٤ القـدرة

• القدرة : هى معدل الشغل المبذول بالنسبة للزمن :

القدرة = $\frac{\text{د ش}}{\text{د ه}}$

القدرة = $\frac{\text{د}}{\text{د ه}}$ ($\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\overleftarrow{\text{ف}}$)

أولاً : إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ثابتة ، فإن القدرة = $\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\frac{\text{د}}{\text{د ه}