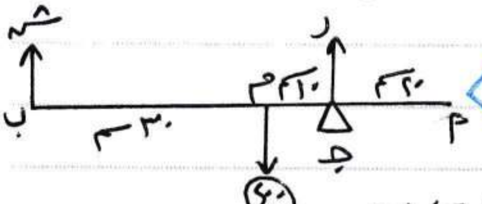
∴ و = ٢٤ نيوتن

⑮ يرتكز قضيب أب طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من أ حفظ القضيب أفقياً في حالة اتزان بواسطة خيط خفيف رأسي يتصل بطرفه ب أوجد:

① مقدار كل من الشد في الخيط ورد فعل الوتد

② مقدار الثقل الذي يلزم تعليقه من أ ليجعل الشد في الخيط على وشك أن ينعدم

- الحل -



من شروط الاتزان

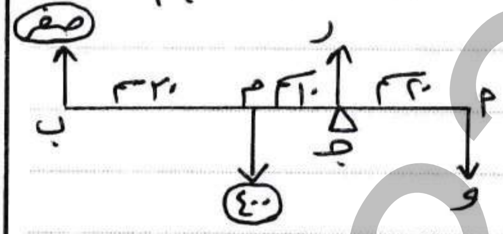
ر + ش = ٤٠٠ ①

∵ جـ = صفر

∴ ٤٠٠ × ١٠ - ش × ٤٠ = صفر

∴ ش = ١٠٠ ث جم

ومن ① ∴ ر = ٣٠٠ ث جم



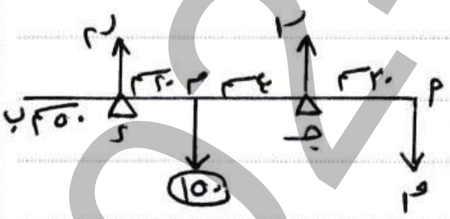
وعندما يكون الشد في الخيط عند ب على وشك الانعدام ∴ جـ = صفر

∴ - و × ٢٠ + ٤٠٠ × ١٠ = صفر

∴ و = ٢٠٠ ث جم

(١٦) قضيب منتظم طوله ١٤٠سم ووزنه ١٥٠ ث جم يرتكز أفقياً على حاملين يبعدان ٤٠سم ، ٢٠سم عن منتصفه على الترتيب. أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من كل طرف دون أن يختل توازن القضيب ومقدار الضغط على كل من الحاملين في كل حالة

- الحل -



عند تعليق الثقل و$_1$ من أ يكون القضيب على وشك الدوران حول جـ

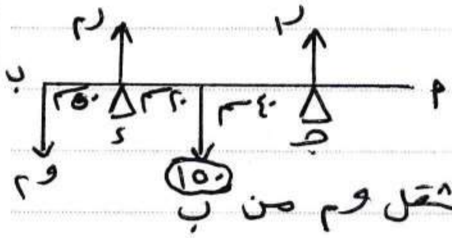
∴ ر$_2$ = صفر ، جـ$_{جـ}$ = صفر

∴ − و$_1$ × ٣٠ + ١٥٠ × ٤٠ = صفر

∴ و$_1$ = ٢٠٠ ث جم

، ر$_1$ = ٢٠٠ + ١٥٠ = ٣٥٠ ث جم

∴ ض$_1$ = ٣٥٠ ث جم



عند تعليق الثقل و$_2$ من ب فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول د ، ر$_1$ = صفر

، جـ$_د$ = صفر

∴ − ١٥٠ × ٢٠ + و$_2$ × ٥٠ = صفر

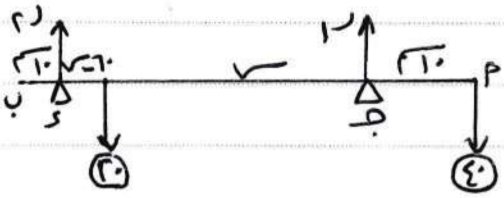
∴ و$_2$ = ٦٠ ث جم

∴ ر$_2$ = ١٥٠ + ٦٠ = ٢١٠ ث جم

∴ ض$_2$ = ٢١٠ ث جم

(١٧) أب قضيب غير منتظم طوله ٨٠سم ووزنه ٢٠ ث كجم يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند جـ ، د حيث أجـ = ب د = ١٠سم ، علق من أ ثقل قدره ٤٠ ث كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول جـ أوجد بُعد نقطة تأثير وزن القضيب عن أ ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المعلق من أ

- الحل -



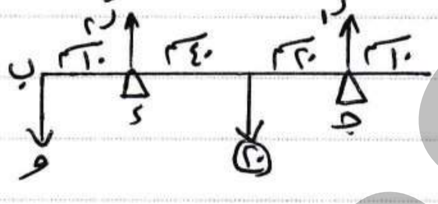
• عند تعليق الثقل ٤٠ ث كجم من أ

∴ ر$_2$ = صفر ، جـ$_{جـ}$ = صفر

∴ ٢٠ × س − ٤٠ × ١٠ = صفر

∴ س = ٢٠سم

∴ بُعد نقطة تأثير الوزن عن أ = ٣٠سم



• نفرض أن أكبر ثقل يعلق من ب هو و

∴ جـ$_د$ = صفر

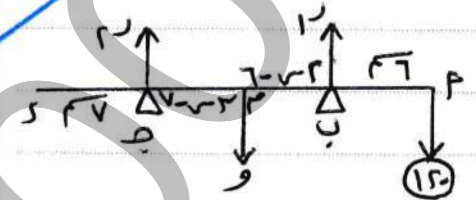
∴ − ٢٠ × ٤٠ + و × ١٠ = صفر

∴ و = ٨٠ ث كجم

∴ أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب = ٨٠ ث كجم

(١٨) أ ب جـ د قضيب غير منتظم يرتكز في وضع الاتزان أفقياً على حاملين أملسين عند ب ، جـ حيث أ ب = ٦ سم ، جـ د = ٧ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف أ وُجد أنه لو علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ ث جم أو من الطرف د ثقل قدره ١٨٠ ث جم كان القضيب على وشك الدوران . أوجد وزن القضيب والبعد بين الحاملين

- الحل -



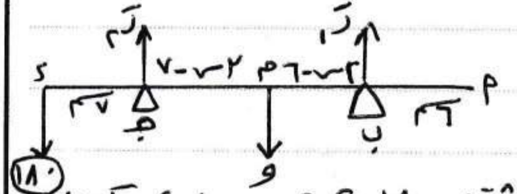
عند تعليق ثقل ١٢٠ ث جم من أ يكون القضيب على وشك الدوران حول ب

∴ ر = صفر ، جـب = صفر

∴ و (٢س - ٦) - ١٢٠ × ٦ = صفر

∴ و (٢س - ٦) = ١٢٠ × ٦

∴ و (س - ٣) = ٣٦٠ (١)



عند تعليق ثقل ١٨٠ ث جم من د يكون القضيب على وشك الدوران حول جـ

∴ رَ١ = صفر ، جـجـ = صفر

∴ ١٨٠ × ٧ - و (٣س - ٧) = صفر

∴ و (٣س - ٧) = ١٨٠ × ٧ (٢)

ولقسمة (٢) على (١)

$$\therefore \frac{و(٣س-٧)}{و(س-٣)} = \frac{١٨٠ \times ٧}{٣٦٠} = \frac{٧}{٢}$$

∴ ٧س - ٢١ = ٦س - ١٤

∴ س = ٧ سم

∴ ب م = ٨ سم ، م جـ = ١٤ سم

∴ ب جـ = ٢٢ سم

∴ البعد بين الحاملين = ٢٢ سم

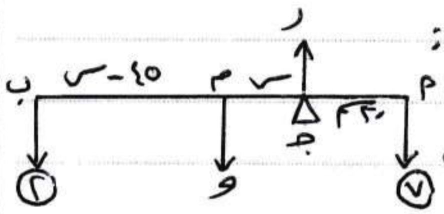
ومن (١) ∴ و × ٤ = ٣٦٠

∴ و = ٩٠ ث جم

(١٩) أ ب قضيب غير منتظم طوله ٦٥ سم إذا ثُبت عند طرفه ب ثقل قدره ٢ نيوتن وعلق من أ ثقل قدره ٧ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقياً عند نقطة تبعد ٢٠ سم من أ وإذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٤٫٢ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقياً عند نقطة تبعد ٢٥ سم من أ أوجد وزن القضيب وبُعد نقطة تأثير وزنه عن الطرف أ

- الحل -

• في الحالة الأولى:



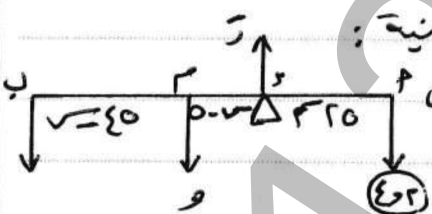
من شروط الاتزان

∴ جـجـ = صفر

∴ و س + ٢ × ٤٥ - ٧ × ٢٠ = صفر

∴ و س = ٥٠ (١)

• في الحالة الثانية:



من شروط الاتزان

∴ جـد = صفر

∴ و (س - ٥) + ٢ × ٤٠ - ٤٫٢ × ٢٥ = صفر

∴ و س - ٥ و + ٨٠ - ١٠٥ = صفر

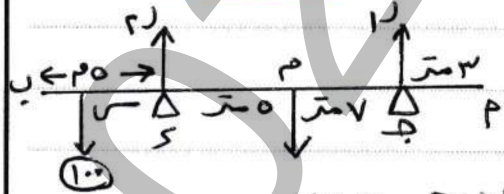
ومن (١) ∴ ٥٠ - ٥ و + ٨٠ - ١٠٥ = صفر

∴ و = ٥ نيوتن ∴ س = ١٠ سم

∴ الوزن ٥ نيوتن ، وبُعد نقطة تأثير الوزن من أ = ٣٠ سم

(٢٠) $\overline{أب}$ لوح من الخشب طوله ٢٠ متر ووزنه ٦٠ ث كجم يؤثر في منتصفه موضوع أفقياً بحيث يرتكز على حاملين عند جـ ، ء حيث أجـ = ٣ متر ، ب ء = ٥ متر فإذا سار رجل وزنه ١٠٠ ث كجم على اللوح مبتدئاً من الطرف أ نحو ب فأوجد أكبر مسافة يمكن أن يسيرها دون أن ينقلب اللوح

- الحل -



∵ ١٠٠ × ٣ < ٦٠ × ٧

∴ في المسافة أجـ لا يمكن أن ينقلب اللوح

•• عندما يكون اللوح على وشك الانقلاب يكون على وشك الدوران حول ء

∴ ر١ = صفر ، جـ ء = صفر

∴ ١٠٠ س − ٦٠ × ٥ = صفر

∴ س = ٣ متر

∴ أقصى مسافة يمكن أن يسيرها الرجل دون أن ينقلب اللوح = ١٥ + ٣ = ١٨ متر

(٢١) تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، $\overrightarrow{ق_4}$ في النقط أ(٢ ، −١) ، ب(−٤ ، −٣) ، جـ(٣ ، ٥) ، ء(−١ ، صفر) على الترتيب فإذا كانت:

$\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{ق_2}\|$ = ٢٠ نيوتن في نفس اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$ ، أوجد كلاً من $\overrightarrow{ق_3}$ ، $\overrightarrow{ق_4}$ إذا كانتا تعملان في اتجاه مضاد لاتجاه $\overrightarrow{ق_1}$

- الحل -

∵ $\overrightarrow{ق_2}$ // $\overrightarrow{ق_1}$ ∴ $\overrightarrow{ق_2}$ = ل $\overrightarrow{ق_1}$

∴ $\|\overrightarrow{ق_2}\|$ = $\|$ل $\overrightarrow{ق_1}\|$

∴ ٢٠ = |ل| × ٥

∴ ل = ±٤

∵ $\overrightarrow{ق_2}$ في نفس اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$

∴ ل = ٤

∴ $\overrightarrow{ق_2}$ = ١٢ $\overrightarrow{س}$ + ١٦ $\overrightarrow{ص}$

∵ $\overrightarrow{ق_3}$ // $\overrightarrow{ق_1}$ ∴ $\overrightarrow{ق_3}$ = م $\overrightarrow{ق_1}$

∴ $\overrightarrow{ق_3}$ = م(٣ ، ٤) = (٣م ، ٤م)

∵ القوى متزنة ∴ $\overrightarrow{جـ_ء}$ = صفر

∴ $\overrightarrow{ءأ}$ × $\overrightarrow{ق_1}$ + $\overrightarrow{ءب}$ × $\overrightarrow{ق_2}$ + $\overrightarrow{ءجـ}$ × $\overrightarrow{ق_3}$ = $\overrightarrow{0}$

∴ (٣ ، −١) × (٣ ، ٤) + (−٣ ، −٣) × (١٢ ، ١٦) + (٤ ، ٥) × (٣م ، ٤م) = $\overrightarrow{0}$

∴ (١٥ − ١٢ + م) $\overrightarrow{ع}$ = $\overrightarrow{0}$

∴ ٣ + م = صفر ∴ م = −٣

∴ $\overrightarrow{ق_3}$ = (−٩ ، −١٢)

∴ $\overrightarrow{ق_3}$ = −٩ $\overrightarrow{س}$ − ١٢ $\overrightarrow{ص}$

∵ القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{ق_1}$ + $\overrightarrow{ق_2}$ + $\overrightarrow{ق_3}$ + $\overrightarrow{ق_4}$ = $\overrightarrow{0}$

∴ $\overrightarrow{ق_4}$ = −($\overrightarrow{ق_1}$ + $\overrightarrow{ق_2}$ + $\overrightarrow{ق_3}$)

∴ $\overrightarrow{ق_4}$ = −(٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$)

∴ $\overrightarrow{ق_4}$ = −٦ $\overrightarrow{س}$ − ٨ $\overrightarrow{ص}$

- تمارين عامة -

① يرتكز قضيب منتظم وزنه ٨ ث كجم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه البعد بينهما ٢٠ سم علقنا كتلة قدرها ٢ كجم من نقطة تبعد عن أحد طرفيه مسافة ٧٫٥ سم أوجد مقدار الضغط الواقع على كل من الحاملين (٥٫٥ ، ٨٫٥ ث كجم)

② يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتى تثليثه وعلق من طرفيه ثقلان مقدارهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن عين الضغط على كل من الحاملين (١٠ ، ٤٠ نيوتن)

③ ساق منتظمة طولها ١٠٠ سم ووزنها ١٠ جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين المسافة بينهما ٧٥ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين $\frac{٢}{٣}$ الضغط على الحامل الآخر أوجد بعد كل حامل عن الطرف القريب منه (٥ ، ٢٠ سم)

④ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، ووزنه ٣٠ نيوتن معلق من طرفيه فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شداً يزيد عن ٢٠ نيوتن . أوجد مواضع النقط التى يمكن أن يعلق منها ثقل مقداره ٧٫٥ نيوتن دون أن يقطع أى من الخيطين

(على مسافة لا تقل عن ٤٠ سم من كل طرف)

⑤ ساق مهملة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساوياً لضعف قيمته عند الطرف الثانى

(٤٠ سم من أى من الطرفين)

⑥ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند ب فإذا كان مقدار رد الفعل عند كل من أ ، ب هما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن على الترتيب ، إذا اتزن هذا القضيب أفقياً على حامل واحد ، أوجد بعد هذا الحامل عن نقطة أ

(١٫٥ متر)

⑦ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم وزنه ٥ ث كجم وطوله ٢٤ سم يرتكز أفقياً على حاملين عند جـ ، ى حيث أجـ = بى = ٥ سم علق من أ ثقل قدره ١٠ ث كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول جـ عين مركز ثقل القضيب ثم أوجد أكبر ثقل يعلق من ب دون أن يفقد القضيب توازنه مع بقاء الثقل المعلق من أ

(على بعد ١٥ سم من أ ، ٤٢ ث كجم)

صابر عبد الرحيم محمود

- الاتزان العام -

تعريف: اذا انعدم مجموع القوى لمجموعة قوى مستوية ($\vec{ح} = \vec{0}$) وانعدم عزم المجموعة بالنسبة لكل نقطة ($\vec{جـ} = \vec{0}$) في مستويها قيل أن مجموعة القوى متوازنة واذا أثرت مثل هذه المجموعة من القوى على جسم ما قيل أن هذا الجسم متزن

نظرية: اذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما من القوى المستوية وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة في مستويها كانت هذه المجموعة متزنة

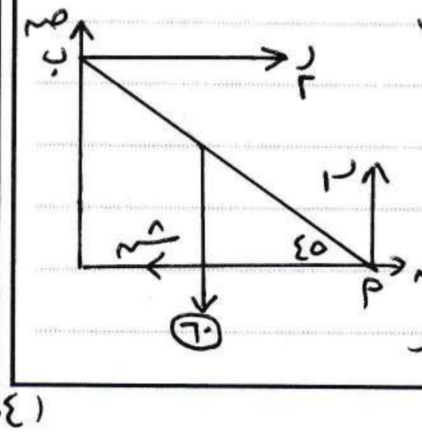
- أمثلة محلولة -

① أب سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء وبطرفه ب على حائط رأسي أملس. حفظ السلم في مستوى رأسي وفي وضع يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقي ليصل الطرف أ بنقطة على الأرض تقع رأسياً أسفل ب تماماً. أوجد:

① مقدار الشد في الحبل

② مقدار قوة رد فعل كل من الحائط عند ب ، الأرض عند أ

- الحل -



نفرض أن طول السلم = ل

∵ السلم متزن

∴ س = صفر

∴ ر٢ = ش ... ①

، ص = صفر

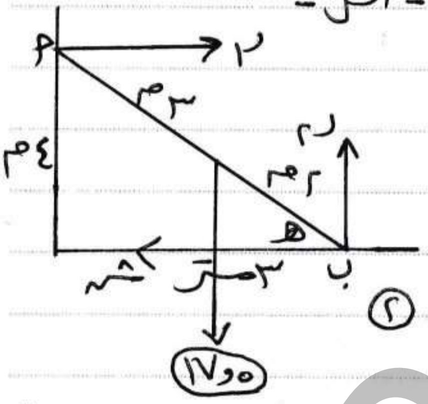
∴ ر١ = ٦٠ نيوتن ، جـ أ = صفر

∴ $-٦٠ \times \frac{ل}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - ر_٢ \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} =$ صفر

∴ ر٢ = ٣٠　　∴ ش = ٣٠ نيوتن

② أب سلم طوله ٥ أمتار ووزنه ١٧٫٥ ث كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسي أملس وبطرفه ب على أرض أفقية ملساء. حفظ السلم في حالة توازن وذلك بربط طرفه ب بخيط أفقي واقع في المستوى الرأسي للسلم أوجد الشد في الخيط اذا كان بُعد ب عن الحائط ٣ أمتار وكان وزن السلم يؤثر في نقطة على بُعد ٢ متر من ب وكذلك أوجد مقدار قوة رد فعل كل من الأرض والحائط

- الحل -



∵ السلم متزن

∴ س = صفر

∴ ر١ = ش ①

، ص = صفر

∴ ر٢ = ١٧٫٥ ②

، جـ ب = صفر

∴ − ر١ × ٥ جاهـ + ١٧٫٥ × ٢ × جتاهـ = صفر

∴ $- ر_١ \times ٥ \times \frac{٤}{٥} + ٣٥ \times \frac{٣}{٥} =$ صفر

∴ − ٤ ر١ + ٢١ = صفر

∴ ر١ = ٥٫٢٥ ث كجم

∴ ش = ٥٫٢٥ ث كجم

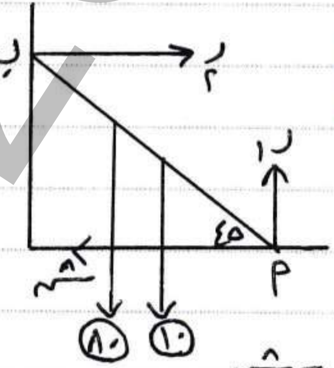
صابر عبد الرحيم محمود

③ يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه أ على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسي أملس. حفظ السلم في مستوى رأسي في وضع يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقي رأسياً أسفل ب يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم، أوجد:

① قوة الشد في الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم

② أقصى قيمة للشد التي يتحملها الحبل علماً بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم

- الحل -



① معادلات الاتزان هي

ر١ = ٩٠ ، ر٢ = شـ

، جـم أ = صفر

∴ ١٠ × $\frac{١}{٢}$ ل جتا٤٥ + ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ ل جتا٤٥

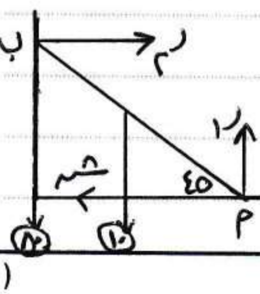
- ر٢ × ل جا٤٥ = صفر

بالقسمة على ل جتا٤٥

∴ ٥ + ٦٠ - ر٢ = صفر

∴ ر٢ = ٦٥ ث كجم

∴ شـ = ٦٥ ث كجم



② بعد صعود الرجل

ر٢ = شـ

، جـم أ = صفر

∴ ١٠ × $\frac{١}{٢}$ ل جتا٤٥ + ٨٠ × ل جتا٤٥ -

ر٢ × ل جا٤٥ = صفر

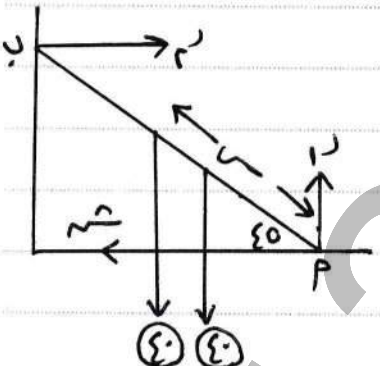
∴ ٥ + ٨٠ - ر٢ = صفر

∴ ر٢ = ٨٥ ث كجم　　∴ شـ = ٨٥ ث كجم

④ أب سلم منتظم وزنه ٤٠ ث كجم وطوله ١٢ متر يرتكز بطرفه أ على مستوٍ أفقي أملس وبطرفه ب على حائط رأسي أملس، حفظ السلم في حالة توازن بواسطة حبل مربوط أحد طرفيه في أ ومربوط طرفه الآخر بنقطة في المستوى الأفقي رأسياً أسفل ب فإذا كان السلم يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° وكان الحبل لا يتحمل شداً أكثر من ٥٠ ث كجم فأثبت أن رجلاً وزنه = وزن السلم لا يستطيع أن يصعد أكثر من ٩ متر دون أن ينقطع الحبل.

- الحل -

معادلات الاتزان



ر٢ = شـ

، ر١ = ٨٠

، جـم أ = صفر

∴ ٤٠ × ٦ جتا٤٥ +

٤٠ س جتا٤٥ -

ر٢ × ١٢ جا٤٥ = صفر

∴ ٢٤٠ + ٤٠ س = ١٢ شـ

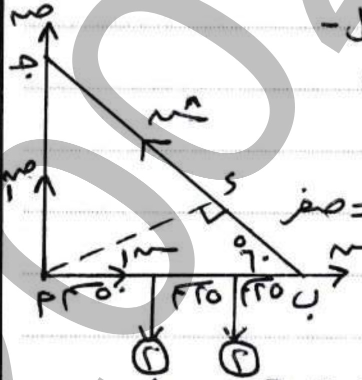
∴ شـ = $\frac{٢٤٠ + ٤٠ س}{١٢}$ = $\frac{٦٠ + ١٠ س}{٣}$

∵ شـ ≤ ٥٠　　∴ $\frac{٦٠ + ١٠ س}{٣}$ ≤ ٥٠

∴ س ≤ ٩　　∴ الرجل لا يستطيع أن يصعد أكثر من ٩ أمتار بعدها ينقطع الحبل

⑤ قضيب منتظم مقدار وزنه ٢ ث كجم وطوله ١٠٠ سم يتصل أحد طرفيه بمفصل مثبت في حائط رأسي علق ثقل قدره ٢ ث كجم من نقطة على القضيب تبعد ٧٥ سم عن المفصل وحفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة حبل رفيع يتصل بطرفه الآخر وبنقطة على الحائط تقع رأسياً أعلى المفصل، إذا كان الحبل يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدار الشد وكذلك رد فعل المفصل

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ س = صفر

∴ $س_١ - ش جتا ٦٠ = صفر$

∴ $س_١ = \frac{١}{٢} ش$ ①

، ص = صفر

∴ $ص_١ + ش جا ٦٠ - ٢ - ٢ = صفر$

∴ $ص_١ = ٤ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ش$ ②

، $ع_م = صفر$

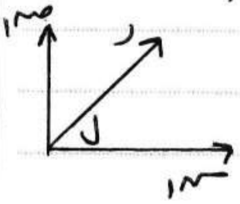
∴ $-٢ \times ٥٠ - ٢ \times ٧٥ + ش \times م د = صفر$

، ∵ $م د = م ب جا ٦٠ = ١٠٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٥٠\sqrt{٣}$

∴ $٥٠\sqrt{٣} ش = ٢٥٠$

∴ $ش = \frac{٥}{\sqrt{٣}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ ث كجم

ومن ①، ②



∴ $س_١ = \frac{١}{٢} \times \frac{٥\sqrt{٣}}{٣} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$

، $ص_١ = ٤ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٥\sqrt{٣}}{٣} = \frac{٣}{٢}$

∴ $ر = \sqrt{\frac{٧٥}{٣٦} + \frac{٩}{٤}} = \frac{\sqrt{٣٩}}{٣}$ ث كجم

$ظا ل = \frac{٣}{٢} \times \frac{٦}{٥\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٥}$

∴ $ق(\hat{ل}) = ٤٦° ٦'$

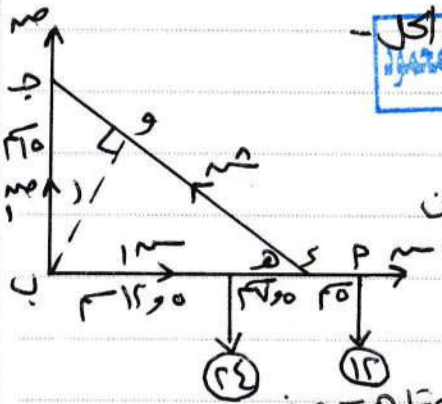
⑥ أب قضيب منتظم وزنه ٢٤ ث كجم وطوله ٢٥ سم يتصل أحد طرفيه بمفصل مثبت عند طرفه ب والمفصل مثبت في حائط رأسي. علق ثقل قدره ١٢ ث كجم من طرفه أ وحفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة حبل خفيف ربط أحد طرفيه بالقضيب عند د حيث أد = ٥ سم وثبت طرفه الآخر في نقطة جـ على الحائط تقع رأسياً فوق ب تماماً وتبعد عنها مسافة ١٥ سم

أوجد: ① مقدار الشد في الحبل

② مقدار رد فعل المفصل واتجاهه

صابر عبد الرحيم محمود

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ س = صفر

∴ $س_١ - ش \times جتا هـ = صفر$

∴ $س_١ = \frac{٤}{٥} ش$ ①

، ص = صفر

∴ $ص_١ + ش \times جا هـ - ١٢ - ٢٤ = صفر$

∴ $ص_١ + \frac{٣}{٥} ش = ٣٦$

∴ $ص_١ = ٣٦ - \frac{٣}{٥} ش$ ②

، $ع_ب = صفر$

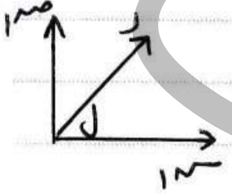
$-١٢ \times ٢٥ - ٢٤ \times ١٢,٥ + ش \times ب و = صفر$

حيث $ب و = \frac{٢٠ \times ١٥}{٢٥} = ١٢$ سم

∴ $١٢ ش = ٣٠٠ + ٣٠٠ = ٦٠٠$

∴ ش = ٥٠ ث كجم

ومن ①، ②



∴ $س_١ = \frac{٤}{٥} \times ٥٠ = ٤٠$

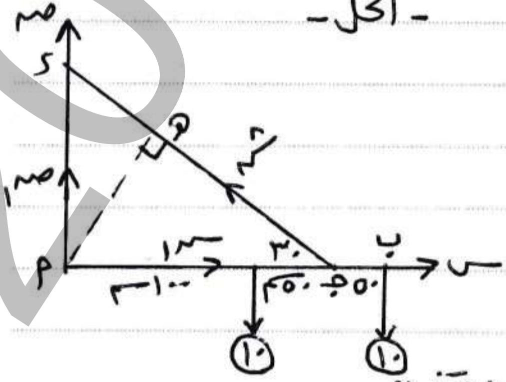
، $ص_١ = ٣٦ - \frac{٣}{٥} \times ٥٠ = ٦$

∴ $ر = \sqrt{١٦٠٠ + ٣٦} = ٢\sqrt{٤٠٩}$ ث كجم

∴ ظا ل = ٦/٤٠   ∴ ق(ل) = ٨° ٣٢َ

⑦ أب قضيب منتظم طوله ٢٠٠ سم ومقدار وزنه ١٠ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت في حائط رأسي ويحمل عند طرفه ب ثقلاً يساوي وزنه حفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بنقطة على القضيب تبعد ١٥٠ سم عن أ والطرف الآخر بنقطة على الحائط رأسياً أعلى أ ، فإذا كان الحبل يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° عين مقدار الشد فيه وكذلك مقدار قوة رد فعل المفصل.

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ س = صفر   ∴ س١ − ش جتا ٣٠ = صفر

∴ س١ = √٣/٢ ش ①

، ص = صفر

∴ ص١ + ش جا ٣٠ − ١٠ − ١٠ = صفر

∴ ص١ = ٢٠ − ١/٢ ش ②

، جـ أ = صفر

∴ −١٠ × ١٠٠ − ١٠ × ٢٠٠ + ش × أهـ = صفر

حيث أهـ = ١٥٠ جا ٣٠ = ٧٥

∴ ٧٥ ش = ٣٠٠٠

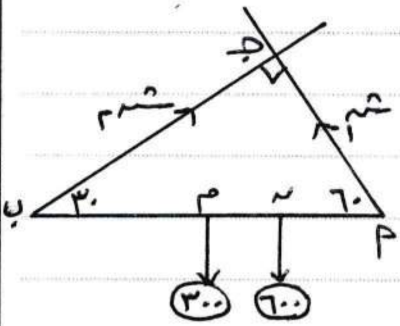
∴ ش = ٣٠٠٠/٧٥ = ٤٠ نيوتن

من ① ، ② ∴ س١ = √٣/٢ × ٤٠ = ٢٠√٣

، ص١ = ٢٠ − ٢٠ = صفر ∴ رد فعل المفصل أفقي ويساوي ٢٠√٣ نيوتن ويعمل في اتجاه أب

⑧ أب قضيب منتظم طوله ١٦٠ سم ووزنه ٣٠٠ ث جم علق في مسمار ثابت جـ بواسطة خيطين مربوطين في طرفيه أ، ب وعلق في إحدى نقطة ن ثقل مقداره ٦٠٠ ث جم . فإذا كان القضيب يتزن في وضع أفقي والخيطان أجـ ، بجـ يميلان على القضيب بزاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب فأوجد طول أن ومقدار الشد في الخيطين

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ س = صفر   ∴ ش٢ جتا ٣٠ − ش١ جتا ٦٠ = صفر

∴ √٣/٢ ش٢ = ١/٢ ش١

∴ ش١ = √٣ ش٢ ①

، ص = صفر

∴ ش١ جا ٦٠ + ش٢ جا ٣٠ = ٩٠٠

∴ √٣/٢ ش١ + ١/٢ ش٢ = ٩٠٠

∴ √٣ ش١ + ش٢ = ١٨٠٠ ②

من ① ، ②

∴ √٣ × √٣ ش٢ + ش٢ = ١٨٠٠

∴ ش٢ = ٤٥٠ ث جم ، ش١ = ٤٥٠√٣ ث جم

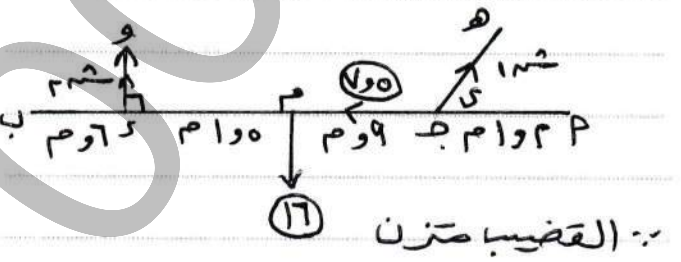
، جـأ = صفر

∴ ٦٠٠ أن + ٣٠٠ × ٨٠ − ٤٥٠ × ١٦٠ × ١/٢ = صفر

∴ أن = ٢٠ سم

⑨ $\overline{أب}$ قضيب منتظم كتلته ١٦ كجم وطوله ٢و٤ متر ، جـ ، ء نقطتان عليه بحيث أجـ = ٢و١ متر ، ب ء = ٦و٠ متر ، علق القضيب من جـ ، ء بواسطة خيطين $\overline{هـجـ}$ ، $\overline{وء}$ وأثرت قوة مقدارها ٥√٧ ث كجم في القضيب في الاتجاه $\overrightarrow{بأ}$ فجعلت الخيط $\overline{وء}$ رأسياً والخيط $\overline{هـجـ}$ مائلاً واتزن القضيب في وضع أفقي أوجد مقدار الشد في كل من الخيطين وميل الخيط $\overline{هـجـ}$ على الأفقي

- الحل -



∵ القضيب متزن

∴ س = صفر

∴ ش١ جتا ى − ٥√٧ = صفر

∴ ش١ جتا ى = ٥√٧ ①

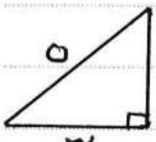
، ص = صفر

∴ ش١ جا ى + ش٢ = ١٦ ②

، جـجـ = صفر

∴ ١٦ × ٩و٠ − ش٢ × ٤و١ = صفر

∴ ش٢ = (١٦ × ٩و٠) / (٤و١) = ٦ ث كجم



ومن ② ∴ ش١ جا ى = ١٠ ③

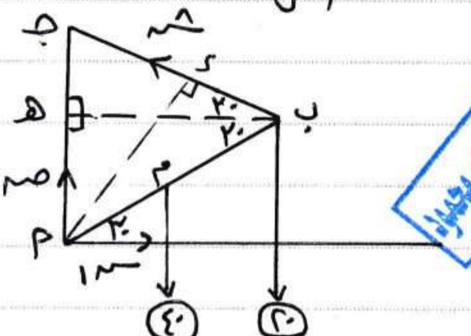
∴ (ش١ جا ى) / (ش١ جتا ى) = ١٠ / ٥√٧ ∴ ظا ى = ٤ / ٣

∴ ش١ × ٣/٥ = ٥√٧

∴ ش١ = ٥√٧ × ٥/٣ = ١٢و٥ ث كجم

⑩ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن يتصل بطرفه أ بمفصل مثبت في حائط رأسي ويحمل عند طرفه ب ثقلاً قدره ٢٠ نيوتن . حفظ القضيب في وضع يميل فيه على الأفقي لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساو للقضيب في الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة جـ من الحائط تقع رأسياً أعلى أ وعلى بُعد منها يساوي طول القضيب أوجد ① مقدار الشد في الحبل ② مقدار قوة رد فعل المفصل عند أ واتجاهه

- الحل -



نفرض أن طول القضيب = ل ، ∵ القضيب متزن

∴ س = صفر ∴ س١ − ش جتا ٣٠ = صفر

∴ س١ = (√٣/٢) ش ① ، ص = صفر

∴ ص١ + ش جا ٣٠ = ٦٠

∴ ص١ = ٦٠ − ½ ش ②

، جـم = صفر

∴ − ٤٠ × ½ ل جتا ٣٠ − ٢٠ ل جتا ٣٠ + ش × (√٣/٢) ل = صفر

∴ − ١٠√٣ ل − ١٠√٣ ل + (√٣/٢) ش ل = صفر

∴ ½ ش = ٢٠ ∴ ش = ٤٠ نيوتن

∴ س١ = (√٣/٢) × ٤٠ = ٢٠√٣

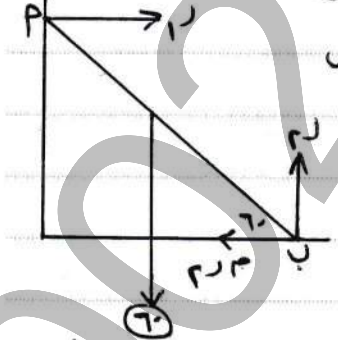
، ص١ = ٦٠ − ½ × ٤٠ = ٤٠

∴ ر = √(١٢٠٠ + ١٦٠٠) = ٢٠√٧ نيوتن

∴ ظا ل = ٤٠ / ٢٠√٣ = ٢√٣ / ٣

(١١) سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على حائط رأسي أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم على وشك الحركة عندما كان يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° فأوجد مقدار رد فعل الحائط ومقدار قوة الاحتكاك عند ب

-الحل-



معادلات الاتزان هي

ر١ = م ر٢

، ر٢ = ٦٠

∴ ر١ = ٦٠ م

، ج_ب = صفر

∴ ٦٠ × $\frac{1}{2}$ ل جتا٦٠ − ر١ × ل جا٦٠ = صفر

∴ ١٥ ل − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل × ٦٠ م = صفر

∴ ١٥ = ٣٠ $\sqrt{3}$ م ∴ م = $\frac{\sqrt{3}}{6}$

∴ قوة الاحتكاك = م ر٢

= $\frac{\sqrt{3}}{6}$ × ٦٠ = ١٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

ورد فعل الحائط = ر١ = ٦٠ م

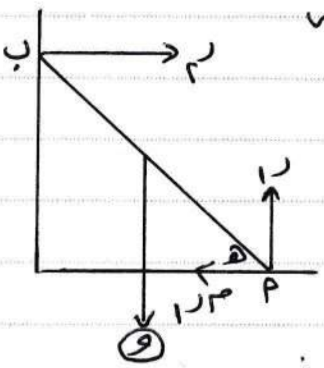
= $\frac{\sqrt{3}}{6}$ × ٦٠ = ١٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

(١٢) قضيب منتظم يرتكز في مستوى رأسي بطرفه العلوي على حائط رأسي أملس، وبطرفه السفلي على مستوى خشن أفقي بحيث يصنع القضيب مع الأفقي زاوية ظلها $\frac{3}{2}$ أوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقي عندما يكون على وشك الانزلاق

-الحل-

صابر عبد الرحيم محمود

معادلات الاتزان هي



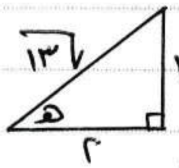
ر١ = و (١)

ر٢ = م ر١ (٢)

، ج_أ = صفر

∴ و × $\frac{1}{2}$ ل جتاهـ − ر٢ × ل جاهـ = صفر

ومن (١)، (٢) فإن



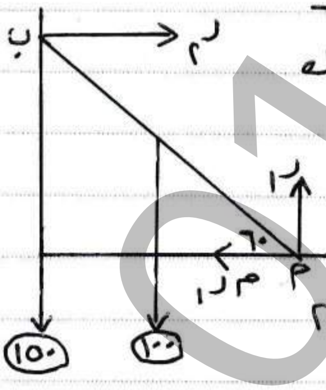
$\frac{1}{2}$ ر١ ل × $\frac{2}{\sqrt{13}}$ − م ر١ ل × $\frac{3}{\sqrt{13}}$ = ٠

∴ $\frac{1}{\sqrt{13}}$ = $\frac{3}{\sqrt{13}}$ م ∴ م = $\frac{1}{3}$

∴ معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقي = $\frac{1}{3}$

(١٣) أب سلم منتظم وزنه ١٠٠ ث كجم يرتكز بطرفه ب على حائط رأسي أملس ويرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وكان السلم يميل على الأرض بزاوية قياسها ٦٠° فإذا استطاع رجل وزنه ١٥٠ ث كجم الصعود حتى قمة السلم وأصبح السلم عند ذلك على وشك الحركة (الانزلاق) فأوجد معامل الاحتكاك بين الطرف أ للسلم ومستوى الأرض الأفقي

-الحل-



∴ السلم يكون على وشك الانزلاق عندما يصل الرجل إلى قمته

∴ معادلات الاتزان

ر٢ = م ر١ ، ر١ = ٢٥٠

، ج_أ = صفر

∴ ١٠٠ × $\frac{1}{2}$ ل جتا٦٠ + ١٥٠ ل جتا٦٠

− ر٢ × ل جا٦٠ = صفر

$\because 35 + 75 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ر٢

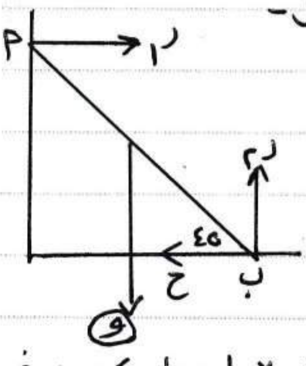
$\therefore$ ر٢ $= 100 \times \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{200}{3\sqrt{2}}$

، $\because$ ر٢ = م ر١ $\therefore \frac{200}{3\sqrt{2}} = $ م $\times 250$

$\therefore$ م $= \frac{200}{3\sqrt{2}} \times \frac{1}{250} = \frac{4\sqrt{2}}{15}$

(١٤) يستند قضيب منتظم وزنه و بأحد طرفيه على حائط رأسي أملس وبطرفه الثاني على أرض أفقية خشنة بحيث يقع في مستوى رأسي ويميل على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° إذا كان القضيب متزناً اثبت أن معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{2}$ وإذا كان معامل الاحتكاك يساوي $\frac{3}{4}$ فعين القوة الأفقية التي تؤثر عند طرف القضيب الملامس للأرض وتجعله على وشك الحركة
(١) نحو الحائط
(٢) لبعيداً عن الحائط

- الحل -



معادلات الاتزان

ر١ = ح

، ر٢ = و

، جـ ب = صفر

$\therefore$ و $\times \frac{1}{2}$ ل جتا٤٥ − ر١ $\times$ ل جا٤٥ = صفر

$\therefore \frac{1}{2}$ و − ر١ = صفر $\therefore$ ر١ $= \frac{1}{2}$ و

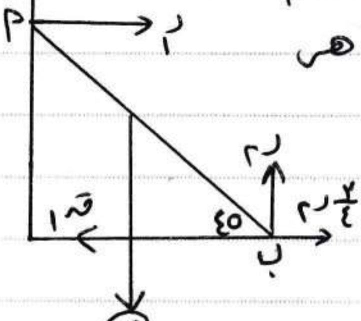
$\therefore$ ح $= \frac{1}{2}$ و

، $\because$ م ر٢ = م و

$\therefore$ لكي يكون القضيب متزن يجب أن يتحقق حس $\geq$ ح $\therefore$ م و $\geq \frac{1}{2}$ و

$\therefore$ م $\geq \frac{1}{2}$ أي أن معامل الاحتكاك لا يقل عن $\frac{1}{2}$

ونفرض القوة التي تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط = ق١



$\therefore$ معادلات الاتزان هي

ر١ $+ \frac{3}{4}$ ر٢ = ق١

، ر٢ = و

$\therefore$ ر١ $+ \frac{3}{4}$ و = ق١

، جـ ب = صفر

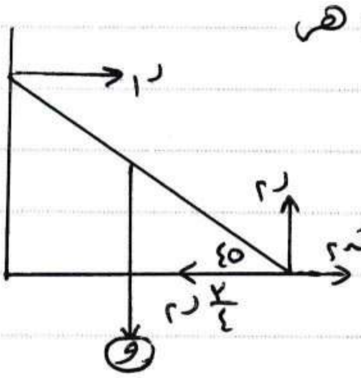
$\therefore$ و $\times \frac{1}{2}$ ل جتا٤٥ − ر١ $\times$ ل جا٤٥ = صفر

$\therefore$ ر١ $= \frac{1}{2}$ و

$\therefore$ ق١ $= \frac{1}{2}$ و $+ \frac{3}{4}$ و $= \frac{5}{4}$ و

ونفرض القوة التي تجعل القضيب على وشك الحركة لبعيداً عن الحائط = ق٢

$\therefore$ معادلات الاتزان هي



ر١ + ق٢ $= \frac{3}{4}$ ر٢

، ر٢ = و

$\therefore$ ر١ + ق٢ $= \frac{3}{4}$ و

، جـ ب = صفر

$\therefore$ و $\times \frac{1}{2}$ ل جتا٤٥ − ر١ $\times$ ل جا٤٥ = صفر

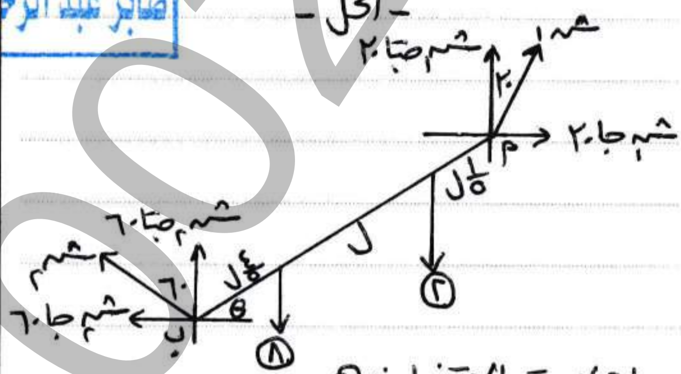
$\therefore$ ر١ $= \frac{1}{2}$ و

$\therefore \frac{1}{2}$ و + ق٢ $= \frac{3}{4}$ و

$\therefore$ ق٢ $= \frac{3}{4}$ و $- \frac{1}{2}$ و $= \frac{1}{4}$ و

(١٥) $\overline{أب}$ قضيب رفيع خفيف طوله ٢ل معلق في مستوى رأسي من طرفيه أ، ب بخيطين يميلان على الرأسي بزاويتين ٣٠°، ٦٠° على الترتيب. علق في القضيب الثقلان ٢، ٨ نيوتن على بعد من أ يساوي $\frac{1}{5}$ ل، $\frac{9}{5}$ ل أوجد في وضع التوازن مقدار الشد في الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الأفقي

- الحل -



معادلات الاتزان هي

ش١ جا٣٠ = ش٢ جا٦٠

∴ $\frac{1}{2}$ ش١ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ش٢ (١)

، ش١ جتا٣٠ + ش٢ جتا٦٠ = ١٠

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ش١ + $\frac{1}{2}$ ش٢ = ١٠ (٢)

من (١)، (٢)

∴ ش١ = ٥$\sqrt{3}$ نيوتن ، ش٢ = ٥ نيوتن

، جـب = صفر

∴ −٨ × $\frac{4}{5}$ل جتا θ − ٢ × $\frac{9}{5}$ ل جتا θ

− ٥$\sqrt{3}$ جا٣٠ × ٢ل جا θ + ٥$\sqrt{3}$ جتا٣٠

× ٢ل جتا θ = صفر ÷ ل جتا θ

∴ $-\frac{32}{5}$ − $\frac{18}{5}$ − ٥$\sqrt{3}$ ظا θ + ١٥ = صفر

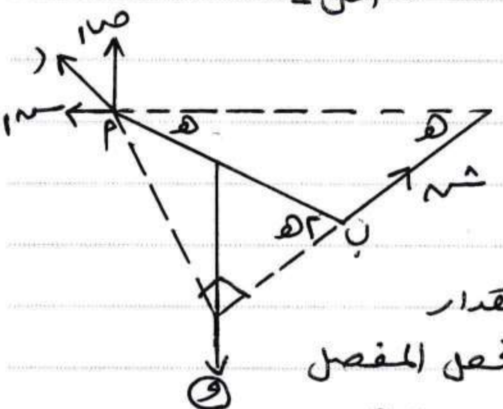
∴ ٥$\sqrt{3}$ ظا θ = ٥ ∴ ظا θ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ θ = ٣٠°

∴ القضيب يميل على الأفقي بزاوية = ٣٠°

(١٦) قضيب منتظم وزنه و يتصل أحد طرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط في نقطة في نفس المستوى الأفقي المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقي ساوي هـ اثبت أن رد فعل المفصل يساوي $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{٨ + قتا^2 هـ}$

- الحل -



نفرض أن مقدار مركبتي رد فعل المفصل عند أ هما س١، ص١

∴ معادلات الاتزان هي:

س١ = ش جتا هـ (١)

ص١ = و − ش جا هـ (٢)

، جـأ = صفر

∴ ش × ل جا٢هـ = و × $\frac{1}{2}$ ل جتا هـ

∴ ش × ٢جا هـ جتا هـ = $\frac{1}{2}$ و جتا هـ

∴ ش = $\frac{1}{4}$ و قتا هـ

وبالتعويض في (١)

∴ س١ = $\frac{1}{4}$ و ظتا هـ

وبالتعويض في (٢)

∴ ص١ = و − $\frac{1}{4}$ و = $\frac{3}{4}$ و

∴ ر = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$ = $\sqrt{\frac{1}{16} و^2 ظتا^2 هـ + \frac{9}{16} و^2}$

∴ ر = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{ظتا^2 هـ + ٩}$

∴ ر = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{(قتا^2 هـ - ١) + ٩}$

∴ ر = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{٨ + قتا^2 هـ}$

- تمارين عامة -

① $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم وطوله ٣ متر يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء ويستند بطرفه ب على حائط رأسي أملس حفظ توازنه بربط طرفه أ بحبل مربوط طرفه الآخر بنقطة على خط تقاطع الأرض مع الحائط تقع رأسياً أسفل ب فإذا كان السلم يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° ، صعد رجل عليه وزنه ٦٠ ث كجم فأوجد مقدار الشد في الحبل عندما يصل الرجل إلى نقطة تبعد مترين عن أ (٤٥ ث كجم)

② $\overline{أب}$ سلم طوله ٣ أمتار ومقدار وزنه ٣٥ ث كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسي أملس وبطرفه ب على مستوٍ أفقي أملس حفظ السلم في حالة توازن في مستوٍ رأسي بواسطة حبل يصل الطرف ب بنقطة في المستوى الأفقي تقع رأسياً أسفل أ. أوجد مقدار الشد في الحبل إذا علم أن بُعد الطرف ب عن الحائط ١,٨ متر وأن قوة وزن السلم تعمل في نقطة منه تبعُد ١,٢ متر عن ب. ماذا تكون الشد في الحبل إذا وقف رجل مقدار وزنه ٨٠ ث كجم على السلم عند منتصفه (١٠,٩٥ ، ٤٠,٩٥ ث كجم)

③ $\overline{أب جـ}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٣٠ ث كجم يدور حول مفصل عند طرفه أ ومربوط من نقطة ب بأحد طرفي سلك خفيف طرفه الآخر في نقطة على بُعد ٤٠ سم رأسياً أعلى نقطة أ بحيث كان القضيب أفقياً ، فإذا كان ب جـ = ١٠ سم فأوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل (٢٥ ، ٥√١٣ ث كجم ، ٤١ ٣٣°)

④ قضيب منتظم يرتكز في مستوٍ رأسي بطرفه العلوي على حائط رأسي أملس وبطرفه السفلي على مستوٍ أفقي معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوي $\frac{١}{٤}$ أوجد ظل الزاوية التي يصنعها القضيب مع الأفقي عندما يكون على وشك الانزلاق (٢)

⑤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه و يستند بطرفه أ على حائط رأسي أملس وبطرفه ب على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب يساوي $\frac{١}{٢}$ فاتزن القضيب في مستوٍ رأسي بحيث كان الطرف ب على بُعد ١٠٠ سم من الحائط . أوجد مقدار القوة الأفقية التي إذا أثرت عند الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط ($\frac{١٧}{٢٤}$ و)

الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

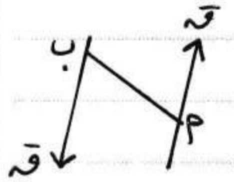
تعريف الازدواج:

هو مجموعة تتكون من قوتين:

① متساويتين في المقدار

② متضادتين في الاتجاه

③ لا يجمعهما خط عمل واحد



• عزم الازدواج:

هو قدرة القوة على احداث دوران للجسم حول نقطة ويرمز له بالرمز $\vec{ج}$

نظرية: عزم الازدواج هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التي تنسب اليها عزمي قوتيه، وهو يساوي عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأي نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

•• معيار عزم الازدواج

= معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج

•• اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر:

تعريف: يقال لجسم متماسك أنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين اذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفري

أي أن $\vec{ج}_1 + \vec{ج}_2 = \vec{0}$ أو $\vec{ج}_1 = -\vec{ج}_2$

•• نتيجة: يتزن جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر اذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات أي أن

$ج_1 + ج_2 + ج_3 + \cdots + ج_ن = صفر$

•• تكافؤ ازدواجين:

يتكافأ ازدواجان مستويان اذا تساوى متجها عزميهما أي أن

$\vec{ج}_1 = \vec{ج}_2$

- أمثلة محلولة -

① أثرت القوتان $\vec{ق}_1 = ٤\vec{س} - ٣\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2$ في النقطتين أ(٥، ٨) ، ب(٣، ٥) على الترتيب فكونتا ازدواجاً. فأوجد متجه عزم هذا الازدواج وذراع العزم

- الحل -

$\because \vec{ق}_1 = ٤\vec{س} - ٣\vec{ص}$

$\therefore \vec{ق}_2 = -٤\vec{س} + ٣\vec{ص}$

، $\because \vec{ب أ} = أ - ب = (٥، ٨) - (٣، ٥)$

$\therefore \vec{ب أ} = (٢، ٣)$

$\therefore \vec{ج} = \vec{ب أ} \times \vec{ق}_1 = (٢، ٣) \times (٤، -٣)$

$= (-٦ - ١٢)\vec{ع} = -١٨\vec{ع}$

$\therefore \|\vec{ج}\| = ١٨$

، $\because \|\vec{ق}_1\| = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$

$\therefore ل = \frac{\|\vec{ج}\|}{\|\vec{ق}_1\|} = \frac{١٨}{٥} = ٣٫٦$ وحدة طول

② أثرت القوتان $(أ\vec{س} + ب\vec{ص})$ ، $(٥\vec{س} - ٢\vec{ص})$ تؤثران في النقطتين ج ، د على الترتيب حيث ج = (-٢، ١) ، د = (٣، ١) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجاً. أوجد قيمة كل من أ ، ب ثم أوجد عزم الازدواج، وأوجد البعد العمودي بين خطي عمل القوتين

- الحل -

$\because \vec{ق}_1$ ، $\vec{ق}_2$ تكونان ازدواجاً $\therefore \vec{ق}_1 = -\vec{ق}_2$

$\therefore أ\vec{س} + ب\vec{ص} = -٥\vec{س} + ٢\vec{ص}$

$\therefore أ = -٥$ ، $ب = ٢$

، $\overrightarrow{دجـ}$ = (−٢ ، ١) − (٣ ، ١) = (−٥ ، ٠)

، $\overrightarrow{ج}$ = $\overrightarrow{دجـ}$ × $\overrightarrow{ق_١}$ = (−٥ ، ٠) × (−٥ ، ٢)

= −١٠ $\overrightarrow{ع}$

، ‖$\overrightarrow{ج}$‖ = ١٠

∴ ل = $\frac{‖\overrightarrow{ج}‖}{‖\overrightarrow{ق_١}‖}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٥+٤}}$ = $\frac{١٠\sqrt{٢٩}}{٢٩}$

③ أثرت القوتان (٣ $\overrightarrow{س}$ − ٥ $\overrightarrow{ص}$) ، (−٣ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$) نيوتن فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، متجها موضعهما (٦ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$) ، (٤ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$) متر برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه

- الحل -

∵ $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$ = (صفر ، صفر)

أى أن $\overrightarrow{ق_١}$ = − $\overrightarrow{ق_٢}$ ①

، $\overrightarrow{بأ}$ = (٦ ، ١) − (٤ ، ١) = (٢ ، ٠)

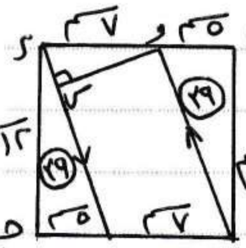
، $\overrightarrow{ج_ب}$ = $\overrightarrow{بأ}$ × $\overrightarrow{ق_١}$

= (٢ ، ٠) × (٣ ، −٥) = −١٠ $\overrightarrow{ع}$ ②

من ① ، ② ينتج أن المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = −١٠ $\overrightarrow{ع}$

④ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب جـ ، و ∈ أ د بحيث ب هـ = د و = ٧ سم . أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى معيار كل من قوتيه ٣٩ ث جم وتؤثران فى $\overleftarrow{بو}$ ، $\overleftarrow{دهـ}$

- الحل -



∵ ق(∠و ب س) = ق(∠د هـ جـ)

∵ د هـ = $\sqrt{١٤٤+٢٥}$ = ١٣ سم

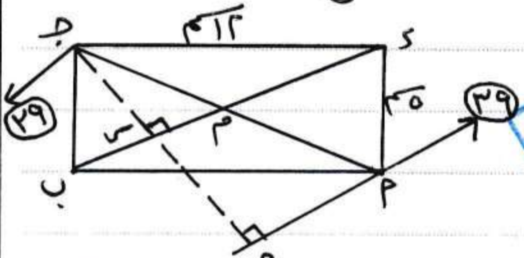
∴ جا(∠د هـ جـ) = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ و س = ٧ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{٨٤}{١٣}$

∴ ع = ٣٩ × $\frac{٨٤}{١٣}$ = ٢٥٢ ث جم.سم

⑤ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، أ د = ٥ سم أثرت فى أ ، جـ قوتان معيار كل منهما ٣٩ نيوتن وخطا عملهما فى اتجاه $\overleftarrow{بد}$ ، $\overleftarrow{دب}$ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الحادث

- الحل -



∵ م منتصف $\overline{أجـ}$ ، س منتصف $\overline{صجـ}$

، $\overline{جـس}$ ⊥ $\overline{دب}$

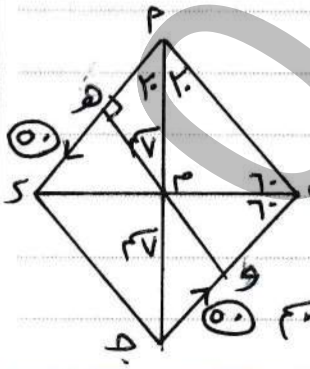
∴ جـ س = $\frac{١٢ × ٥}{١٣}$ = $\frac{٦٠}{١٣}$

∴ جـ ص = $\frac{١٢٠}{١٣}$

∴ ع = ٣٩ × $\frac{١٢٠}{١٣}$ = ٣٦٠ نيوتن.سم

⑥ أ ب جـ د معين فيه طول قطره $\overline{أجـ}$ = ١٤ سم ، ق(∠أ) = ٦٠° أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى معيار كل من قوتيه ٥٠ ث جم وتؤثران فى $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{جـب}$

- الحل -



∵ هـ و = ٢ م هـ

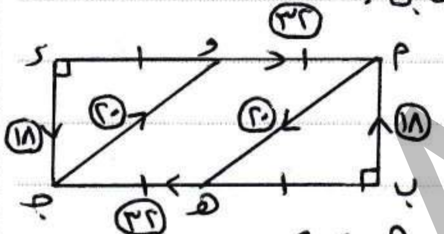
= ٢ م أ جا ٣٠°

= ٢ × ٧ × $\frac{١}{٢}$

= ٧ سم

∴ ع = ٥٠ × ٧ = ٣٥٠ ث جم.سم

⑦ في الشكل المقابل :



أ ب جـ د مستطيل هـ ، و منتصفات $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أد}$ على الترتيب

أب = ٦ سم ، بجـ = ١٦ سم . فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها واتجاهاتها كما بالشكل . اثبت أن هذه المجموعة متزنة

-الحل-

القوتان (٣٢ ، ٣٢) تكونان ازدواجا قياسه الجبري هو

$ج_1 = -٣٢ \times ٦ = -١٩٢$ نيوتن.سم

، القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجا قياسه الجبري هو

$ج_2 = -٢٠ \times ٤٫٨ = -٩٦$ نيوتن.سم

، القوتان (١٨ ، ١٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري هو

$ج_3 = ١٨ \times ١٦ = ٢٨٨$ نيوتن.سم

$\therefore ج = ج_1 + ج_2 + ج_3$

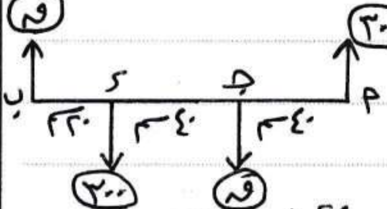
$= -١٩٢ - ٩٦ + ٢٨٨$

= صفر

∴ المجموعة متزنة

⑧ $\overline{أب}$ قضيب مهمل الوزن طوله ١٠٠ سم ، جـ ، د نقطتان عليه تبعدان عن الطرف أ مسافة ٤٠ ، ٨٠ سم على الترتيب أثرت قوى مقاديرها ٣٠٠ ، ق ، ٣٠٠ ، ق نيوتن عند النقط أ ، جـ ، د ، ب على الترتيب عمودية على القضيب بحيث كانت القوتان عند أ ، ب في اتجاه واحد والقوتان الأخريان في الاتجاه المضاد . عين قيمة ق بحيث يتوازن القضيب .

-الحل-



القوتان (٣٠٠ ، ٣٠٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري هو

$ج_1 = ٣٠٠ \times ٨٠ = ٢٤٠٠٠$ نيوتن.سم

القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري هو

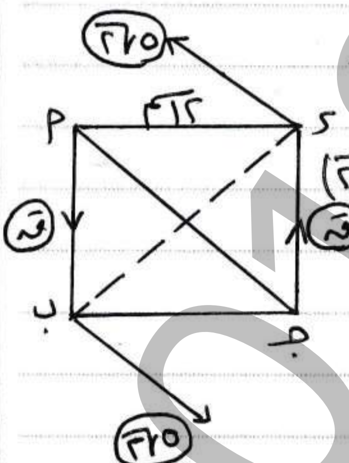
$ج_2 = -ق \times ٦٠ = -٦٠ ق$

∵ القضيب متزن $\therefore ج_1 = -ج_2$

∴ ٢٤٠٠٠ = ٦٠ ق ∴ ق = ٤٠٠ نيوتن

⑨ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم رؤوسه أ ، ب ، جـ ، د في ترتيب دوري عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقدارهما $٥\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ث جم إحداهما في الرأس ب في اتجاه $\overleftarrow{أجـ}$ والأخرى في الرأس د في اتجاه $\overleftarrow{جـأ}$ أوجد قوتين متساويتين في المقدار تؤثران في $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ وتكونان ازدواجاً يكافئ الازدواج المكون من القوتين المعلومتين .

-الحل-



∵ ب د = $١٢\sqrt{٢}$ سم

∵ القوتان ($٥\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$) تكونان ازدواجاً

$\therefore ج_1 = ٥\sqrt{٢} \times ١٢\sqrt{٢}$

= ١٢٠ ث جم.سم

$\therefore ج_1 = ج_2$

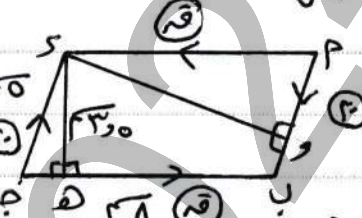
∴ ١٢ ق = ١٢٠

∴ ق = ١٠ ث جم

∴ القوتان ١٠ ، ١٠ ث جم

(١٠) ٩ب جـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ب = ٥سم ، ب جـ = ٨سم ، طول العمود المرسوم من ء على ب جـ = ٣,٥ سم أثرت قوتان مقدارهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن في ٩ب ، جـ ء أوجد معيار كل من القوتين اللتين تؤثران في جـ ب ، ٩ء وتحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين

- الحل -



∵ ب جـ × ء هـ = ٩ب × ء و

∴ ٨ × ٣,٥ = ٥ × ء و

∴ ء و = ٥,٦ سم

∵ القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_1$ = −٢٠ × ٥,٦ = −١١٢ نيوتن.سم

القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً

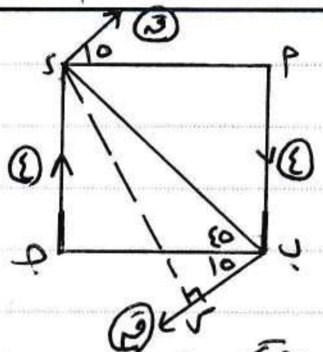
∴ $ج_2$ = ق × ٣,٥ = ٣,٥ ق

∵ $ج_1$ = −$ج_2$ ∴ −١١٢ = −٣,٥ ق

∴ ق = ٣٢ نيوتن

(١٤) ٩ب جـ ء مربع طول ضلعه ١متر تؤثر قوتان معيار كل منهما ٤ ث كجم في ٩ب ، جـ ء كما تؤثر قوتان معيار كل منهما ق ث كجم عند ء ، ب بحيث تصنع الأولى مع ء٩ ، الثانية مع ب جـ زاويتين متساويتين في القياس قياس كل منهما ٤٥° عين قيمة ق حتى يتكافئ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الآخريين .

- الحل -



∵ ب ء = √٢

، ء س = ب ء جا ٦٠

∴ ء س = $\frac{\sqrt{6}}{2}$

∵ القوتان (٤ ، ٤) تكونان ازدواجاً

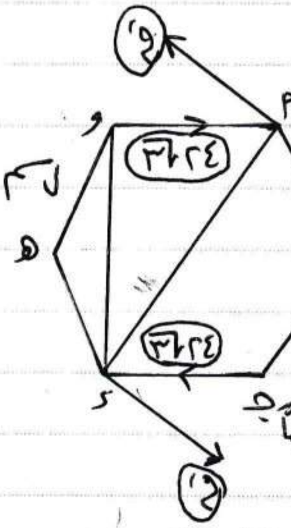
∴ $ج_1$ = −٤ × ١ = −٤ ث كجم.م

∵ $ج_1$ = $ج_2$ ∴ −٤ = −ق × $\frac{\sqrt{6}}{2}$

∴ ق = $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ث كجم

(١٢) ٩ب جـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ل سم . أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٤√٣ نيوتن في جـ ء ، و٩ . أوجد القوتين المؤثرتين في ٩ ، ء وعموديتين على ٩ء بحيث تحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين

- الحل -



من خواص الشكل السداسي المنتظم

و ء = √٣ ل ،

٩ء = ٢ل

القوتان (٢٤√٣ ، ٢٤√٣) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_1$ = −٢٤√٣ × √٣ ل

∴ $ج_1$ = −٧٢ ل نيوتن.سم

، القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً

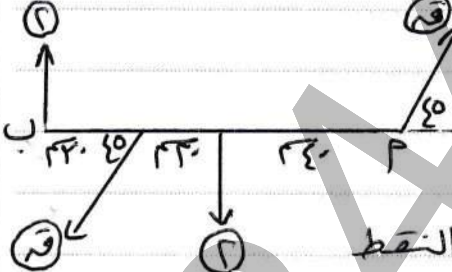
∴ $ج_2$ = ق × ٢ل = ٢ق ل

، ∵ $ج_1$ = −$ج_2$

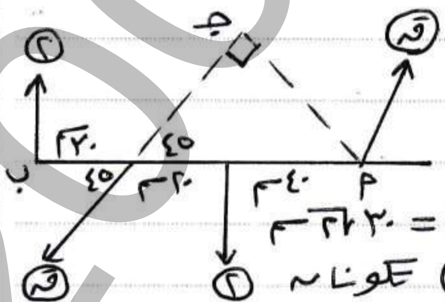
∴ −٧٢ ل = −٢ق ل

∴ ق = ٣٦ نيوتن

(١٣) أثر ازدواجان مستويان فى قضيب أب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين ق ، ق ث كجم والثانى من قوتين ٢ ، ٢ ث كجم وتؤثر عند النقط وفى الاتجاهات الموضحة فى الشكل المقابل ، عين قيمة ق التى تجعل الجسم يتزن تحت تأثير **الازدواجين**



- الحل -



أجـ = ٦٠ جا٤٥ = $٣٠\sqrt{٢}$ سم

القوتان (٢ ، ٢) تكونان ازدواجاً ∴ ج١ = -٢ × ٥٠ = -١٠٠ ث كجم . سم

والقوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً

∴ ج٢ = ق × $٣٠\sqrt{٢}$ = $٣٠\sqrt{٢}$ ق

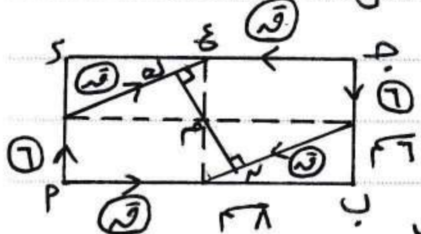
، ∵ ج١ = - ج٢

∴ -١٠٠ = $-٣٠\sqrt{٢}$ ق

∴ ق = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٣}$ ث كجم

(١٤) أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع أب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ق ، ق ، ق ، ٦ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات أس ، جـع ، ص س ، ل ع ، جـ ص ، أل على الترتيب . اذا اتزنت مجموعة القوى أوجد قيمة ق

- الحل -



من هندسة الشكل

م ن = $\frac{٣ \times ٤}{٥}$ = ٢,٤ سم

، ن ل = ٤,٨ سم

القوتان (٦ ، ٦) تكونان ازدواجاً

∴ ج١ = -٦ × ٨ = -٤٨ نيوتن . سم

والقوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً

∴ ج٢ = ق × ٦ = ٦ ق نيوتن . سم

والقوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً

∴ ج٣ = - ق × ٤,٨ = -٤,٨ ق

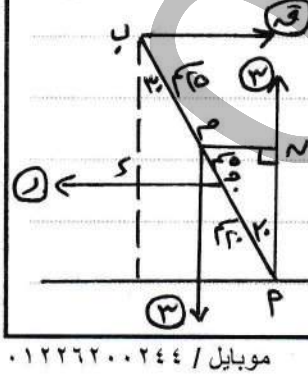
∵ المجموعة متزنة ∴ ج١ + ج٢ + ج٣ = صفر

∴ -٤٨ + ٦ ق - ٤,٨ ق = صفر

∴ ١,٢ ق = ٤٨ ∴ ق = ٤٠ نيوتن

(١٥) أب قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ٣ نيوتن يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى يمر بثقب صغير فى القضيب عند جـ حيث أجـ = ٢٠ سم ، أثرت عليه عند أ قوة قدرها ٣ نيوتن رأسياً إلى أعلى ، أوجد القوة الأفقية التى إذا أثرت على القضيب عند ب تجعله يتزن بحيث يكون القضيب مائلاً على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° وتكون ب أعلى من أ وكم يكون مقدار رد فعل المسمار حينئذ

- الحل -



القوتان (٣ ، ٣) تكونان ازدواجاً

∴ ج١ = ٣ × م م

= ٣ × أ م جا ٣٠

$\therefore$ ج$_1$ = ٣ × ٢٥ × ½ = ٣٧,٥ نيوتن.سم

$\therefore$ القوتان (ق ، ر) تكونان ازدواجاً

$\because$ ق = ر

ذراع العزم = ب ى = ٣٠ جتا ٣٠

$\therefore$ ب ى = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم

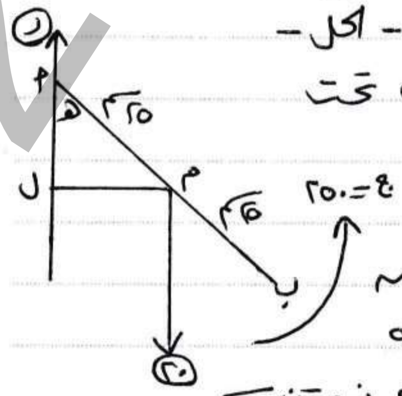
$\therefore$ ج$_2$ = − ق × ١٥ $\sqrt{٣}$

$\because$ ج$_1$ = − ج$_2$ $\therefore$ ٣٧,٥ = ١٥ $\sqrt{٣}$ ق

$\therefore$ ق = ر = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$ نيوتن

(١٦) أب قضيب طوله ٥٠سم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر في منتصفه ، يتحرك في مستوى رأسي حول مفصل ثابت عند طرفه أ أثر على القضيب ازدواج في مستوى رأسي معيار عزمه ٢٥٠ نيوتن.سم أوجد رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسي في وضع التوازن

- الحل -



$\because$ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

$\therefore$ القوتان (٢٠ ، ر) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري = − ٢٥٠ نيوتن.سم

$\therefore$ ر = ٢٠ نيوتن رأسياً لأعلى

$\therefore$ − ٢٠ × أ ل = − ٢٥٠

$\therefore$ أ ل = ١٢,٥

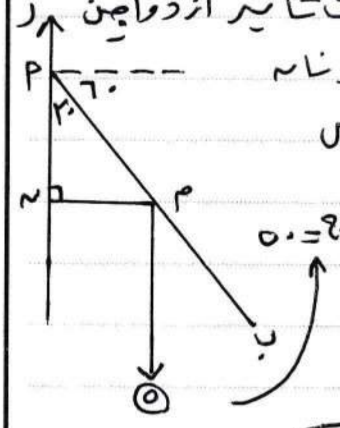
$\therefore$ جا هـ = $\frac{١٢,٥}{٢٥}$ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ هـ = ٣٠° ، ١٥٠°

$\therefore$ القضيب يميل على الرأسي لأسفل بزاوية ٣٠° أو ١٥٠°

(١٧) أب قضيب منتظم وزنه ٥ نيوتن يتحرك في مستوى رأسي حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب في نفس مستويه ازدواج معيار عزمه ٥٠ نيوتن.سم فاتزن القضيب في وضع يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد طول القضيب وكذلك رد فعل المفصل في وضع الاتزان

- الحل -



$\because$ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

$\therefore$ القوتان (٥ ، ر) تكونان ازدواجاً قياسه الجبري = − ٥٠ نيوتن.سم

$\therefore$ ر = ٥ رأسياً لأعلى

$\therefore$ − ٥ × أ ن = − ٥٠

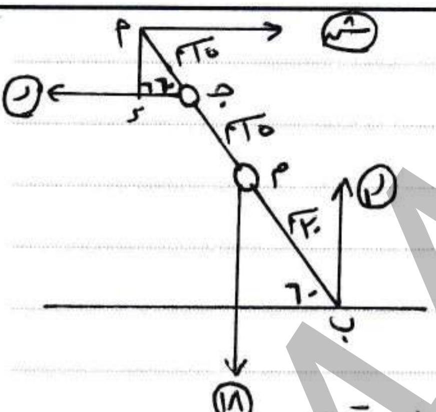
$\therefore$ أ ن = ١٠ سم

$\therefore$ أ م = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم

$\therefore$ أ ب = طول القضيب = ٤٠ سم

(١٨) أب قضيب طوله ٦٠سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه يمكن للقضيب الدوران بسهولة في مستوى رأسي حول مسمار أفقي ثابت يمر بثقب صغير في القضيب عند النقطة جـ التي تبعد ١٥سم عن أ فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقي أملس وشد الطرف أ أفقياً بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب . أوجد الشد في الحبل ورد فعل المسمار علماً بأن القضيب يتزن في وضع يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠°

الحل ↓



∵ القضيب متزن تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (ر١، ١٨) تكونان ازدواجاً

∴ ر١ = ١٨ نيوتن

∴ ج١ = ١٨ × ٢٠ جا ٦٠ = ٢٧٠ نيوتن.سم

∴ القوتان (ش، ر) تكونان ازدواجاً

∵ م د = ١٥ جا ٦٠ = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ج٢ = − ش × $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$

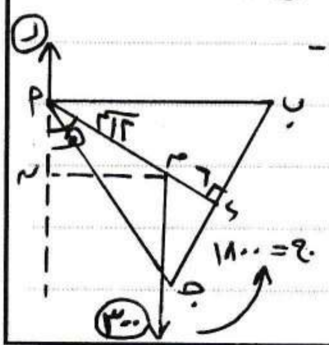
، ∵ ج١ = − ج٢

∴ ٢٧٠ = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ش

∴ ش = ر = ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن

(١٩) م ب جـ صفيحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه ١٨سم ووزنها ٣٠٠ جم ويؤثر عند نقطة تلاقي متوسطات المثلث والصفيحة مثقوبة ثقباً صغيراً بالقرب من الرأس م ومعلقة من هذا الثقب في مسمار أفقي بحيث يكون مستواها رأسياً أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٨٠٠ ث جم.سم في مستويها، أوجد قياس زاوية ميل $\overline{مب}$ على الأفقي في وضع التوازن

- الحل -



∵ م د = ١٨سم

∴ م م = ١٢سم

∵ الصفيحة متزنة

تحت تأثير ازدواج

والقوتان (٣٠٠، ر)

∴ القوتان (٣٠٠، ر) تكونان ازدواج

القياس الجبري لعزمه = −١٨٠٠ ث جم.سم

∴ ر = ٣٠٠ ث جم

∴ −١٨٠٠ = −٣٠٠ م ن

∴ م ن = ٦سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$　∴ ق(هـ) = ٣٠°، ١٥٠°

إذا كان هـ = ٣٠°　، ∵ ق(م م̂ جـ) = ٣٠°

∴ $\overline{مجـ}$ رأسي لأسفل أي أن $\overline{مب}$ يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

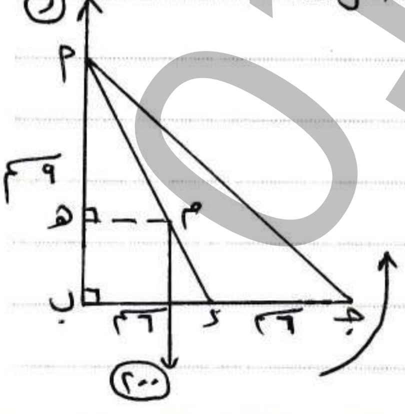
وإذا كان هـ = ١٥٠°

، ∵ ق(د م̂ ب) = ٣٠°

∴ $\overline{مب}$ رأسي لأعلى أي أن $\overline{مب}$ يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٩٠°

(٢٠) م ب جـ صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية في ب ، م ب = ٩سم ، ب جـ = ١٢سم ووزنها ٢٠٠ ث جم يؤثر في نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، علقت من الرأس م بحيث كان مستواها رأسياً ، أوجد معيار عزم الازدواج الذي إذا أثر عليها في مستويها يجعل الحرف $\overline{مب}$ رأسياً أوجد كذلك معيار عزم الازدواج الذي يجعل $\overline{مب}$ أفقياً . وإذا علقت الصفيحة من الرأس جـ فكم يكون القياس الجبري لعزم الازدواج الذي يجعل $\overline{بجـ}$ رأسياً

- الحل -



(١) $\overline{مب}$ رأسياً

∵ $\overline{م هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ $\frac{م م}{م د} = \frac{م هـ}{د ب}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{م هـ}{٦}$

∴ م هـ = ٤سم

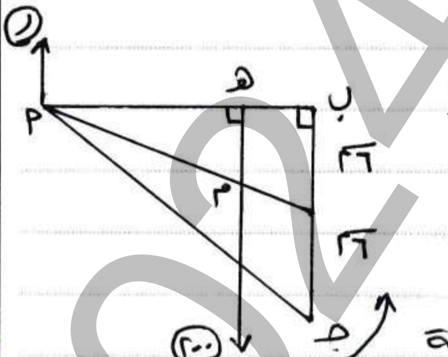
∵ الصفيحة متزنة

∴ القوتان (٢٠٠ ، ر) تكونان ازدواجاً

∴ ع = −٢٠٠×٤ = −٨٠٠ ث جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج الذى يجعل أب رأسياً = ٨٠٠ ث جم.سم

(٢) أب أفقياً



∵ هـ م // ب جـ

∴ $\frac{\text{أهـ}}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∴ أهـ = ٦ سم

∵ الصفيحة متزنة

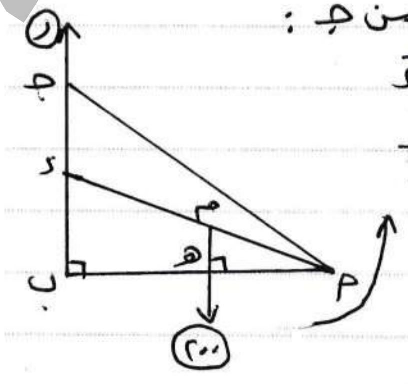
∴ القوتان (٢٠٠ ، ر) تكونان ازدواجاً

∴ ع = −٢٠٠×٦ = −١٢٠٠

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يجعل أب أفقياً = −١٢٠٠ ث جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١٢٠٠ ث جم.سم

(٣) عند التعليق من جـ :



∵ م هـ // ب د

∴ $\frac{\text{هـب}}{\text{أب}} = \frac{\text{مد}}{\text{أد}}$

∴ $\frac{\text{هـب}}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ هـب = ٣ سم

∵ الصفيحة متزنة

∴ القوتان (٢٠٠ ، ر) تكونان ازدواجاً

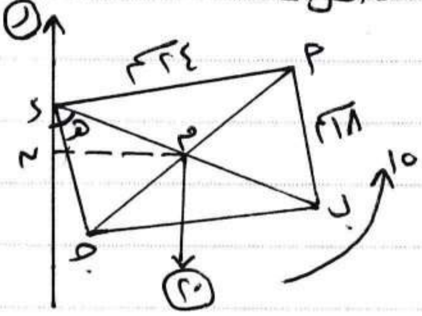
∴ ع = −٢٠٠×٣ = −٦٠٠ ث جم.سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يجعل ب جـ رأسياً = −٦٠٠ ث جم.سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٦٠٠ ث جم.سم

(٢١) أ ب جـ د صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه أب = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين. علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسياً. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن.سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل د ب على الرأسى فى وضع التوازن

-الحل-



∵ ب د = $\sqrt{(٢٤)^2 + (١٨)^2}$ = ٣٠ سم

∴ م د = ١٥ سم

∴ م ن = ١٥ جا هـ

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواجين

∴ القوتان (ر ، ٢٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى = −١٥٠ نيوتن.سم

∴ −١٥٠ = −٢٠ × م ن

∴ −١٥٠ = −٢٠ × ١٥ جا هـ

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق(هـ) = ٣٠° ، ١٥٠°

∴ قياس زاوية ميل ب د على الرأسى لأسفل تساوى ٣٠° ، ١٥٠°

- تمارين عامة -

① أثرت القوتان $\overrightarrow{ق_1} = أ\,\overrightarrow{س} - 4\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -2\,\overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص}$ فى النقطتين ج(-1، 2) ، د(1، 3) على الترتيب فكونت القوتان ازدواجاً ، أوجد قيمتى أ ، ب ومتجه عزم الازدواج والبعد العمودى بين القوتين

(2 ، 4 ، $10\,\overrightarrow{ع}$ ، $\sqrt{5}$ وحدة طول)

② تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق_1} = م\,\overrightarrow{س} + 2\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = 3\,\overrightarrow{س} + ن\,\overrightarrow{ص}$ عند النقطتين أ = (1، 1) ، ب = (-1، -2) على الترتيب اذا كونت القوتان ازدواجاً فأوجد قيمة كل من م ، ن ثم احسب طول العمود المرسوم من نقطة ب إلى خط عمل القوة $\overrightarrow{ق_1}$

(-3 ، -2 ، $\sqrt{13}$ وحدة طول)

③ أ ب ج د مربع طول ضلعه 18 سم فرضت النقطتان هـ ، و على القطر ب د حيث ق(∠ ج هـ د) = ق(∠ أ و ب) = 60° أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى معيار كل من قوتيه 10 ث كجم وتؤثران فى $\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{هـ ج}$

($-90\sqrt{6}$ ث كجم . سم)

④ أ ب ج د هـ و سداسى منتظم طول ضلعه 10 سم أثرت قوة مقدارها 8 نيوتن فى $\overrightarrow{ج هـ}$ كما أثرت فى الرأس أ قوة أخرى لها نفس المعيار وفى اتجاه $\overrightarrow{هـ ج}$ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج الحادث

(120 نيوتن . سم)

⑤ أ ب ج د مربع طول ضلعه 8 م أثرت قوتان مقدار كل منهما 20 ث جم فى $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ج د}$ أوجد مقدار كل من القوتين المتساويتين فى المعيار المؤثرتين فى أ ، ج موازيتين للمستقيم $\overleftrightarrow{ب د}$ وتحدثان اتزاناً مع القوتين المعلومتين

($10\sqrt{2}$ ، $10\sqrt{2}$ ث جم)

⑥ أ ب قضيب منتظم طوله 60 سم ووزنه 10 ث كجم يؤثر فى منتصفه ويتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ أثر على القضيب ازدواج فى مستوى رأسى القياس الجبرى لعزمه 150 ث كجم . سم برهن على أن رد فعل المفصل عند أ يساوى وزن القضيب وأوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى وضع التوازن

(ر = 10 ث كجم ، 60°)

⑦ أ ب ج صفيحة على شكل مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ ج = 13 سم ، ب ج = 10 سم تدور بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل مثبت عند أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج معيار عزمه 800 ث جم . سم فاتزنت فى وضع كان فيه أحد الساقين رأسياً . فأوجد وزن الصفيحة علماً بأنه يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث

(260 ث جم)

الازدواج المحصل

تعريف مجموع ازدواجين مستويين:

مجموع ازدواجين مستويين هو ازدواج واحد يسمى بالازدواج المحصل عزمه يساوي مجموع عزمي هذين الازدواجين أي أن

$\vec{ج} = \vec{ج}_1 + \vec{ج}_2$ أو

$\vec{ج} = \vec{ج}_1 + \vec{ج}_2 + \vec{ج}_3 + \dots + \vec{ج}_ن$

•• نظام القوى المستوية الذي يكافئ ازدواجاً:

يقال لعدة قوى مستوية $\vec{ق}_1 ، \vec{ق}_2 ، \dots ، \vec{ق}_ن$ إنها تكافئ ازدواجاً إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً:

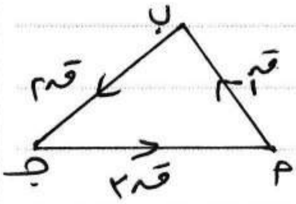
① انعدام محصلة القوى ح = صفر

② مجموع عزوم القوى حول أي نقطة لا ينعدم

•• قاعدة هامة:

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية في نقطة في جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوي ضعف مساحة سطح المثلث × م حيث

$م = \frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$ أي أن:



∵ $\vec{ق}_1 ، \vec{ق}_2 ، \vec{ق}_3$ ثلاث قوى يمثلها تمثيلاً تاماً أضلاع Δ أ ب جـ

وكان $\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{ق_3}{جـ أ} = م$

فإن المجموعة تكافئ ازدواج

معيار عزمه = ٢ × مساحة Δ أ ب جـ × م

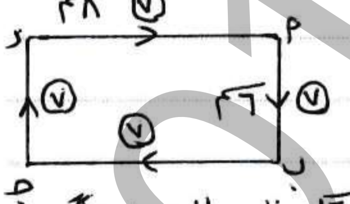
•• تعميم: إذا أثرت عدة قوى مستوية في جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مضلع مقفل مأخوذة في ترتيب دوري واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوي ضعف مساحة سطح المضلع في عدد وحدات القوة التي تمثلها وحدة الأطوال

•• قاعدة: إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط في مستواها ليست على استقامة واحدة يساوي مقداراً ثابتاً (لا يساوي الصفر) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبري لعزمه يساوي هذا المقدار الثابت

- أمثلة محلولة -

① أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٧ ث كجم في كل من $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{دأ}$ على الترتيب. اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد القياس الجبري لعزمه

- الحل -



∵ القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_1 = -٧ \times ٨ = -٥٦$

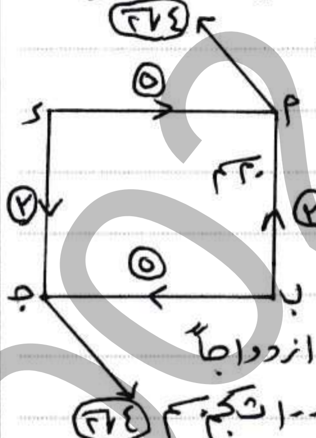
، ∵ القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_2 = -٧ \times ٦ = -٤٢$ ث كجم سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه $= ج_1 + ج_2 = -٥٦ - ٤٢ = -٩٨$ ث كجم.سم

② أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٣٠سم أثرت القوى التي مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم في ب أ ، ب جـ ، د جـ ، د أ على الترتيب كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٦√٢ ث كجم في الرأسين أ ، جـ في اتجاه ب د ، د ب على الترتيب أوجد معيار الازدواج المحصل الذي يكافئ المجموعة

- الحل -



∵ القوتين (٢ ، ٢) تكونان ازدواجاً

∴ ج١ = ٢ × ٣٠

= ٦٠ ث كجم.سم

∵ (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً

∴ ج٢ = − ٥ × ٣٠ = − ١٠٠ ث كجم.سم

∵ القوتان (٤√٢ ، ٤√٢) تكونان ازدواجاً ∴ ج٣ = ٤√٢ × ٣٠√٢

= ١٦٠ ث كجم.سم

∴ ج = ج١ + ج٢ + ج٣

= ٦٠ − ١٠٠ + ١٦٠ = ١٢٠ ث كجم.سم

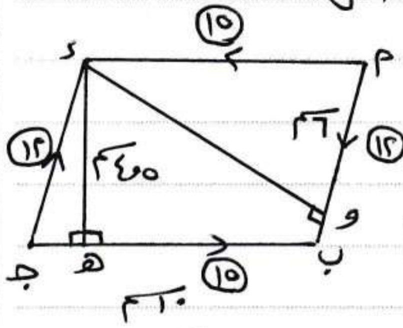
---

③ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم ، وطول العمود الساقط من الرأس د على ب جـ = ٤٫٥ سم أثرت القوى ١٢ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٥ ث كجم في أ ب ، أ د ، جـ د ، جـ ب على الترتيب كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودي على المستوى أ ب جـ د ومعيار عزمه ٧٢٫٥ ث كجم.سم فأوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل إذا كان:

① اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى في نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقدارهما ١٢ ، ١٢ ث كجم

② اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى في نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقدارهما ١٥ ، ١٥ ث كجم

- الحل -



∵ ٦ × د و = ١٠ × ٤٫٥

∴ د و = ٧٫٥ سم

∵ القوتين (١٥ ، ١٥) تكونان ازدواجاً

∴ ج١ = ١٥ × ٤٫٥ = ٦٧٫٥ ث كجم.سم

∵ القوتين (١٢ ، ١٢) تكونان ازدواجاً

∴ ج٢ = − ١٢ × ٧٫٥ = − ٩٠ ث كجم.سم

① ج = ج١ + ج٢ + ج٣

= ٦٧٫٥ − ٩٠ − ٧٢٫٥ = − ٩٥ ث كجم.سم

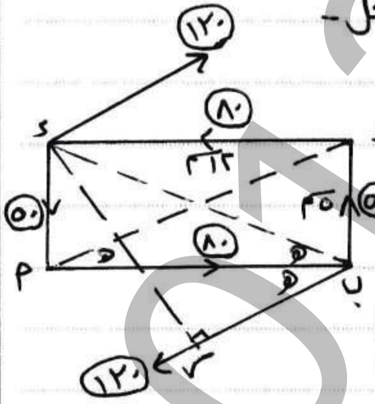
② ج = ج١ + ج٢ + ج٣

= ٦٧٫٥ − ٩٠ + ٧٢٫٥ = ٥٠ ث كجم.سم

---

④ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ٥سم أثرت القوى التي مقاديرها ٨٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ث جم في أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب كما أثرت القوتان ١٢٠ ، ١٢٠ ث جم في ب ، د في الاتجاهين جـ أ ، أ جـ أوجد معيار عزم الازدواج المحصل لهذه القوى

- الحل -



∵ القوتين (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواجاً

∴ ج١ = ٥٠ × ١٢

= ٦٠٠ ث جم.سم

∵ القوتين (٨٠ ، ٨٠) تكونان ازدواجاً

∴ ج٢ = ٨٠ × ٥ = ٤٠٠ ث جم.سم

∵ د س = د ب جا ٢هـ = ١٣ × ٢ جا هـ جتا هـ

= ٢٦ × ٥/١٣ × ١٢/١٣ = ١٢٠/١٣ سم

∵ القوتين (١٢٠ ، ١٢٠) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_{3} = -١٢٠ \times \frac{١٢٠}{١٣} = -١٢٠٠$ ث جم.سم

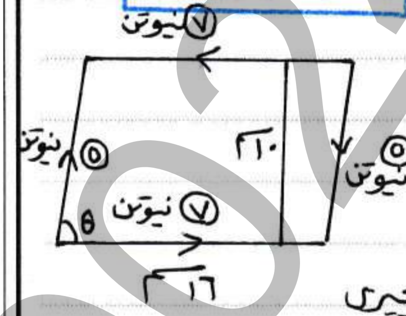
∴ $ج = ج_{1} + ج_{2} + ج_{3}$

∴ $ج = ٦٠٠ + ٤٠٠ - ١٢٠٠$

$= -٢٠٠$ ث جم.سم

∴ معيار العزم = ٢٠٠ ث جم.سم

(٥) الشكل المقابل يوضح صفيحة على شكل متوازي أضلاع أثر عليها ازدواجان



(١) أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المكون من القوتين ٧ ، ٧ نيوتن

(٢) أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن عندما $θ = ٦٠°$

(٣) اذا كان القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل يساوي ٣٠ نيوتن.سم فما قيمة θ

(٤) اذا اتزنت الصفيحة فما قيمة θ

- الحل -

(١) القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_{1} = ٧ \times ١٠ = ٧٠$ نيوتن.سم

(٢) القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_{2} = -٥ \times ١٦$ جا $٦٠ = -٤٠\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

(٣) ∵ $ج_{1} + ج_{2} = ٣٠$

∴ $٧٠ - ٥ \times ١٦$ جا $θ = ٣٠$

∴ -٨٠ جا $θ = -٤٠$

∴ جا $θ = \frac{١}{٢}$ ∴ $θ = ٣٠°$

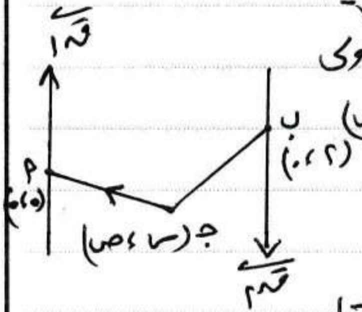
(٤) ∵ الصفيحة متزنة ∴ $ج_{1} = -ج_{2}$

∴ $٧٠ = ٥ \times ١٦$ جا θ ∴ جا $θ = \frac{٧}{٨}$

∴ $θ = ٦١° ٣'$

(٦) أثرت القوة $\overline{ق_{1}} = ٦\overline{ص}$ في نقطة الأصل كما أثرت القوة $\overline{ق_{2}} = -٦\overline{ص}$ في النقطة (٢ ، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى المستوية بالنسبة لأي نقطة (س ، ص) لا يعتمد على س ، ص

- الحل -



∵ بالنسبة للنقطة الأولى

$\overline{جـ أ} = (٠ ، ٠) - (س ، ص)$

$= (-س ، -ص)$

∴ $\overline{ج_{1}} = \overline{جـ أ} \times \overline{ق_{1}}$

$= (-س ، -ص) \times (٠ ، ٦)$

$= (-٦س - ٠)\overline{ع} = -٦س\overline{ع}$ (١)

بالنسبة للقوة الثانية:

$\overline{جـ ب} = (٢ ، ٠) - (س ، ص) = (٢ - س ، -ص)$

∴ $\overline{ج_{2}} = \overline{جـ ب} \times \overline{ق_{2}}$

$= (٢ - س ، -ص) \times (٠ ، -٦)$

$= (-١٢ + ٦س - ٠)\overline{ع}$

$= (-١٢ + ٦س)\overline{ع}$

∴ $\overline{ج} = \overline{ج_{1}} + \overline{ج_{2}}$

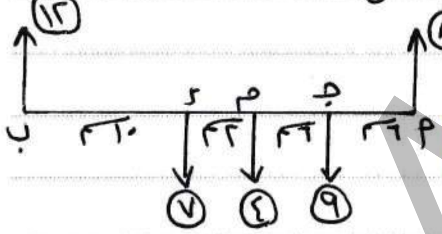
$= -٦س\overline{ع} + (-١٢ + ٦س)\overline{ع}$

$= -١٢\overline{ع}$

∴ مجموع عزوم القوى لا يعتمد على س ، ص

(٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ووزنه ٤ نيوتن يؤثر في منتصفه م ، جـ ، د ∈ $\overline{أب}$ حيث أجـ = ٦ سم ، أد = ١٤ سم أثرت قوتان مقدارهما ٨ ، ١٢ نيوتن في النقطتين أ ، ب على الترتيب رأسياً إلى أعلى ، كما أثرت قوتان مقدارهما ٩ ، ٧ نيوتن في نقطتين جـ ، د على الترتيب رأسياً إلى أسفل ، اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه

- الحل -



ح = ٨ + ١٢ - ٩ - ٤ - ٧ = صفر (١)

$ج_م$ = ٩ × ٦ + ٤ × ١٢ + ٧ × ١٤ - ١٢ × ٢٤

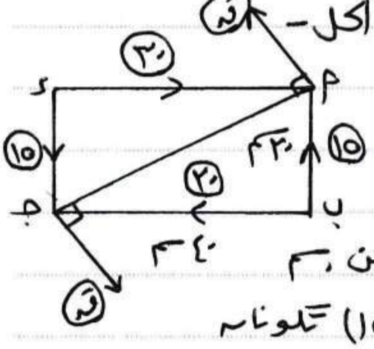
∴ $ج_م$ = - ٨٨ نيوتن.م (٢)

∴ من (١) ، (٢) المجموعة تكافئ

ازدواج معيار عزمه = ٨٨ نيوتن.م

(٨) أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٣٠ سم ، ب ج = ٤٠ سم أثرت القوى التي مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٣٠ نيوتن في ب أ ، ب ج ، د ج ، د أ على الترتيب . اثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران في أ ، ج عمودياً على أ ج بحيث تتزن المجموعة

- الحل -



∵ القوتين (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_1$ = - ٣٠ × ٣٠

= - ٩٠٠ نيوتن.سم

∵ القوتين (١٥ ، ١٥) تكونان

ازدواجاً ∴ $ج_2$ = ١٥ × ٤٠ = ٦٠٠ نيوتن.سم

∴ ج = $ج_1$ + $ج_2$ = - ٩٠٠ + ٦٠٠

= - ٣٠٠ نيوتن.سم

ومن شروط الاتزان

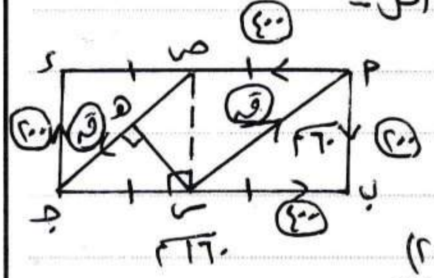
∴ ج' = - ج

∴ ق × ٥٠ = ٣٠٠ ∴ ق = ٦ نيوتن

∴ القوتان هما ٦ ، ٦ نيوتن

(٩) أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٦٠ سم ، ب ج = ١٦٠ سم ، س ، ص منتصفات ب ج ، أ د على الترتيب ، أثرت القوى التي مقاديرها ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ق ، ق نيوتن في الاتجاهات أ ب ، ج د ، ج ب ، أ د ، س أ ، ص ج على الترتيب ، إذا كان القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل يساوي ٦٤٠٠ نيوتن.سم في الاتجاه أ د ج ب فأوجد قيمة ق

- الحل -



هـ س = $\frac{٨٠ \times ٦٠}{١٠٠}$

∴ هـ س = ٤٨ سم

القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠)

تكونان ازدواجاً

∴ $ج_1$ = - ٢٠٠ × ١٦٠ = - ٣٢٠٠٠ نيوتن.سم

القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_2$ = ٤٠٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠٠ نيوتن.سم

، القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواجاً

∴ $ج_3$ = ق × ٤٨ = ٤٨ ق

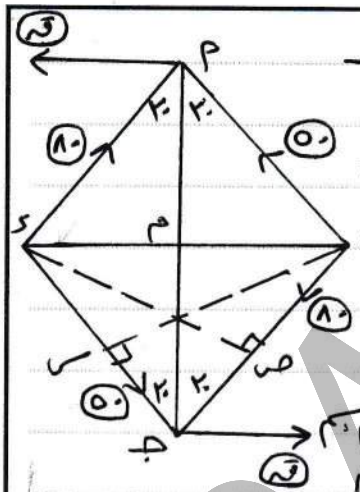
∵ عزم الازدواج المحصل = ٦٤٠٠ نيوتن.سم

∴ - ٣٢٠٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ٤٨ ق = ٦٤٠٠

∴ ٤٨ ق = ١٤٤٠٠

∴ ق = ٣٠٠ نيوتن

(١٠) أ ب ج د معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق(∠أ) = ٩٠° أثرت القوى ٥٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ث جم في ب أ ، ب ج ، د ج ، د أ على الترتيب اثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران عند أ ، ج توازيان ب د حتى تتزنا مع المجموعة السابقة ؟



- الحل -

ب س = ء ص

= ١٢ جا ٦٠ = ٦√٣

∵ القوتين (٥٠ ، ٥٠) ب

تكونان ازدواجاً

∴ ج١ = ٥٠ × ٦√٣

= ٣٠٠√٣ ث جم سم

ء القوتين (٨٠ ، ٨٠)

تكونان ازدواجاً

∴ ج٢ = −٨٠ × ٦√٣ = −٤٨٠√٣ ث جم سم

∴ ج = ج١ + ج٢ = ٣٠٠√٣ − ٤٨٠√٣

= −١٨٠√٣ ث جم سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١٨٠√٣ ث جم سم

ءم = ١٢ جا ٦٠ = ٦√٣

∴ ءجـ = ١٢√٣

∵ القياس الجبري لعزم الازدواج الذي يتزن مع المجموعة = ١٨٠√٣ ث جم سم

∴ ق × ١٢√٣ = ١٨٠√٣

∴ ق = ١٥ ث جم

(١١) أثرت القوى ق١ = ٣س − ٤ص ، ق٢ = س − ٣ص ، ق٣ = −٢س + ٧ص في النقط أ(−١، ١) ، ب(−٢، ٣) ، جـ(٠، ١) على الترتيب . برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه

- الحل -

وأ = أ − و = (−١، ١)

وب = ب − و = (−٢، ٣)

وجـ = جـ − و = (٠، ١)

جو = وأ × ق١ + وب × ق٢ + وجـ × ق٣

= (−١، ١) × (٣، −٤) + (−٣، ٢) × (١، −٢)

+ (٠، ١) × (−٢، ٧) = ٣ع + ٢ع + ٢ع

∴ جو = ٨ع (١)

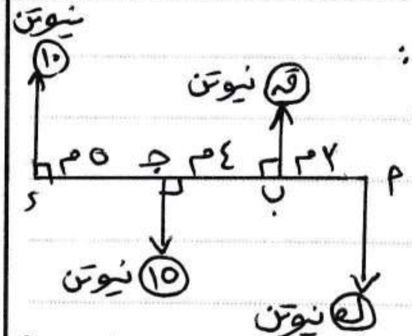
∵ ح = ق١ + ق٢ + ق٣ = صفر (٢)

من (١) ، (٢)

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٨ وحدة عزم

(١٢) في الشكل المقابل:

يوضح مجموعة من القوى المؤثرة على قضيب أء تكون ازدواجاً



القياس الجبري لعزمه يساوي −٧٥ نيوتن.م

أوجد قيمة كل من ق ، ك

- الحل -

نفرض ى متجه وحدة في اتجاه القوتين ق ، ١٠ نيوتن

∴ ح = ق + ١٠ − ك − ١٥

∵ المجموعة تكافئ ازدواج ∴ ح = صفر

∴ ق − ك = ٥ (١)

∵ القياس الجبري لعزم الازدواج

= −٧٥ نيوتن.م

∴ جم = −٧٥

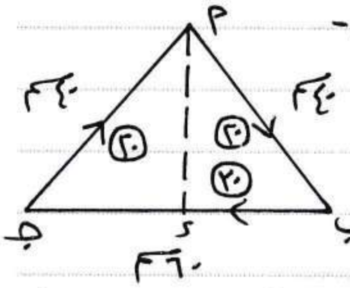
∴ −ق × ٣ + ١٥ × ٧ − ١٠ × ١٢ = −٧٥

∴ −٣ق = −٦٠

∴ ق = ٢٠ نيوتن ومن (١) ك = ١٥ نيوتن

(١٢) عملت ثلاث قوى مقاديرها ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ نيوتن ممثلة تماماً بالقطع المستقيمة الموجهة أب ، ب جـ ، جـ أ على الترتيب حيث أب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم عين معيار عزم الازدواج الناتج

-الحل-



أ د = $\sqrt{١٦٠٠ - ٩٠٠}$

∴ أ د = ١٠ $\sqrt{٧}$ سم

∴ القوى في اتجاه دوري واحد

∴ م = $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}} = \frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١}{٢}$

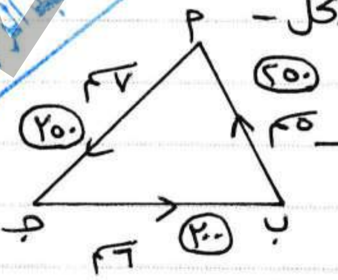
∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار

عزمه = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ × ١٠ $\sqrt{٧}$ × $\frac{١}{٢}$

= ٣٠٠ $\sqrt{٧}$ نيوتن.سم

(١٤) أ ب جـ مثلث فيه: أ ب = ٥ سم، ب جـ = ٦ سم، جـ أ = ٧ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥٠، ٣٠٠، ٣٥٠ ث جم في ب أ، جـ ب، أ جـ على الترتيب بين أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه

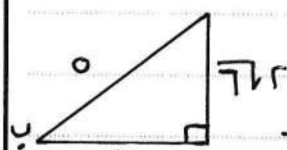
-الحل-



∴ جتا ب = $\frac{جـ^٢ + أ^٢ - ب^٢}{٢ جـ أ}$

∴ جتا ب = $\frac{٢٥ + ٣٦ - ٤٩}{٢ × ٥ × ٦} = \frac{١}{٥}$

∴ جا ب = $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$



∴ $\frac{٢٥٠}{٥} = \frac{٣٠٠}{٦} = \frac{٣٥٠}{٧}$ = ٥٠

∴ أضلاع المثلث تمثل القوى تمثيلاً تاماً وفي اتجاه دوري واحد

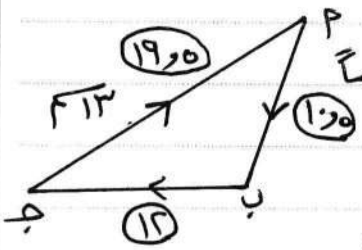
∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواج معيار

عزمه = ٢ مساحة Δ × م

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٦ × $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$ × ٥٠ = ٦٠٠ $\sqrt{٦}$ ث جم.سم

(١٥) ثلاث قوى مقاديرها ١٠,٥، ١٢، ١٩,٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تاماً القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$، $\overrightarrow{بجـ}$، $\overrightarrow{جـأ}$ على الترتيب من Δ أ ب جـ الذي فيه أ جـ = ١٣ سم أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ القوى الثلاث

-الحل-



∵ أضلاع المثلث تمثل القوى تمثيلاً تاماً

∴ $\frac{١٠,٥}{أب} = \frac{١٢}{بجـ} = \frac{١٩,٥}{١٣}$

∴ $\frac{١٠,٥}{أب} = \frac{١٢}{بجـ} = \frac{٣}{٢}$

∴ أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٨ سم

∵ جتا ب = $\frac{جـ^٢ + أ^٢ - ب^٢}{٢ جـ أ}$

∴ جتا ب = $\frac{٤٩ + ٦٤ - ١٦٩}{٢ × ٧ × ٨} = \frac{-١}{٢}$

∴ ق(∠ب) = ١٢٠°

∵ الأضلاع في اتجاه دوري واحد

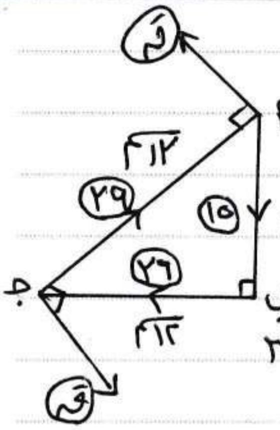
∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواج معيار

عزمه = ٢ مساحة Δ × $\frac{٣}{٢}$

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٨ × جا ١٢٠ × $\frac{٣}{٢}$

= ٤٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

(١٦) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٥ سم، ب جـ = ١٢ سم، جـ أ = ١٣ سم أثرت القوى ١٥، ٣٦، ٣٩ ث جم في $\overleftarrow{أب}$، $\overleftarrow{بجـ}$، $\overleftarrow{جـأ}$ على الترتيب أوجد القوتين المتساويتين في المقدار وتؤثران في نهايتي $\overline{أجـ}$ وعموديتين عليه لكي تحدثا اتزاناً مع مجموعة القوى السابقة؟



ـ الحل ـ

∵ (م جـ)² = (م ب)² + (ب جـ)²

∴ ق (∠ م ب جـ) = ٩٠°

∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

، ∵ $\frac{١٥}{٥} = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٣٩}{١٣} = ٣$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً قياسه

الجبرى = ٢ مساحة △ م ب جـ × م

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ × ٣ = ١٨٠ ث جم.سم

∵ القوتين عند م ، جـ تكونان ازدواجاً

تتزن مع الازدواج الأول

∴ قَ × ١٣ = ١٨٠

∴ قَ = $\frac{١٨٠}{١٣}$ = ١٣,٨ ث جم

---

⑰ م ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه

م ب = م جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٠ سم ،

د منتصف $\overline{ب جـ}$ أثرت القوى ٥٢ ، ٢٠ ،

٤٨ نيوتن فى $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{ب د}$ ، $\overleftarrow{د م}$ على

الترتيب . اثبت أن مجموعة القوى

تكافئ ازدواجاً وأوجد القياس الجبرى

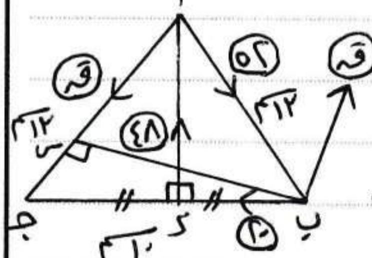
لعزمه . أوجد مقدار قوتين إحداهما

فى $\overleftarrow{م جـ}$ والأخرى تؤثر عند ب فى

اتجاه $\overleftarrow{جـ م}$ بحيث تصبح المجموعة فى

حالة توازن

ـ الحل ـ



∵ م د = $\sqrt{١٦٩ - ٢٥}$

∴ م د = ١٢ سم

، ∵ القوى فى اتجاه

دورى واحد

، ∵ $\frac{٥٢}{١٣} = \frac{٢٠}{٥} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج قياسه

الجبرى = ٢ مساحة △ م ب د × م

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ × ٤ = ٢٤٠ نيوتن.سم

∴ القوتان (قَ ، قَ) تكونان ازدواجاً

قياسه الجبرى = ٢٤٠ نيوتن.سم

، ∵ ب س = ب جـ جا جـ

∴ ب س = ١٠ × $\frac{١٢}{١٣} = \frac{١٢٠}{١٣}$

∴ قَ × $\frac{١٢٠}{١٣}$ = ٢٤٠ ∴ قَ = ٢٦

∴ القوتان هما ٢٦ ، ٢٦ نيوتن

---

⑱ م ب جـ د مستطيل فيه م ب = ٩ سم ،

ب جـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا $\overline{ب جـ}$ ،

$\overline{م د}$ على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها

١٨ ، ٤٨ ، ٣٠ ، ٢٤ ث جم فى $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$

، $\overleftarrow{جـ و}$ ، $\overleftarrow{و م}$ على الترتيب . اثبت أن

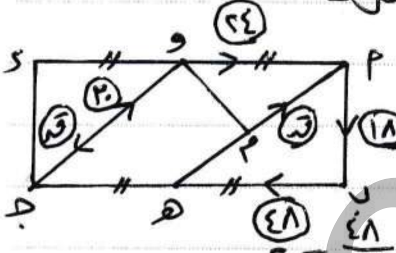
المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد

معيار عزمه ثم أوجد مقدار القوتين

اللتين تؤثران فى $\overleftarrow{هـ م}$ ، $\overleftarrow{و جـ}$ حتى

تحدث اتزاناً مع القوى المعلومة

ـ الحل ـ



∵ $\frac{١٨}{٩} = \frac{٢٤}{١٢} = \frac{٣٠}{١٥} = \frac{٤٨}{٢٤} = ٢$

أى أن القوى تتناسب مع أطوال الأضلاع

، ∵ القوى فى اتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى

لعزمه = ٢ × $\frac{١٢ + ٢٤}{٢}$ × ٩ × ٢ = ٦٤٨

ث جم.سم

∴ القوتان (قَ ، قَ) تكونان ازدواجاً يتزن

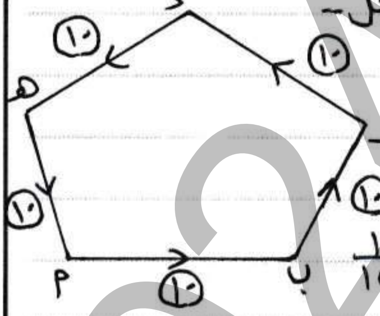
مع الازدواج الأول ∴ قَ × م و = ٦٤٨

∴ قَ × ١٢ جا (م م̂ د) = ٦٤٨

∴ قَ × ١٢ × $\frac{٩}{١٥}$ = ٦٤٨ ∴ قَ = ٩٠ ث جم

(١٩) أ ب جـ د هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٥ سم أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ ث كجم في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{د هـ}$ ، $\overleftarrow{هـ أ}$ على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه

- الحل -



∵ القوى في ترتيب دوري واحد

، ∵ $\frac{١٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥}$

$= \frac{١٠}{١٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

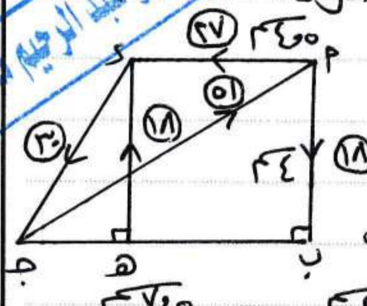
∴ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه = ٢ × مساحة الخماسي × م

$= ٢ \times \frac{٥}{٤} (١٥)^٢ \times$ ظتا $\frac{١٨٠}{٥} \times \frac{٢}{٣}$

= ٥١٦,١٤ ث كجم.سم

(٢٠) أ ب جـ د شبه منحرف فيه أد // ب جـ ، أ ب عمودي عليهما ، هـ مسقط د على ب جـ ، جـ ب = ٧,٥ سم ، ب أ = ٤ سم ، أ د = ٤,٥ سم أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٥١ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{د أ}$ ، $\overleftarrow{د جـ}$ ، $\overleftarrow{هـ د}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ على الترتيب اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه

- الحل -



∵ أ د = ب هـ = ٤,٥ سم

∴ هـ جـ = ٣ سم

في Δ د هـ جـ تكون د جـ $= \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ سم

في Δ أ ب جـ تكون أ جـ $= \sqrt{(٤)^٢ + (٧,٥)^٢} = ٨,٥$ سم

∵ القوى ٢٧ ، ٣٠ ، ٥١ ث جم في ترتيب دوري واحد في Δ أ د جـ

، ∵ $\frac{٢٧}{٤,٥} = \frac{٣٠}{٥} = \frac{٥١}{٨,٥} = ٦$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه = ٢ × مساحة Δ أ د جـ × م

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٤,٥ \times ٤ \times ٦ = ١٠٨$ نيوتن.سم (١)

، ∵ القوتين (١٨ ، ١٨) تكونان ازدواجاً

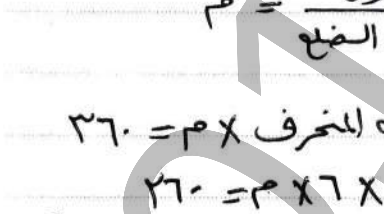
∴ جـ = − ١٨ × ٤,٥ = − ٨١ نيوتن.سم (٢)

من (١) ، (٢) ∴ القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل = ١٠٨ − ٨١ = ٢٧ نيوتن.سم

∴ معيار العزم = ٢٧ نيوتن.سم

(٢١) أ ب جـ د شبه منحرف فيه أد // ب جـ ، أب ⊥ ب جـ ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، أ د = ٣ سم أثرت القوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ نيوتن في الاتجاهات $\overleftarrow{د أ}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوي ٣٦٠ نيوتن.سم في الاتجاه أ ب جـ د فأوجد مقدار $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$

- الحل -



∵ د جـ $= \sqrt{٣٦ + ٣٦} = ٦\sqrt{٢}$ سم

، ∵ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٣٦٠

ولنفرض أن $م = \frac{القوة}{طول الضلع}$

∴ ٢ × مساحة شبه المنحرف × م = ٣٦٠

∴ $٢ \times \frac{١}{٢} (٣ + ٩) \times ٦ \times م = ٣٦٠$

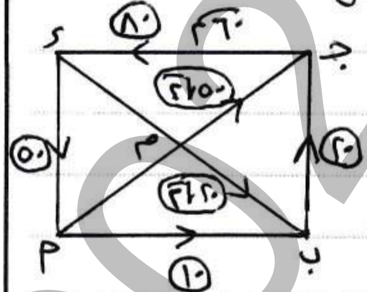
∴ م = ٥ ∴ $\frac{ق_١}{٣} = \frac{ق_٢}{٦\sqrt{٢}} = \frac{ق_٣}{٩} = \frac{ق_٤}{٦} = ٥$

∴ $ق_١ = ١٥$ نيوتن ، $ق_٢ = ٣٠\sqrt{٢}$ نيوتن

$ق_٣ = ٤٥$ نيوتن ، $ق_٤ = ٣٠$ نيوتن

(٢٢) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٦٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٨٠ ، ٥٠ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{دأ}$ على الترتيب وأثرت قوتان مقدارهما $٥٠\sqrt{٢}$ ، $٢٠\sqrt{٢}$ نيوتن في $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{دب}$ على الترتيب . برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٤٨٠٠ نيوتن.سم

- الحل -



$ج_{أ} = ٢٠ \times ٦٠ + ٨٠ \times ٦٠ - ٢٠\sqrt{٢} \times ٣٠\sqrt{٢}$

$= ٤٨٠٠$ نيوتن.سم ①

$ج_{ب} = ٨٠ \times ٦٠ + ٥٠ \times ٦٠ - ٥٠\sqrt{٢} \times ٣٠\sqrt{٢}$

$= ٤٨٠٠$ نيوتن.سم ②

$ج_{م} = (٢٠ + ٨٠ + ٥٠ + ١٠) \times ٣٠$

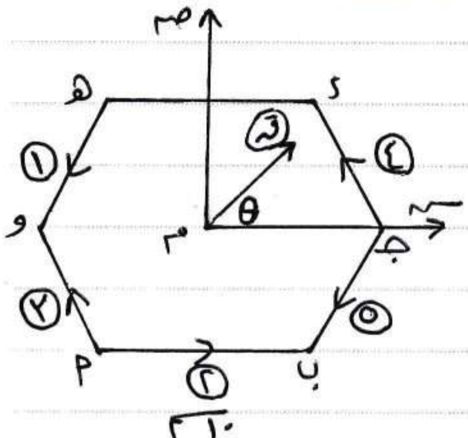
$= ٤٨٠٠$ نيوتن.سم ③

من ① ، ② ، ③

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٤٨٠٠ نيوتن.سم

(٢٣) أ ب جـ د هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـب}$ ، $\overrightarrow{جـد}$ ، $\overrightarrow{هـد}$ ، $\overrightarrow{هـو}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه القوة التي يجب أن تؤثر في مركز المسدس لكي تحول المجموعة إلى ازدواج ثم عين عزمه .

- الحل -



نفرض أن $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة في اتجاه $\overrightarrow{مجـ}$ والعمودي عليه

وأن القوى ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن هي $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ ، $ق_٥$ ، $ق_٦$ على الترتيب

∴ $\overrightarrow{ق_١} = ٢\overrightarrow{س}$

، $\overrightarrow{ق_٢} = -٥ جتا٦٠ \overrightarrow{س} - ٥ جا٦٠ \overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{ق_٢} = \frac{-٥}{٢}\overrightarrow{س} - \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣} = -٤ جتا٦٠ \overrightarrow{س} + ٤ جا٦٠ \overrightarrow{ص}$

$= -٢\overrightarrow{س} + ٢\sqrt{٣}\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٤} = ٦\overrightarrow{س}$

، $\overrightarrow{ق_٥} = -١ جتا٦٠ \overrightarrow{س} - ١ جا٦٠ \overrightarrow{ص}$

$= \frac{-١}{٢}\overrightarrow{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٦} = -٣ جتا٦٠ \overrightarrow{س} + ٣ جا٦٠ \overrightarrow{ص}$

$= \frac{-٣}{٢}\overrightarrow{س} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} + \overrightarrow{ق_٤} + \overrightarrow{ق_٥} + \overrightarrow{ق_٦}$

∴ $\overrightarrow{ح} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{س} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

∵ المجموعة تتحول إلى ازدواج

∴ $\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{صفر}$

∴ $\overrightarrow{ق} = -\overrightarrow{ح} = \frac{-٣}{٢}\overrightarrow{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\overrightarrow{ص}$

∴ $\|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٣}{٤}} = \sqrt{٣}$ نيوتن

، ∵ ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، (س < صفر ، ص < صفر)

∴ $\theta = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠^\circ$

، $ج_{م} = (٢ - ٥ + ٤ - ٦ + ١ - ٣) \times ٥\sqrt{٣}$

$= -٣٥\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

- تمارين عامة -

① أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم أثرت القوى التي مقاديرها ٥٠٠ ، ٦٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ث جم في أ ب ، جـ ب ، أ د ، جـ د على الترتيب أوجد معيار عزم الازدواج المحصل (٩٠٠ ث جم.سم)

② أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق(أ^) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٨ ، ١٠ نيوتن في أ ب ، جـ ب ، جـ د ، أ د على الترتيب . أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ مجموعة هذه القوى (٢ √٣ نيوتن.سم)

③ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٠ سم ، جـ ب = ١٢ سم ، نصفت أ ب في س ، جـ د في ص وأثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث جم في أ ب ، جـ ب ، جـ د ، أ د ، أ ص ، جـ س على الترتيب . أوجد عزم الازدواج المحصل (١٠٤٠ ث جم.سم)

④ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ق ، ٤٠ ، ق ث جم في ب أ ، ب جـ ، د جـ ، د أ على الترتيب فإذا كانت هذه القوى الأربع تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ٤٨٠ ث جم.سم في الاتجاه أ د جـ ب . أوجد ق (١٠ ث جم)

⑤ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم أثرت القوى ٧ ، ٩ ، ٧ ، ٩ نيوتن في ب جـ ، جـ د ، د أ ، أ ب على الترتيب . أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج الذي يكافئ المجموعة . ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تعملان في ب ، د عموديتين على ب د لتصبح المجموعة متزنة (-١٤٢ نيوتن.سم ، ١١ نيوتن)

⑥ تؤثر القوى ق١ = ٢ س + ص ، ق٢ = ٣ س - ٢ ص ، ق٣ = -٥ س + ص في النقط أ(١ ، ١) ، ب(-١ ، ٣) ، جـ(٤ ، ٥) على الترتيب . اثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه (٢١ وحدة عزم)

⑦ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٠,٥ سم ، ب جـ = ١٤ سم ، أ جـ = ١٧,٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٤,٥ ، ٦ ، ٧,٥ نيوتن في أ ب ، ب جـ ، جـ أ على الترتيب بين أن هذه المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه (٦٣ نيوتن.سم)

صابر عبد الرحيم محمود

⑧ أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه أ د // ب جـ ، أ د = ٩ سم ، أ ب = د جـ = ١٥ سم ، ب جـ = ٣٣ سم أثرت القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن في الاتجاهات أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب . أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه (١١٣٤ نيوتن.سم)

مركز الثقل

تعريف: مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة وحيدة من الفراغ (غير مركز الكرة الأرضية) يمر بها دائماً خط عمل وزن هذا الجسم وتكون ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض ويرمز لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالرمز م

•• ملاحظات:

① خط عمل وزن الجسم يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وأيضاً يمر بمركز الكرة الأرضية

② مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لا يكون بالضرورة واقعاً على أحد جسيمات هذا الجسم

•• متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل:

إذا كانت $و_1$ ، $و_2$ ، ... ، $و_ن$ هي أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\overrightarrow{ر_1}$ ، $\overrightarrow{ر_2}$ ، ... ، $\overrightarrow{ر_ن}$ هي متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل فإن متجه الموضع $\overrightarrow{ر_م}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوباً إلى نقطة الأصل يتحدد من العلاقة

$$\overrightarrow{ر_م} = \frac{و_1 \overrightarrow{ر_1} + و_2 \overrightarrow{ر_2} + \dots + و_ن \overrightarrow{ر_ن}}{و_1 + و_2 + \dots + و_ن} \quad ①$$

$\because$ $و_1 = ك_1 د$ ، $و_2 = ك_2 د$ ، ... ، $و_ن = ك_ن د$ ②

حيث $ك_1$ ، $ك_2$ ، ... ، $ك_ن$ هي كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ

وبالتعويض من ② في ① وقسمة كل من البسط والمقام على د

$$\therefore \overrightarrow{ر_م} = \frac{ك_1 \overrightarrow{ر_1} + ك_2 \overrightarrow{ر_2} + \dots + ك_ن \overrightarrow{ر_ن}}{ك_1 + ك_2 + \dots + ك_ن}$$

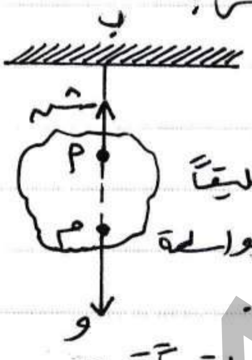
ويمكن أن تكتب هذه العلاقة بدلالة المركبات في اتجاه محوري الإحداثيات كما يلي

$$س_م = \frac{ك_1 س_1 + ك_2 س_2 + \dots + ك_ن س_ن}{ك_1 + ك_2 + \dots + ك_ن}$$

$$ص_م = \frac{ك_1 ص_1 + ك_2 ص_2 + \dots + ك_ن ص_ن}{ك_1 + ك_2 + \dots + ك_ن}$$

•• ملاحظة: مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة ل يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة الكتلتين

•• التعليق الحر للجسم الجاسئ:



في الشكل المقابل:

إذا فرضنا جسماً وزنه و ومركز ثقله م معلق تعليقاً حراً من إحدى نقطه أ بواسطة خيط في نقطة تعليق ب.

وعندما يتزن الجسم يكون واقعاً تحت تأثير قوتين:

① قوة وزن الجسم $\overrightarrow{و}$ وتؤثر رأسياً لأسفل

② قوة الشد $\overrightarrow{ش}$ $\because$ الجسم متزن

$\therefore \overrightarrow{ش} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{0}$ $\therefore \overrightarrow{ش} = -\overrightarrow{و}$

أي أن قوة الشد تكون موجهة رأسياً لأعلى

وهذا معناه أن الخيط فى وضع الاتزان تكون رأسياً وتكون ش م = و
وأيضاً يجب أن م ينطبق خطا عمل قوتى الوزن والشد ولذلك نجد أن
"مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً يقع على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق"

•• الجسم المنتظم الكثافة:
هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

ملحوظة:
• اذا كان السلك (أو القضيب) منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع طوله
• اذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها

•• مراكز ثقل بعض الأجسام الجاسئة البسيطة:
(١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه
(٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل متوازى أضلاع أو أحد حالاته الخاصة (المربع - المستطيل - المعين) يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين)
(٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث
(٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة
(٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسى منتظم يقع عند مركز السداسى

ملحوظة هامة:
مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث (فكرة التوزيع)

- أمثلة محلولة -

(١) أوجد مركز ثقل النظام التالى
$ك_١$ = ١كجم عند الموضع $م_١$(٢، ٣)،
$ك_٢$ = ٢كجم عند الموضع $م_٢$(-٢، ١)
، $ك_٣$ = ٣كجم عند الموضع $م_٣$(٠، ١)

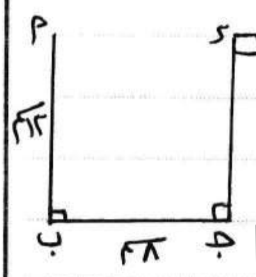
- الحل -

$$س_م = \frac{١\times٢ + ٢\times-٢ + ٣\times صفر}{١+٢+٣} = \frac{-١}{٣}$$

$$ص_م = \frac{١\times٣ + ٢\times١ + ٣\times١}{١+٢+٣}$$

∴ مركز الثقل = $(\frac{-١}{٣}، \frac{٤}{٣})$

(٢) فى الشكل المقابل: اذا ثبتت خمس كتل متساوية مقدار كل منها ك عند النقط أ، ب، جـ، د، هـ على الترتيب من الخط المنكسر أ ب جـ د هـ الموضح بالشكل، أوجد مركز ثقل المجموعة.



- الحل -
نختار اتجاهين متعامدين وليكن $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ب ص}$

	م	ب	جـ	د	هـ
الكتلة	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	٠	٨	٨	٢٢
ص	١٢	٠	٠	١٢	١٢

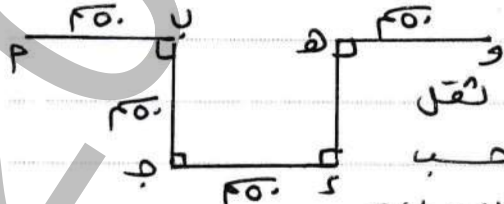
مثلون احداثيات مركز ثقل المجموعة هـ

$$\bar{س} = \frac{ك \times ٨ + ك \times ٨ + ك \times ٢٢}{٥ك} = ٧,٦$$

$$\bar{ص} = \frac{ك \times ١٢ + ك \times ١٢ + ك \times ١٢}{٥ك} = ٧,٢$$

∴ مركز ثقل المجموعة = (٧,٦ ، ٧,٢) بالنسبة لنقطة ب

(٣) في الشكل المقابل:



عين مركز ثقل المجموعة حسب البيانات المعطاة في الجدول التالي:

الوزن	٨ث جم	٣ث جم	٢ث جم	٢ث جم
للوضع	عند م	عند جـ	عند هـ	عند و

- الحل -

نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{مب}$ ، والعمودي عليه ولكن $\overleftarrow{مص}$

	م	جـ	هـ	و
ك	٨	٣	٢	٢
س	٠	٥٠	١٠٠	١٥٠
ص	٠	−٥٠	٠	٠

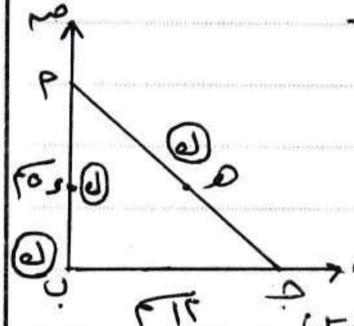
$$\bar{س} = \frac{٨ \times ٠ + ٣ \times ٥٠ + ٢ \times ١٠٠ + ٢ \times ١٥٠}{٨ + ٣ + ٢ + ٢} = \frac{١٣٠}{٣}$$

$$\bar{ص} = \frac{٨ \times ٠ + ٣ \times -٥٠ + ٢ \times ٠ + ٢ \times ٠}{٨ + ٣ + ٢ + ٢} = -١٠$$

∴ مركز الثقل = $\left(\frac{١٣٠}{٣} ، -١٠\right)$ بالنسبة للنقطة م

(٤) م ب جـ مثلث فيه م ب = ٥سم ، ب جـ = ١٢سم ، جـ م = ١٣سم ، د ، هـ منتصفا $\overline{مب}$ ، $\overline{مجـ}$ وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها ك عند النقط ب ، د ، هـ عين مركز ثقل المجموعة وأوجد بعده عن ب

- الحل -



∵ (م جـ)² = ١٦٩

، (م ب)² + (ب جـ)²

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ ق(∠م ب جـ) = ٩٠°

نختار اتجاهين متعامدين ولكن $\overrightarrow{بس}$ ، $\overleftarrow{بص}$

	ب	د	هـ
الكتلة	ك	ك	ك
س	٠	٠	٦
ص	٠	٢,٥	٢,٥

$$\bar{س} = \frac{ك \times ٦}{٣ك} = ٢$$

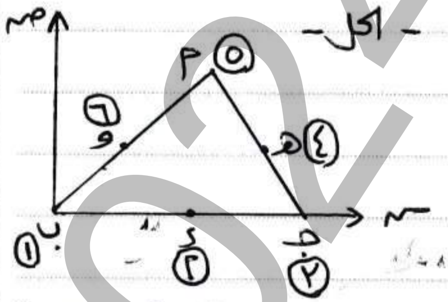
$$\bar{ص} = \frac{ك \times ٢,٥ + ك \times ٢,٥}{٣ك} = \frac{٥}{٣}$$

∴ مركز الثقل = $\left(٢ ، \frac{٥}{٣}\right)$ بالنسبة لـ ب

وبعد م عن ب = $\sqrt{(٢)^2 + \left(\frac{٥}{٣}\right)^2} = \frac{\sqrt{٦١}}{٣}$ سم

⑤ ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه ٤ سم ، النقط د ، هـ ، و منتصفات أضلاعه $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـا}$ ، $\overline{اب}$ على الترتيب وضعت الأثقال ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ث كجم عند النقط ا ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و على الترتيب أوجد موضع مركز ثقل المجموعة من ب

- الحل -



بأخذ اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{بس}$ ، $\overleftarrow{بص}$

	ا	ب	جـ	د	هـ	و
ك	٥	١	٣	٢	٤	٦
س	٢	٠	٤	٢	٣	١
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠	٠	٠	$\sqrt{٣}$	$\sqrt{٣}$

$$س_م = \frac{٥\times٢ + ١\times٠ + ٣\times٤ + ٢\times٢ + ٤\times٣ + ٦\times١}{٥+١+٣+٢+٤+٦}$$

$$\therefore س_م = \frac{٤٤}{٢١}$$

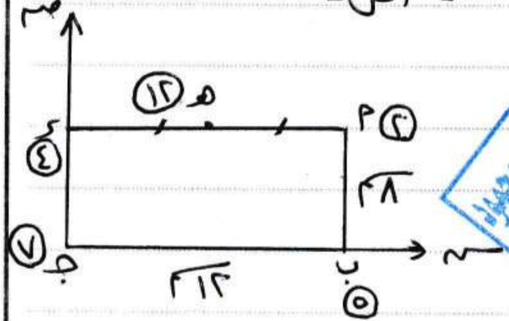
$$ص_م = \frac{٥\times٢\sqrt{٣} + ١\times٠ + ٣\times٠ + ٢\times٠ + ٤\times\sqrt{٣} + ٦\times\sqrt{٣}}{٥+١+٣+٢+٤+٦}$$

$$\therefore ص_م = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١}$$

$\therefore$ مركز الثقل $= \left(\frac{٤٤}{٢١} ، \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٢١}\right)$ بالنسبة لنقطة ب

⑥ ا ب جـ د مستطيل فيه ا ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم ثبتت الكتل ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ جم عند الرؤوس ا ، د ، ب ، جـ على الترتيب كما ثبتت الكتلة ١٢ جم عند منتصف $\overline{اد}$ أوجد مركز ثقل المجموعة بالنسبة إلى $\overleftarrow{جـب}$ ، $\overleftarrow{جـد}$

- الحل -



نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{جـب}$ ، $\overleftarrow{جـد}$

	ا	هـ	د	جـ	ب
ك	٢	١٢	٤	٧	٥
س	١٢	٦	٠	٠	١٢
ص	٨	٨	٨	٠	٠

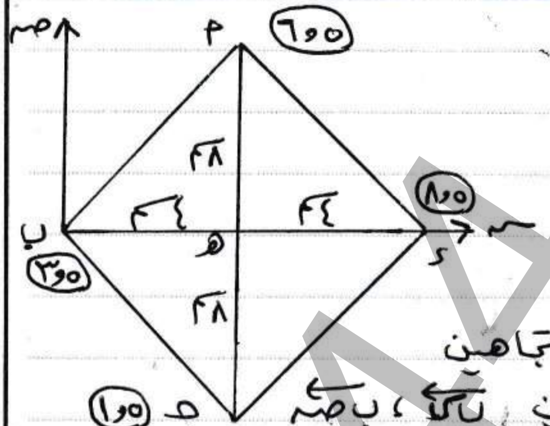
$$س_م = \frac{٢\times١٢ + ١٢\times٦ + ٥\times١٢}{٢+١٢+٤+٧+٥} = ٥,٢$$

$$ص_م = \frac{٢\times٨ + ١٢\times٨ + ٤\times٨}{٢+١٢+٤+٧+٥} = ٤,٨$$

$\therefore$ مركز الثقل = (٥,٢ ، ٤,٨) بالنسبة لنقطة جـ

⑦ ثبتت الكتل ٦,٥ ، ٣,٥ ، ١,٥ ، ٨,٥ جم عند الرؤوس ا ، ب ، جـ ، د من المعين ا ب جـ د الذي فيه ا جـ = ٢ ب د = ١٦ سم . اثبت أن مركز ثقل هذه الكتل يبعد $\sqrt{٥}$ سم عن مركز المعين

- الحل -



نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{بك}$ ، $\overrightarrow{بص}$

	أ	ب	ج	د
ك	٦و٥	٢و٥	١و٥	٨و٥
س	٤	٠	٤	٨
ص	٨	٠	-٨	٠

$\therefore$ س$_م$ = $\frac{٦و٥ \times ٤ + ١و٥ \times ٤ + ٨و٥ \times ٨}{٦و٥ + ٢و٥ + ١و٥ + ٨و٥}$ = ٥

ص$_م$ = $\frac{٦و٥ \times ٨ + ١و٥ \times -٨}{٦و٥ + ٢و٥ + ١و٥ + ٨و٥}$ = ٢

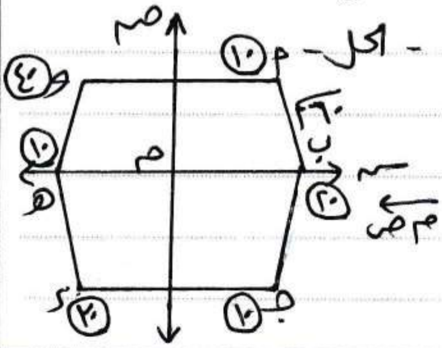
$\therefore$ مركز الثقل م = (٥ ، ٢)

$\therefore$ م هـ = $\sqrt{(٥-٤)^2 + (٢-٠)^2}$ = $\sqrt{٥}$ سم

$\therefore$ مركز ثقل المجموعة يبعد عن مركز المعين بمقدار $\sqrt{٥}$ سم

(٨) ثُبتت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٣٠ ، ١٠ ، ٤٠ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و على الترتيب لسداسي منتظم طول ضلعه ٦٠ سم أوجد بُعد مركز ثقل هذه المجموعة عن مركز السداسي

- الحل -



نختار اتجاهين متعامدين ولكن $\overrightarrow{مس}$ ، $\overrightarrow{مص}$

	أ	ب	ج	د	هـ	و
ك	١٠	٢٠	١٠	٢٠	١٠	٤٠
س	٣٠	٦٠	٣٠	-٣٠	-٦٠	-٣٠
ص	$٣٠\sqrt{٣}$	٠	$-٣٠\sqrt{٣}$	$-٣٠\sqrt{٣}$	٠	$٣٠\sqrt{٣}$

س$_م$ = $\frac{١٠ \times ٣٠ + ٢٠ \times ٦٠ + ١٠ \times ٣٠ + ٢٠ \times -٣٠ + ١٠ \times -٦٠ + ٤٠ \times -٣٠}{١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٤٠}$

$\therefore$ س$_م$ = - ٧و٥

ص$_م$ = $\frac{١٠ \times ٣٠\sqrt{٣} + ٢٠ \times ٠ + ١٠ \times -٣٠\sqrt{٣} + ٢٠ \times -٣٠\sqrt{٣} + ٤٠ \times ٣٠\sqrt{٣}}{١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٢٠ + ١٠ + ٤٠}$

$\therefore$ ص$_م$ = ٢و٥ $\sqrt{٣}$

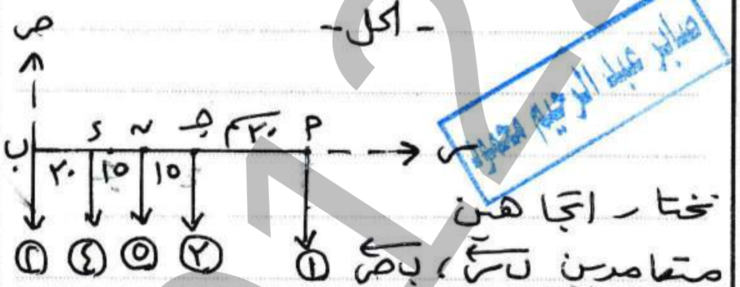
$\therefore$ مركز الثقل = (- ٧و٥ ، ٢و٥ $\sqrt{٣}$)

$\therefore$ بُعد مركز الثقل عن مركز السداسي

= $\sqrt{(-٧و٥)^2 + (٢و٥\sqrt{٣})^2}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

(٩) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٩٠ سم وكتلته ٥ كجم ، ج ، د نقطتا تثليثه من ناحية الطرف أ وضعت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند النقط أ ، ب ، ج ، د على الترتيب عين بُعد مركز ثقل المجموعة عن الطرف أ

- الحل -



نختار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{أس}$ ، $\overrightarrow{أص}$

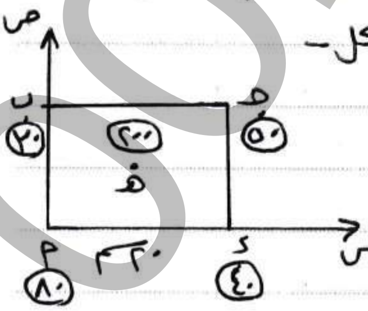
	ب	د	ن	ج	أ
ك	٢	٤	٥	٣	١
س	٠	٣٠	٤٥	٦٠	٩٠

$∴ س_م = \frac{٣٠\times٤ + ٤٥\times٥ + ٦٠\times٢ + ٩٠\times١}{٢+٤+٥+٣+١} = ٤١$

∴ مركز الثقل يبعد عن ب مسافة ٤١ سم وعن أ مسافة ٤٩ سم

(١٠) صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٢٠٠ جم على هيئة المربع أ ب جـ د الذي طول ضلعه ٢٠ سم ثبتت الكتل ٨٠، ٣٠، ٥٠، ٤٠ جم عند أ، ب، جـ، د على الترتيب، أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{أب}$، $\overline{أد}$

- الحل -



نختار الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{أس}$، $\overrightarrow{أص}$

	أ	ب	جـ	د	هـ
ك	٨٠	٣٠	٥٠	٤٠	٢٠٠
س	٠	٠	٢٠	٢٠	١٠
ص	٠	٢٠	٢٠	٠	١٠

$س_م = \frac{٥٠\times٢٠ + ٤٠\times٢٠ + ٢٠٠\times١٠}{٨٠+٣٠+٥٠+٤٠+٢٠٠} = ٩٫٥$

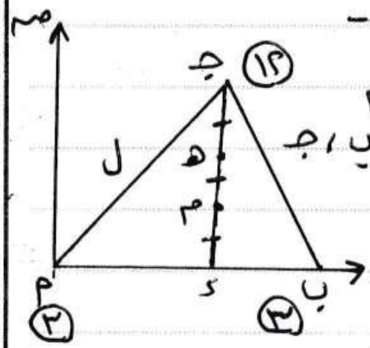
أي أن مركز الثقل يبعد ٩٫٥ سم عن $\overline{أب}$

$ص_م = \frac{٣٠\times٢٠ + ٥٠\times٢٠ + ٢٠٠\times١٠}{٨٠+٣٠+٥٠+٤٠+٢٠٠} = ٩$

أي أن مركز الثقل يبعد ٩ سم عن $\overline{أد}$

(١١) أ ب جـ صفيحة مثلثة الشكل متساوي الأضلاع كتلتها ٣ كجم، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢، ٢، ١١ كجم عند الرؤوس أ، ب، جـ على الترتيب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{مجـ}$

- الحل -



بتوزيع الكتلة ٣ كجم على الرؤوس أ، ب، جـ وباختيار اتجاهين متعامدين $\overrightarrow{أس}$، $\overrightarrow{أص}$

ونفرض أن طول ضلع المثلث = ل

$∴ جـ د = \frac{\sqrt{3}}{٢} ل \qquad ∴ م = (\frac{١}{٢} ل ، \frac{\sqrt{3}}{٦} ل)$

$، هـ = (\frac{١}{٢} ل ، \frac{\sqrt{3}}{٣} ل)$

	أ	ب	جـ
ك	٣	٣	١٢
س	٠	ل	$\frac{١}{٢}$ ل
ص	٠	٠	$\frac{\sqrt{3}}{٢}$ ل

$∴ س_م = \frac{٢\times ل + ١٢\times\frac{\sqrt{3}}{٢} ل}{٢+٢+١٢} = \frac{١}{٢} ل$

$، ص_م = \frac{١٢\times\frac{\sqrt{3}}{٢} ل}{٣+٣+١٢} = \frac{\sqrt{3}}{٣} ل$

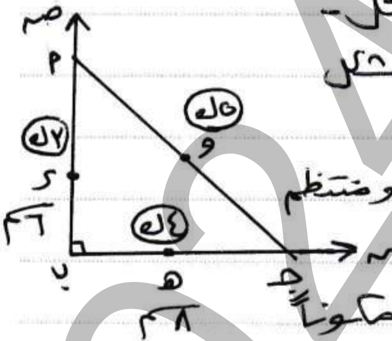
$∴ مركز الثقل = (\frac{١}{٢} ل ، \frac{\sqrt{3}}{٣} ل)$

ونقطة منتصف $\overline{مجـ}$ هي نقطة $هـ = (\frac{١}{٢} ل ، \frac{\sqrt{3}}{٣} ل)$

∴ مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{مجـ}$

(١٣) أب جـ سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم
أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كل من ب م ، ب جـ

— الحل —



من هندسة الشكل
أ جـ = ١٠ سم
∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة
∴ يمكن اعتباره مكوناً من ثلاثة قضبان منتظمة من نفس المادة وحيث أن النسبة بين أطوالها = ٦ : ٨ : ١٠ = ٣ : ٤ : ٥
∴ تعتبر الكتل ٣ك ، ٤ك ، ٥ك على الترتيب ومركز ثقل كل منها عند منتصف القضبان الثلاثة ثم نأخذ الاتجاهين المتعامدين ب س ، ب ص

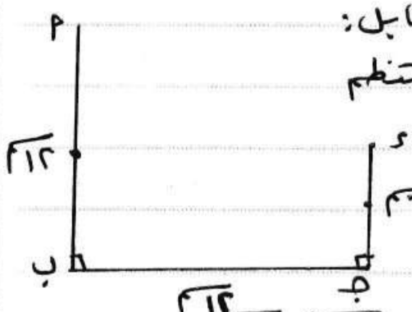
ك	٣ك	٤ك	٥ك
س	٠	٤	٤
ص	٣	٠	٣

$$∴ س_م = \frac{٤ك × ٤ + ٥ك × ٤}{٣ك + ٤ك + ٥ك} = ٣$$

$$ص_م = \frac{٣ك × ٣ + ٥ك × ٣}{٣ك + ٤ك + ٥ك} = ٢$$

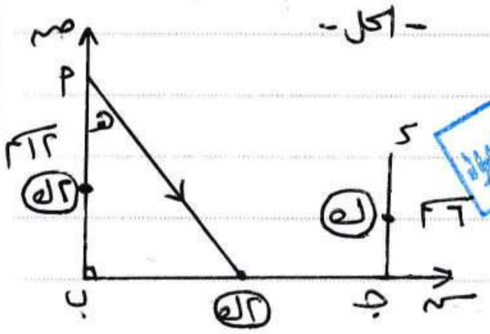
∴ مركز الثقل = (٣ ، ٢)
∴ بُعد مركز الثقل عن ب أ = ٣ سم
وعن ب جـ = ٢ سم

(١٢) في الشكل المقابل:



أب سلك رفيع منتظم الكثافة ثُني عند ب ، جـ
أوجد بُعد مركز الثقل عن كل من أب ، جـ ب ثم أوجد في وضع الاتزان قياس زاوية ميل أب على الرأسي إذا علق السلك من أ تعليقاً حراً

— الحل —



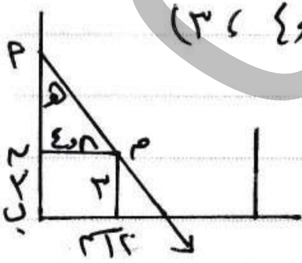
∵ السلك رفيع ومنتظم الكثافة
∴ النسبة بين الأطوال = ١٢ : ١٢ : ٦ = ٢ : ٢ : ١
∴ تعتبر الكتل ٢ك ، ٢ك ، ك ومركز ثقل كل منها عند منتصفه ونأخذ الاتجاهين المتعامدين ب جـ ، ب م

الكتلة	٢ك	٢ك	ك
س	٠	٦	١٢
ص	٦	٠	٣

$$∴ س_م = \frac{٢ك × ٦ + ك × ١٢}{٢ك + ٢ك + ك} = ٤٫٨$$

$$ص_م = \frac{٢ك × ٦ + ك × ٣}{٢ك + ٢ك + ك} = ٣$$

∴ مركز الثقل = (٤٫٨ ، ٣)
وعند التعليق من أ
∴ أ ن = ١٢ − ٣ = ٩ سم



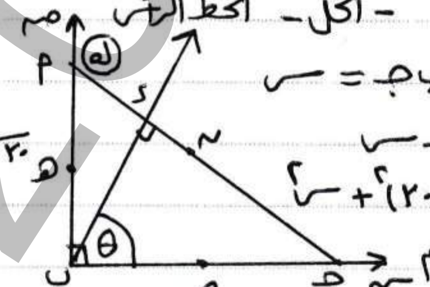
$\therefore$ ظاهـ $= \frac{٤و٨}{٩}$

$\therefore$ ق(هـ) $= ٢٨° \; ٤'$

أى أن $\overline{مب}$ تميل على الرأسى بزاوية قياسها $٢٨° \; ٤'$ إذا علق السلك من م تعليقاً حراً

(١٤) سلك منتظم السمك والكثافة طوله ١٢٠ سم وكتلته ٦٠٠ جم، ثنى على شكل مثلث م ب جـ قائم الزاوية فى ب حيث م ب = ٣٠ سم، إذا ثبتت كتلة ك جم عند الرأس م، ثم علق السلك تعليقاً حراً من الرأس ب فاتزن عندما كانت $\overline{مجـ}$ أفقية فأوجد قيمة ك

-الحل-



نفرض أن ب جـ = س

$\therefore$ م جـ = ٩٠ − س

$\therefore (٩٠ - س)^٢ = (٣٠)^٢ + س^٢$

$\therefore$ س = ٤٠ سم

$\therefore$ ب جـ = ٤٠ سم، م جـ = ٥٠ سم

نستعيض عن كتلة السلك بثلاث كتل بنسبة ٣٠ : ٤٠ : ٥٠ عند منتصف $\overline{مب}$، $\overline{بجـ}$، $\overline{مجـ}$

$\therefore$ الكتلة عند هـ = ١٥٠ جم

والكتلة عند و = ٢٠٠ جم

والكتلة عند ن = ٢٥٠ جم

	هـ	و	ن	م
ك	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	ك
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	١٥	٠	١٥	٣٠

$\therefore$ سَم $= \frac{٢٠ \times ٢٠٠ + ٢٠ \times ٢٥٠}{١٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠ + ك} = \frac{٩٠٠٠}{٦٠٠ + ك}$

صَم $= \frac{١٥ \times ١٥٠ + ١٥ \times ٢٥٠ + ٣٠ \times ك}{١٥٠ + ٢٠٠ + ٢٥٠ + ك}$

$\therefore$ صَم $= \frac{٦٠٠٠ + ٣٠ ك}{٦٠٠ + ك}$

ومن هندسة الشكل

ب د $= \frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠} = ٢٤$ سم، جـ د = ٣٢ سم

، ظاθ $= \frac{جـ د}{د ب} = \frac{٣٢}{٢٤} = \frac{٤}{٣}$

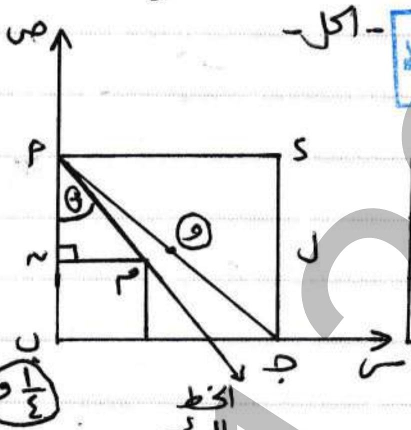
$\therefore \frac{٦٠٠٠ + ٣٠ ك}{٦٠٠ + ك} \times \frac{٦٠٠ + ك}{٩٠٠٠} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore ٣٦٠٠٠ = ١٨٠٠٠ + ٩٠ ك$

$\therefore$ ك = ٢٠٠ جم

(١٥) عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها و تعليقاً حراً من الرأس م وثبتت عند الرأس ب ثقل وزنه $\frac{١}{٤}$ و . اثبت أن زاوية ميل القطر $\overline{مجـ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{١}{٥}$

-الحل-



ك	و	$\frac{١}{٤}$ و
س	$\frac{١}{٢}$ ل	٠
ص	$\frac{١}{٢}$ ل	٠

سَم $= \frac{و \times \frac{١}{٢} ل}{و + \frac{١}{٤} و} = \frac{٢}{٥}$ ل

صَم $= \frac{و \times \frac{١}{٢} ل}{و + \frac{١}{٤} و} = \frac{٢}{٥}$ ل

$\therefore$ مركز الثقل = ($\frac{٢}{٥}$ ل ، $\frac{٢}{٥}$ ل)

$\therefore$ م ن = $\frac{٢}{٥}$ ل ، م ن = $\frac{٣}{٥}$ ل

$\therefore$ ظاθ $= \frac{٢}{٥}$ ل $\div \frac{٣}{٥}$ ل $= \frac{٢}{٣}$

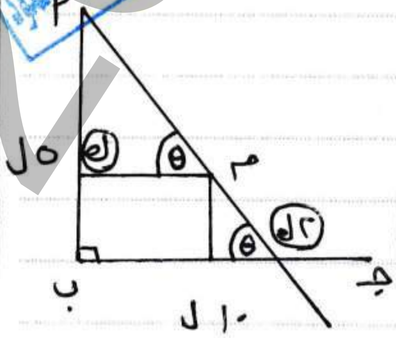
∴ ق(ج م̂ م) = ٤٥ - ق(θ̂)

∴ ظا(ج م م) = ظا(٤٥ - θ) $= \frac{ظا٤٥ - ظاθ}{١ + ظا٤٥ ظاθ}$

∴ ظا(ج م̂ م) $= \frac{١ - \frac{٢}{٣}}{١ + \frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٥}$

(16) ثنى قضيب منتظم أج طوله ١٥ ل سم نقطة ب حيث أب = ٥ ل بحيث ق(أ ب̂ ج) = ٩٠° وعلق القضيب من الطرف أ تعليقاً حراً . فاثبت أن ب ج يميل على الأفقي بزاوية θ حيث ظا θ = $\frac{٤}{٥}$

- الحل -



الكتلة	٢ك	ك
س	٥ ل	٠
ص	٠	٢,٥ ل

$س_م = \frac{٢ك \times ٥ل}{٢ك + ك} = \frac{١٠}{٣} ل$

$ص_م = \frac{ك \times ٢,٥ ل}{٢ك + ك} = \frac{٥}{٦} ل$

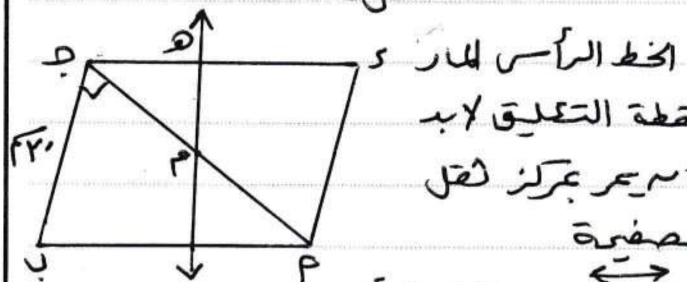
∴ مركز الثقل $(\frac{١٠}{٣} ل ، \frac{٥}{٦} ل)$

∴ ظا θ $= \frac{٥ل - \frac{٥}{٦} ل}{\frac{١٠}{٣} ل} = \frac{٥}{٤}$

∴ ب ج يميل على الأفقي بزاوية ظلها = $\frac{٤}{٥}$

(17) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة وعلى شكل متوازي أضلاع أ ب ج د الذي فيه أب = ٦٠ سم ، ب ج = ٣٠ سم ، ق(ب ج^ أ) = ٩٠° عين نقطة مثل هـ على ج د بحيث اذا علقت منها الصفيحة أصبح ج د أفقياً

- الحل -



∵ الخط الرأسي المار بنقطة التعليق لابد وأن يمر بمركز ثقل الصفيحة

∴ هـ م هو الخط الرأسي ، ∵ ج د أفقي ∴ ق(م هـ̂ ج) = ٩٠°

، ∵ ب ج = $\frac{١}{٢}$ أ ب في Δ القائم أ ج ب

∴ ق(ج أ̂ ب) = ٣٠° ∴ أ ج = $٣٠\sqrt{٣}$

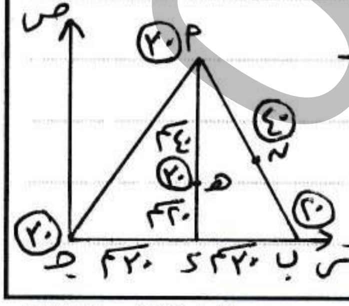
∴ م ج = $١٥\sqrt{٣}$ سم ، ق(م ج̂ هـ) = ٣٠°

هـ ج = م ج جتا ٣٠

∴ هـ ج = $١٥\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢٢,٥$ سم

(18) صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣٠ جم على هيئة Δ أ ب ج الذي فيه أ ب = أ ج ، ب ج يساوي طول ارتفاع المثلث يساوي ٦٠ سم ثبتت الكتل ٣٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٤٠ جم عند أ ، ب ، ج ، د منتصف أب على الترتيب . أوجد بعد مركز ثقل المجموعة عن ج واذا علقت المجموعة من ب تعليقاً حراً فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل ب ج على الرأسي .

- الحل -



أ د = ٦٠ سم

∴ كتلة الصفيحة تكون مثبتة عند مركز ثقلها هـ

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{جس}$ ، $\overleftarrow{جص}$

	أ	ب	جـ	هـ	ن
ك	٣٠	٢٠	٢٠	٢٠	٤٠
س	٢٠	٦٠	٠	٢٠	٤٥
ص	٦٠	٠	٠	٢٠	٣٠

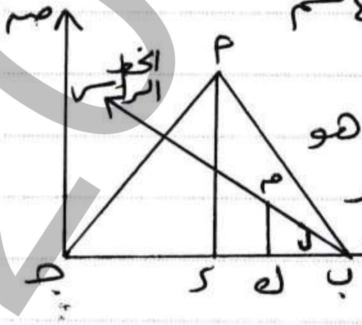
$$\bar{س} = \frac{٢٠\times٢٠ + ٢٠\times٦٠ + ٢٠\times٢٠ + ٤٠\times٤٥}{٢٠+٢٠+٢٠+٢٠+٤٠} = ٣٢$$

$$\bar{ص} = \frac{٢٠\times٦٠ + ٢٠\times٢٠ + ٤٠\times٢٠}{٣٠+٢٠+٢٠+٢٠+٤٠} = ٢٤$$

∴ مركز الثقل = (٣٢ ، ٢٤)

∴ م جـ = $\sqrt{(٣٢)^2+(٢٤)^2}$ = ٤٠

∴ مركز ثقل المجموعة يبعد عن الرأس جـ بمقدار ٤٠ سم



نرسم $\overleftarrow{بم}$ فيكون هو الخط الرأسي المار بنقطة التعليق ب ثم نرسم

م ك ⊥ ب جـ ، في Δ ب ك م

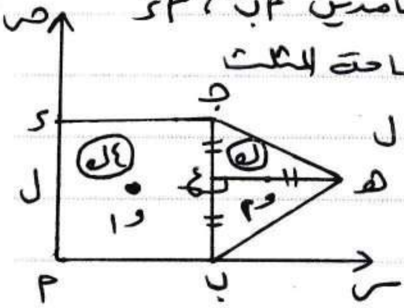
$$ظا ل = \frac{م ك}{ك ب} = \frac{٢٤}{٢٨} = \frac{٦}{٧}$$

∴ ق(ل) = ٣٦َ ٤٠°

(١٩) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ل رسم على $\overline{بجـ}$ مثلث متساوي الساقين ب جـ هـ حيث يقع الرأس هـ خارج المربع. أوجد مركز ثقل الصفيحة منتظمة السمك والكثافة المحدودة بالشكل الناتج علماً بأن طول ضلع المربع يساوي ضعف طول ارتفاع المثلث

- الحل -

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أد}$



مساحة المربع : مساحة المثلث

= ل² : $\frac{1}{2}$ ل × $\frac{1}{2}$ ل

= ٤ : ١

ونفرض أ س

كتلة المربع ٤ك وتؤثر عند و١

وكتلة المثلث ك وتؤثر عند و٢

ع و٢ = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ ل = $\frac{1}{6}$ ل

الكتلة	٤ك	ك
س	$\frac{1}{2}$ ل	$\frac{7}{6}$ ل
ص	$\frac{1}{2}$ ل	$\frac{1}{2}$ ل

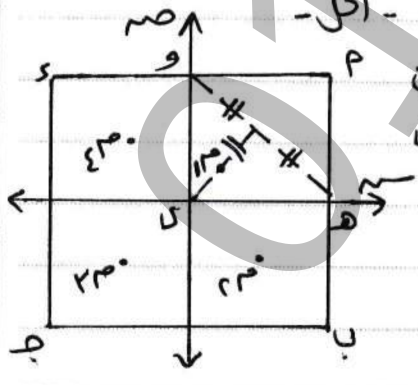
$$\therefore \bar{س} = \frac{٤ك \times \frac{1}{2}ل + ك \times \frac{7}{6}ل}{٤ك + ك} = \frac{19}{30} ل$$

$$\bar{ص} = \frac{٤ك \times \frac{1}{2}ل + ك \times \frac{1}{2}ل}{٤ك + ك} = \frac{1}{2} ل$$

∴ مركز الثقل = ($\frac{19}{30}$ ل ، $\frac{1}{2}$ ل) بالنسبة للنقطة أ

(٢٠) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع أ ب جـ د طول ضلعه ل ، فيها هـ ، و منتصفا الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ على الترتيب ثُني Δ أ هـ و حول الضلع هـ و بحيث انطبقت أ على مركز المربع ك عين مركز ثقل الصفيحة في وضعها الجديد

- الحل -



باختيار اتجاهين متعامدين ولتكن $\overleftarrow{كهـ}$ ، $\overleftarrow{كو}$

	م١	م٢	م٣	م٤
الكتلة	ك	ك	ك	ك
س	$\frac{1}{6}$ ل	$\frac{1}{4}$ ل	$\frac{-1}{4}$ ل	$\frac{-1}{4}$ ل
ص	$\frac{1}{6}$ ل	$\frac{-1}{4}$ ل	$\frac{-1}{4}$ ل	$\frac{1}{4}$ ل

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك} \times \frac{1}{6}\text{ل} + \text{ك} \times \frac{1}{4}\text{ل} + \text{ك} \times \frac{-1}{4}\text{ل} + \text{ك} \times \frac{-1}{4}\text{ل}}{\text{ك} + \text{ك} + \text{ك} + \text{ك}}$$

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{-1}{48}\text{ل}$$

$$\text{ص}_\text{م} = \frac{\text{ك} \times \frac{1}{6}\text{ل} + \text{ك} \times \frac{-1}{4}\text{ل} + \text{ك} \times \frac{-1}{4}\text{ل} + \text{ك} \times \frac{1}{4}\text{ل}}{\text{ك} + \text{ك} + \text{ك} + \text{ك}}$$

$$\therefore \text{ص}_\text{م} = \frac{-1}{48}\text{ل}$$

$\therefore$ مركز الثقل = $\left(\frac{-1}{48}\text{ل} ، \frac{-1}{48}\text{ل}\right)$ بالنسبة لمركز المربع ى

- تمارين عامة -

① أين يقع مركز ثقل نظام مؤلف من ثلاث كتل موزعة على النحو التالي:

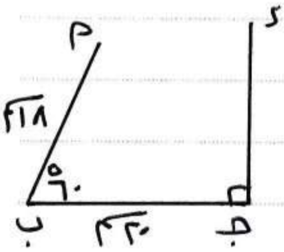
ك_1 = ١كجم عند الموضع م_1 (٠، ٠) ،

ك_2 = ١كجم عند الموضع م_2 (٣، ٠)

ك_3 = ٢كجم عند الموضع م_3 (٣، ٤)

$\left(\frac{9}{4} ، 2\right)$

② في الشكل المقابل: ثُبتت أربع كتل مقاديرها ك، ٢ك، ٢ك، ٤ك عند النقط أ، ب، جـ، د من الخط المنكسر أ ب جـ د الموضح بالشكل. أوجد مركز ثقل المجموعة (١٤,٩ ، ٤,٥$\sqrt{3}$) بالنسبة للنقطة ب



③ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦سم ، أ جـ = ١٠سم وضعت كتل مقاديرها ٥ك ، ٧ك ، ٨ك عند النقط أ ، جـ ، ب على الترتيب ، عين مركز ثقل المجموعة

(٢,٨ ، ١,٥) بالنسبة للنقطة ب

④ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٤سم ثُبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢جم عند أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب كما ثبتت كتلة مقدارها ١٠جم عند منتصف $\overline{أب}$ عين بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{جـد}$ ، $\overline{جـب}$ (٢,٣سم ، ٢,٠٨سم)

⑤ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٤كجم على شكل المستطيل أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم . ثُبتت الكتل ١٠ ، ٨ ، ٢ ، ٦كجم عند أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب . اثبت أن مركز ثقل هذه المجموعة يُبعد عن $\overline{جـب}$ ، $\overline{جـد}$ بمقدار ٨,٤سم ، ٨سم على الترتيب

⑥ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمتوازي أضلاع أ ب جـ د فيه أ ب = ٢٠سم ، أ د = ٣٢سم ، ق(ب أ د) = ٦٠° أذا علقت الصفيحة تعليقاً حراً من نقطة هـ ∈ د جـ وكان $\overline{أب}$ أفقياً . أوجد طول هـ د (٥,٧سم)

⑦ سلك رفيع منتظم الكثافة يكون الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـد}$ من المربع أ ب جـ د الذي طول ضلعه ٦ سم أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ وإذا علق السلك من ب تعليقاً حراً. فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{بجـ}$ على الرأسي

(٢سم ، ٢سم ، ٣٣° ٤١َ)

⑧ صفيحة رقيقة منتظمة وزنها ٢٠٠ ث جم على هيئة المربع أ ب جـ د الذي طول ضلعه ٣٠ سم. ووضعت الأثقال ٨٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٤٠ ث جم عند أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ وإذا علقت الصفيحة من أ تعليقاً حراً فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{أد}$ على الرأسي

(٩,٥ ، ٩ ، ٢٧َ ٤٢°)

⑨ تتكون صفيحة منتظمة الكثافة من جزأين : مستطيل أ ب جـ د فيه أب = ١٢سم ، ب جـ = ١٦سم ومثلث متساوي الساقين جـ هـ د فيه د هـ = ١٠سم والرأس هـ خارج المستطيل عين مركز ثقل الصفيحة

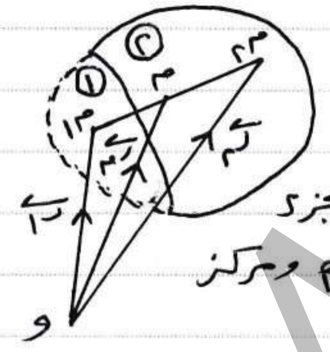
($\frac{١٥٢}{١٥}$ ، ٦) بالنسبة للنقطة ب

⑩ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل مربع أ ب جـ د طول ضلعه ٤٨ سم ، م نقطة تقاطع قطريه. قُطع Δ جـ م د ثم لصق على Δ جـ م ب بحيث انطبق $\overline{مد}$ على $\overline{مب}$. أوجد بُعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من $\overline{بأ}$ ، $\overline{بجـ}$

(٤٠ سم ، ٢٠ سم)

طريقة الكتلة السالبة

نفرض أن لدينا جسماً كتلته ك ومركز ثقله م واقتطعنا منه الجزء ① الذي كتلته ك_1 ومركز ثقله م_1



والمطلوب إيجاد مركز ثقل الجزء المتبقي ② والذي كتلته $(\text{ك} - \text{ك}_1)$ ومركز ثقله م_2

• نفرض أن $\overrightarrow{\text{ر}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}_2}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}_\text{م}}$ متجهات موضع م_1 ، م_2 ، م على الترتيب بالنسبة لنقطة أصل و فيكون

$$\overrightarrow{\text{ر}_\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} + (\text{ك} - \text{ك}_1)\overrightarrow{\text{ر}_2}}{\text{ك}}$$

$$\therefore \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ر}_\text{م}} = \text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} + (\text{ك} - \text{ك}_1)\overrightarrow{\text{ر}_2}$$

$$\therefore \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ر}_\text{م}} - \text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1} = (\text{ك} - \text{ك}_1)\overrightarrow{\text{ر}_2}$$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ر}_2} = \frac{\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ر}_\text{م}} - \text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}_1}}{\text{ك} - \text{ك}_1}$$

ويمكن أن نكتب هذه العلاقة بدلالة المركبات في اتجاه محوري الإحداثيات

$$\text{س}_2 = \frac{\text{ك}\,\text{س} - \text{ك}_1 \text{س}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1} \quad ، \quad \text{ص}_2 = \frac{\text{ك}\,\text{ص} - \text{ك}_1 \text{ص}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}$$

حيث (س ، ص) مركز ثقل الجسم الأصل وكتلته ك

، $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ مركز ثقل الجسم المقتطع وكتلته ك_1

وهذه القاعدة تحدد لنا موضع م_2 وهو مركز ثقل الجزء المتبقي كما لو كان هذا الجزء مكوناً من جسمين

• الجسم الأصلي وكتلته ك

• الجسم المقتطع وتعتبر كتلته سالبة وتساوي $-\text{ك}_1$

•• ملحوظة: لحساب بُعد مركز ثقل △ أ ب جـ عن المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ نحسب أولاً أبعاد الرؤوس أ ، ب ، جـ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$

فإذا كان: بُعد الرأس أ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو م_1

وبُعد الرأس ب عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو م_2

وبُعد الرأس جـ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو م_3

∴ يكون بُعد مركز ثقل △ أ ب جـ عن $\overleftrightarrow{\text{ل ل}}$ هو $\frac{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3}{3}$

•• حالات خاصة لمركز الثقل:

① مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع في مركز الدائرة

② مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع في مركز الدائرة

③ مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع في مركز الكرة

④ مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع في مركز الكرة

⑤ مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازي المستطيلات يقع في مركزه الهندسي

⑥ مركز ثقل قشرة كروية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها

⑦ مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها

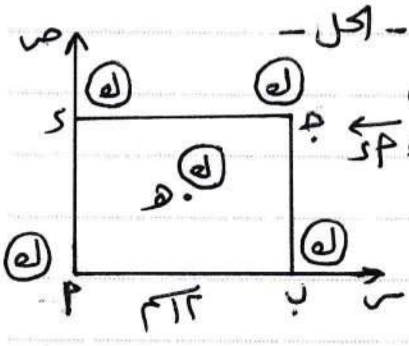
⑧ مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف المحور للموازي لأحرفه الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتي الكثافة

- أمثلة محلولة -

① وضعت ٥ كتل متساوية عند الرؤوس أ، ب، جـ، د، هـ لمربع أ ب جـ د حيث هـ ملتقى قطريه وطول ضلع المربع ١٢ سم. عين مركز ثقل المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أد}}$

- الحل -

باختيار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أد}}$



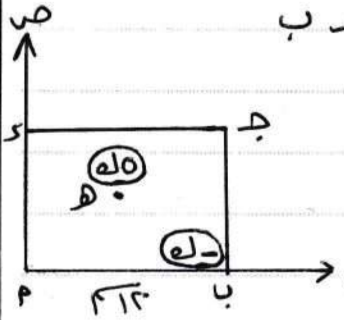
	أ	ب	جـ	د	هـ
الكتلة	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	١٢	١٢	٠	٦
ص	٠	٠	١٢	١٢	٦

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك}\times ١٢ + \text{ك}\times ١٢ + \text{ك}\times ٦}{٥\text{ك}} = ٦$$

$$\therefore \text{ص}_\text{م} = \frac{\text{ك}\times ١٢ + \text{ك}\times ١٢ + \text{ك}\times ٦}{٥\text{ك}} = ٦$$

∴ مركز الثقل = (٦ ، ٦)

∴ نعين مركز ثقل المجموعة بعد رفع الكتلة الموجودة عند ب



الكتلة	٥ك	-ك
س	٦	١٢
ص	٦	٠

$$\therefore \text{س}_\text{م} = \frac{٥\text{ك}\times ٦ - \text{ك}\times ١٢}{٥\text{ك} - \text{ك}} = ٤\text{و}٥$$

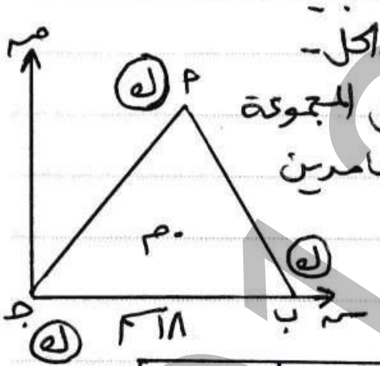
$$\therefore \text{ص}_\text{م} = \frac{٥\text{ك}\times ٦}{٥\text{ك} - \text{ك}} = ٧\text{و}٥$$

∴ مركز الثقل = (٤و٥ ، ٧و٥)

② وضعت ٣ كتل متساوية عند الرؤوس أ، ب، جـ للمثلث أ ب جـ المتساوي الأضلاع والذي طول ضلعه ١٨ سم عين مركز ثقل المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية.

- الحل -

① لتعيين مركز ثقل المجموعة نختار الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ص}}$



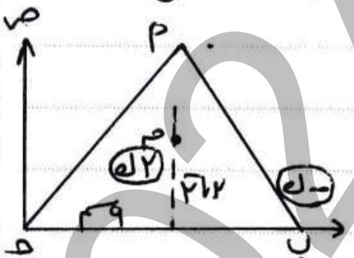
	أ	ب	جـ
الكتلة	ك	ك	ك
س	٩	١٨	٠
ص	$٩\sqrt{٣}$	٠	٠

$∴ س_م = \frac{ك × ٩ + ك × ١٨}{٣ك} = ٩$

$∴ ص_م = \frac{ك × ٩\sqrt{٣}}{٣ك} = ٣\sqrt{٣}$

∴ مركز الثقل = $(٩ ، ٣\sqrt{٣})$ وهو مركز ثقل △ م ب جـ

② تعيين مركز الثقل بعد رفع الكتلة التي عند ب



	م	ب
الكتلة	٢ك	−ك
س	٩	١٨
ص	$٢\sqrt{٣}$	٠

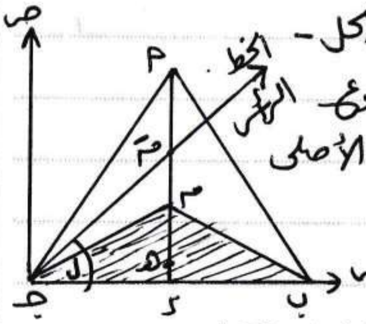
$∴ س_م = \frac{٢ك × ٩ − ك × ١٨}{٢ك − ك} = ٤٫٥$

$ص_م = \frac{٢ك × ٢\sqrt{٣}}{٢ك − ك} = \frac{٩\sqrt{٣}}{٢} = ٤٫٥\sqrt{٣}$

∴ مركز الثقل = $(٤٫٥ ، ٤٫٥\sqrt{٣})$

③ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٨ سم ، م مركز ثقله أقتطع منه المثلث م ب جـ عين مركز ثقل الجزء المتبقي وإذا علق الجزء الباقي من جـ تعليقاً حراً فأوجد ظل زاوية ميل جـ ب على الرأسي.

-الحل-



كتلة المثلث المقطوع $= \frac{١}{٣}$ كتلة المثلث الأصلي

∴ نفرض أن ك كتلة

△ أ ب جـ = ٣ك

وتؤثر عند م $(٩ ، ٢\sqrt{٣})$

∴ كتلة △ م ب جـ = −ك عند هـ $(٩ ، \sqrt{٣})$

$∴ س_م = \frac{٢ك × ٩ − ك × ٩}{٢ك − ك} = ٩$

$، ص_م = \frac{٢ك × ٢\sqrt{٣} − ك × \sqrt{٣}}{٢ك − ك} = ٤\sqrt{٣}$

∴ مركز الثقل الجديد = $(٩ ، ٤\sqrt{٣})$

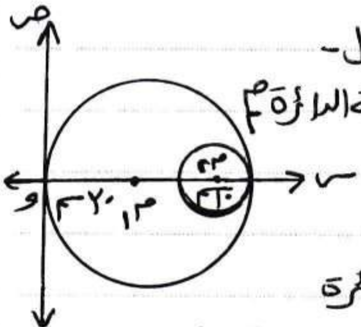
∴ نرسم $\overleftarrow{جـ م}$ فيكون هو الخط الرأسي

∴ في △ م د جـ ∴ تكون

$ظا ل = \frac{م د}{د جـ} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٩}$

④ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل قرص دائري طول نصف قطره ٣٠ سم. اقتطع منها جزء على شكل قرص دائري طول نصف قطره ١٠ سم ويبعد مركزه عن مركز الصفيحة ٢٠ سم. أوجد مركز ثقل الجزء المتبقي

- الحل -



مساحة الدائرة م١ : مساحة الدائرة م٢

$= π(٢٠)^٢ : π(١٠)^٢$

$= ٩ : ١$

نفرض أن كتلة الدائرة

م١ = ٩ك وكتلة الدائرة م٢ = ك

وباختيار الاتجاهين المتعامدين

الكتلة	٩ك	−ك
س	٣٠	٥٠
ص	٠	٠

$∴ س_م = \frac{٩ك × ٣٠ − ك × ٥٠}{٩ك − ك}$

$∴ س_م = ٢٧٫٥$

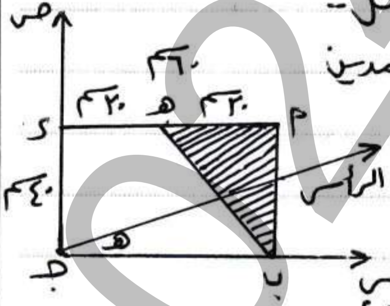
$، ص_م = \frac{٩ك × ٠ − ك × ٠}{٩ك − ك} = صفر$

∴ مركز الثقل = (٢٧٫٥ ، صفر)

∴ مركز ثقل الجزء المتبقي على بعد ٢٫٥ سم من مركز ثقل القرص الأصلي وفي اتجاه $\overleftarrow{و س}$

⑤ ا ب جـ د صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه ا ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{ا د}}$ ، قطع منها Δ ا ب هـ ثم علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من الرأس جـ . عين ظل زاوية ميل $\overline{\text{جـ ب}}$ على الرأسي في وضع الاتزان

- الحل -



نأخذ اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$

فيكون

م Δ ا ب هـ : م المستطيل ا ب جـ د

= ½ × ٢٠ × ٤٠ : ٦٠ × ٤٠ = ١ : ٤

ونفرض أن كتلة Δ ا ب هـ = ك

وكتلة المستطيل ا ب جـ د = ٤ ك

ومركز ثقل Δ ا ب هـ =

$\left(\frac{٢٠+٦٠+٦٠}{٢} ، \frac{٤٠+٤٠+٠}{٣}\right) = \left(٥٠ ، \frac{٨٠}{٣}\right)$

$∴ سَم = \frac{٤ك × ٣٠ - ك × ٥٠}{٤ك - ك}$

الكتلة	٤ ك	− ك
س	٣٠	٥٠
ص	٢٠	$\frac{٨٠}{٣}$

$∴ سَم = \frac{٧٠}{٣}$

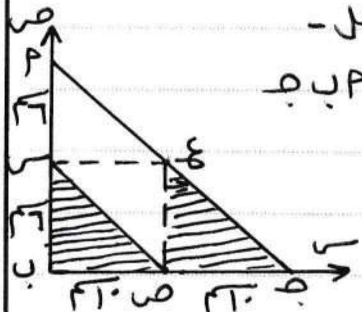
$، صَم = \frac{٤ك × ٢٠ - ك × \frac{٨٠}{٣}}{٤ك - ك} = \frac{١٦٠}{٩}$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقي = $\left(\frac{٧٠}{٣} ، \frac{١٦٠}{٩}\right)$

$، ظا هـ = \frac{١٦٠}{٩} ÷ \frac{٧٠}{٣} = \frac{١٦}{٢١}$

⑥ ا ب جـ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على هيئة مثلث قائم الزاوية في ب حيث ا ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٢٠ سم وكانت س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ا}}$ على الترتيب . قطع منها Δ جـ ص ع وطبق على Δ ص ب س فإذا علقت المجموعة تعليقاً حراً من النقطة ب أوجد ظل الزاوية ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ على الرأسي في وضع التوازن

- الحل -



م Δ جـ ص ع : م Δ ا ب جـ

= ١ : ٤

ونفرض أن كتلة Δ جـ ص ع = ك

، كتلة Δ ا ب جـ = ٤ ك

$∴ سَم = \frac{٤ك × \frac{٢٠}{٣} + ك × \frac{١٠}{٣} - ك × \frac{٤٠}{٣}}{٤ك + ك - ك}$

ك	٤ ك	ك	− ك
س	$\frac{٢٠}{٣}$	$\frac{١٠}{٣}$	$\frac{٤٠}{٣}$
ص	٤	٢	٢

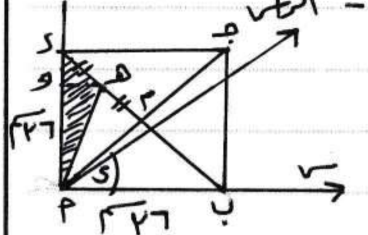
$∴ سَم = \frac{٢٥}{٦}$

$صَم = \frac{٤ك × ٤ + ك × ٢ - ك × ٢}{٤ك + ك - ك} = ٤$

$∴ ظا هـ = ٤ ÷ \frac{٢٥}{٦} = \frac{٢٤}{٢٥}$

⑦ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مربع ا ب جـ د طول ضلعه ٢٦ سم ، تقاطع قطراه في م ونصفت $\overline{\text{د م}}$ في نقطة هـ وفصل منها Δ هـ ا د عين مركز ثقل الجزء الباقي من الصفيحة . وإذا علقت الصفيحة تعليقاً خالصاً من نقطة ا حتى اتزنت في مستوى رأسي فأوجد ميل $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ على الرأسي

- الحل - الرأسي



من هندسة الشكل

$\frac{دهـ}{دب} = \frac{هـو}{أب} = \frac{١}{٤}$

∴ هـو = ٩ سم

مساحة Δ أهـد : مساحة المربع أب جـ د

= $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٢٦ : ٢٦ × ٢٦ = ١ : ٨

نفرض أن كتلة المربع أب جـ د = ٨ ك

وأن كتلة Δ أهـد = ك

ومركز ثقل Δ أهـد =

$\left(\frac{٠+٠+٩}{٣} ، \frac{٠+٢٦+٢٧}{٣}\right)$ = (٣ ، ٢١)

الكتلة	٨ك	-ك
س	١٨	٣
ص	١٨	٢١

$سَ_م = \frac{٨ك × ١٨ - ك × ٣}{٨ك - ك}$

∴ $سَ_م = \frac{١٤١}{٧}$

$صَ_م = \frac{٨ك × ١٨ - ك × ٢١}{٨ك - ك} = \frac{١٢٣}{٧}$

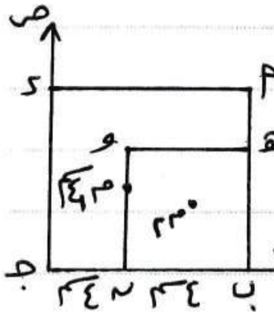
∴ مركز الثقل = $\left(\frac{١٤١}{٧} ، \frac{١٢٣}{٧}\right)$

، ظا ل = $\frac{١٢٣}{٧} \div \frac{١٤١}{٧} = \frac{٤١}{٤٧}$

∴ ميل $\overleftarrow{أب}$ على الرأسي = $\frac{٤١}{٤٧}$

(٨) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل أب جـ د الذي فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم قطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس ب طول ضلعها ٤ سم . أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $\overline{جـ د}$ ، $\overline{جـ ب}$ ثم اذا علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من الرأس جـ فأوجد في وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{جـ ب}$ على الرأسي

- الحل -



أولاً : تعيين مركز ثقل الجزء الباقي

نأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$

∵ $\frac{\text{كتلة المربع ب ن و هـ}}{\text{كتلة المستطيل أب جـ د}} = \frac{\text{مساحة سطح المربع}}{\text{مساحة سطح المستطيل}}$

∴ $\frac{\text{كتلة المربع}}{\text{كتلة المستطيل}} = \frac{٤ × ٤}{٨ × ٦} = \frac{١}{٣}$

∴ نفرض أن كتلة المستطيل أب جـ د = ٣ ك

وتؤثر عند $م_١$ = (٤ ، ٣)

وأن كتلة المربع = −ك وتؤثر عند

نقطة $م_٢$ = (٦ ، ٢)

$سَ_م = \frac{٣ك × ٤ - ك × ٦}{٣ك - ك} = ٣$

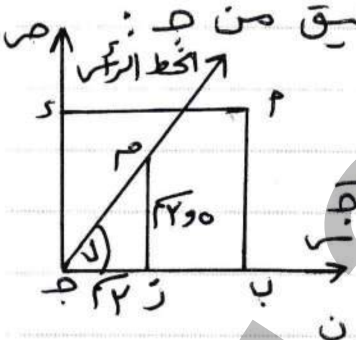
، $صَ_م = \frac{٣ك × ٣ - ك × ٢}{٣ك - ك} = ٣٫٥$

∴ مركز ثقل الجسم المتبقي = (٣ ، ٣٫٥)

ثانياً : عند التعليق من جـ :

نرسم $\overleftarrow{جـ م}$ فيكون هو الخط الرأسي

ثم نرسم م ز ⊥ $\overline{ب جـ}$

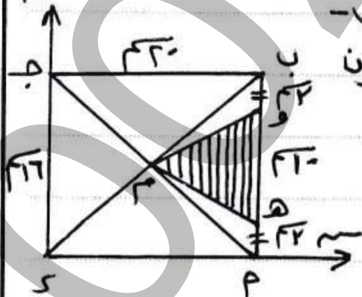


∴ في Δ م ز جـ يكون

ظا ل = $\frac{م ز}{ز جـ} = \frac{٣٫٥}{٣} = \frac{٧}{٦}$

⑨ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل مستطيل أ ب جـ د مركزه م حيث أب = ١٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم . أخذت النقطتان هـ ، و على $\overline{\text{أب}}$ حيث أهـ = ب و = ٣ سم ، إذا قطع △ م هـ و فأوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن م . وإذا علق هذا الجزء تعليقاً حراً من د فأوجد في وضع التوازن ظل الزاوية التي يصنعها $\overline{\text{دجـ}}$ مع الرأسي .

- الحل -



نأخذ اتجاهين متعامدين $\overleftrightarrow{\text{دجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دأ}}$

م △ و هـ م : مساحة المستطيل أ ب جـ د $= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٠ : ٢٠ \times ١٦ = ٥ : ٣٢$

نفرض أن كتلة △ م هـ و = ٥ك

وكتلة المستطيل أ ب جـ د = ٣٢ك

ومركز ثقل △ م هـ و =

$\left(\frac{٢٠ + ٢٠ + ١٠}{٣} ، \frac{٣ + ١٣ + ٨}{٣} \right) = \left(\frac{٥٠}{٣} ، ٨ \right)$

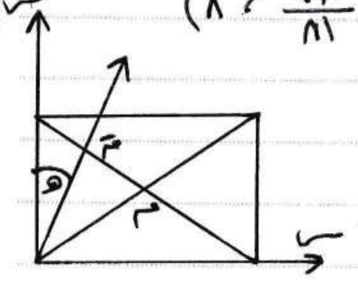
الكتلة	٣٢ك	-٥ك
س	١٠	$\frac{٥٠}{٣}$
ص	٨	٨

$س_م = \frac{٣٢ك \times ١٠ - ٥ك \times \frac{٥٠}{٣}}{٣٢ك - ٥ك}$

$\therefore س_م = \frac{٧١٠}{٨١}$

$ص_م = \frac{٣٢ك \times ٨ - ٥ك \times ٨}{٣٢ك - ٥ك} = ٨$

$\therefore$ مركز الثقل $= \left(\frac{٧١٠}{٨١} ، ٨ \right)$

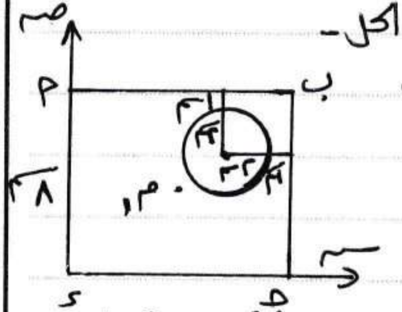


$ظا هـ = \frac{٧١٠}{٨١} \div ٨$

$= \frac{٣٥٥}{٣٢٤}$

⑩ صفيحة منتظمة على شكل مربع أ ب جـ د طول ضلعه ٨ سم ، فصل منها قرص دائري طول نصف قطره ٢ سم ويبعد مركزه ٣ سم عن كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ عين بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $\overline{\text{دجـ}}$ ، $\overline{\text{دأ}}$

- الحل -



مساحة القرص الدائري : مساحة المربع

$= \pi \times ٤ : ٨ \times ٨$

$= \pi : ١٦$

نفرض أن كتلة القرص الدائري = πك

وكتلة المربع = ١٦ ك

الكتلة	١٦ك	-πك
س	٤	٥
ص	٤	٥

$س_م = \frac{١٦ك \times ٤ - \pi ك \times ٥}{١٦ك - \pi ك}$

$\therefore س_م = ٣٫٧٦$

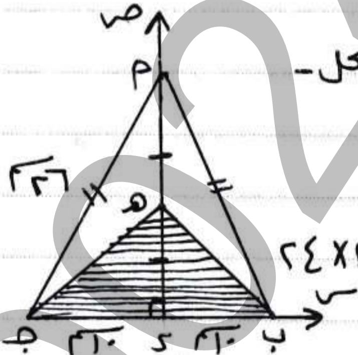
$ص_م = \frac{١٦ك \times ٤ - \pi ك \times ٥}{١٦ك - \pi ك} = ٣٫٧٦$

$\therefore$ مركز الثقل $= (٣٫٧٦ ، ٣٫٧٦)$

أي أن مركز الثقل يبعد ٣٫٧٦ سم عن كل من $\overline{\text{دجـ}}$ ، $\overline{\text{دأ}}$

(١١) صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل Δ أ ب جـ المتساوي الساقين حيث أ ب = أ جـ = ٢٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم . رسم $\overleftrightarrow{أد}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في د ، فإذا كانت هـ منتصف $\overline{أد}$ وفصل Δ هـ ب جـ أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن النقطة هـ

- الحل -



مساحة Δ ب هـ جـ : مساحة Δ أ ب جـ

$= \frac{1}{2}$ × ٢٠ × ١٢ : $\frac{1}{2}$ × ٢٠ × ٢٤

= ١ : ٢

نفرض أن كتلة Δ ب هـ جـ = ك

وكتلة Δ أ ب جـ = ٢ك

الكتلة	-ك	٢ك
س	٠	٠
ص	٤	٨

س$_م$ = $\frac{٢ك × ٠ - ك × ٠}{٢ك - ك}$ = صفر

ص$_م$ = $\frac{٢ك × ٨ - ك × ٤}{٢ك - ك}$ = ١٢

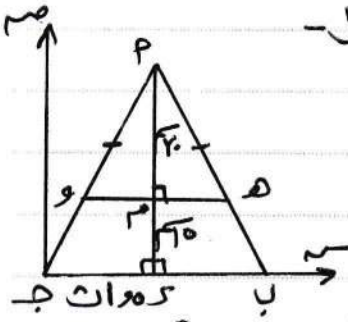
∴ مركز الثقل = (٠ ، ١٢)

أي أن مركز الثقل يقع عند هـ

∴ بُعد مركز الثقل عن النقطة هـ = صفر

(١٢) صفيحة منتظمة رقيقة على شكل مثلث متساوي الساقين أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، $\overline{أد}$ هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم . رُسم مستقيم يوازي القاعدة $\overline{ب جـ}$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ في النقطتين هـ ، و على الترتيب . اثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعي هـ ب جـ و يقع على $\overline{أد}$ ويبعد ٧ سم عن نقطة د

- الحل -



من هندسة الشكل

$\frac{هـ و}{ب جـ} = \frac{٢}{٣}$

نفرض أن

هـ و = ٢ ث ∴ ب جـ = ٣ ث

مساحة Δ أ هـ و : مساحة Δ أ ب جـ

$= \frac{1}{2}$ × ٢ث × ٣٠ : $\frac{1}{2}$ × ٣ث × ٤٥ = ٤ : ٩

نفرض أن كتلة Δ أ هـ و = ٤ك

وكتلة Δ أ ب جـ = ٩ك

الكتلة	-٤ك	٩ك
س	١,٥ ث	١,٥ ث
ص	٢٥	١٥

س$_م$ = $\frac{٩ك × ١,٥ث - ٤ك × ١,٥ث}{٩ك - ٤ك}$

∴ س$_م$ = ١,٥ ث

∴ مركز ثقل الشكل الرباعي هـ ب جـ و يقع على $\overline{أد}$

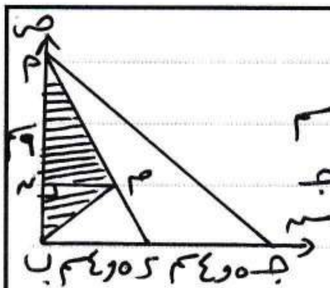
ص$_م$ = $\frac{٩ك × ١٥ - ٤ك × ٢٥}{٩ك - ٤ك}$ = ٧

∴ مركز الثقل يبعد عن د بمقدار ٧ سم

(١٣) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بالمثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب فيه أ ب = ب جـ = ٩ سم . اذا فصل Δ أ ب م ، حيث م مركز ثقل الصفيحة ، وعُلق الجزء الباقي تعليقاً حراً من النقطة ب فأوجد ظل زاوية ميل $\overline{ب جـ}$ على الرأسي في وضع التوازن

الحل

من هندسة الشكل



م ن = $\frac{١}{٣}$ ب جـ = ٣ سم

م ∆ ا ب م : م ∆ ا ب جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٢ : $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٩

= ١ : ٣

نفرض أن كتلة ∆ ا ب م = ك

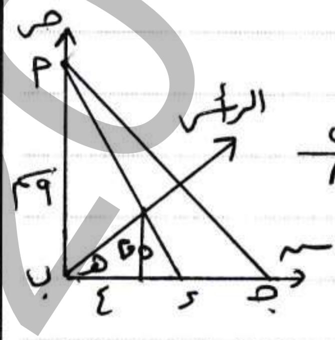
وكتلة ∆ ا ب جـ = ٣ك

الكتلة	-ك	٣ك
س	١	٣
ص	٤	٣

$س_م = \frac{٣ك × ٣ - ك × ١}{٣ك - ك}$

∴ $س_م$ = ٤

$ص_م = \frac{٣ك × ٣ - ك × ٤}{٣ك - ك}$ = ٢٫٥



∴ ظا هـ = $\frac{٢٫٥}{٤} = \frac{٥}{٨}$

صابر عبد الرحيم محمود

- تمارين عامة -

(١) وضعت ٤ كتل متساوية عند الرؤوس ا ، ب ، جـ ، ء لمربع طول ضلعه ١٠ سم عين مركز ثقل هذه المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ا فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية

(٥ ، ٥) ، ($\frac{١٠}{٢}$ ، $\frac{١٠}{٢}$) بالنسبة لـ جـ

(٢) ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ء نقطة منتصف $\overline{بجـ}$ ، ثبتت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ في النقط ا ، ب ، ء ، جـ ، م على الترتيب . عين مركز ثقل هذه المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

($\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$) ، ($\frac{٦٥}{٧}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة جـ

(٣) لوح رقيق دائري منتظم الكثافة مساحته ٥٠ سم^٢ ثقب ثقباً دائرياً مساحته ١٠ سم^٢ فإذا كان بعد مركز الثقب عن مركز اللوح ٤ سم فعين أين يقع مركز ثقل الجزء المتبقي من اللوح

(على خط المركزين ومع بعد ١ سم من مركز اللوح)

(٤) صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمستطيل ا ب جـ ء حيث ا ب = ٢٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم ، هـ منتصف $\overline{اء}$ ، ن منتصف $\overline{ءجـ}$ ، فإذا فصل ∆ هـ ء ن من الصفيحة وعلق الجزء الباقي تعليقاً حراً من النقطة ب فأوجد في وضع التوازن ظل الزاوية التي يصنعها $\overline{بجـ}$ مع الرأسي ($\frac{١}{٢}$)

⑤ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل ا ب جـ د فيه ا ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٨ سم ، نصف $\overline{اب}$ في هـ ، فرضت نقطة و ∈ $\overline{اد}$ بحيث ا و = ١٢ سم ثم فصل △ ا هـ و عين مركز ثقل الجزء الباقي بالنسبة للمحورين $\overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ثم اذا علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من جـ فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{جـ ب}$ على الرأسي

(٨ سم ، ٢٦و٥ سم ، ل = ٢٣ ٣٣°)

⑥ ا ب جـ د صفيحة على هيئة مربع طول ضلعه ٧٨ سم ، هـ نقطة على $\overline{جـ د}$ بحيث د هـ = ٢٦ سم . اذا قطع △ ا د هـ ثم علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من ا ، فبرهن على أن الرأسي المار بنقطة ا يقطع $\overline{ب جـ}$ في نقطة و حيث جـ و = ١٥ سم

⑦ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع ا ب جـ د الذى طول ضلعه ٤٠ سم ، ثقبت ثقباً دائرياً مساحته ١٠٠ سم² ومركزه عند نقطة على القطر $\overline{ب د}$ وتقسمه بنسبة ١ : ٤ من ناحية ب ، ثم علقت تعليقاً حراً من الرأس ا . عين قياس زاوية ميل الضلع $\overline{اب}$ على الرأسي في وضع الاتزان

(١٧ ٤٧°)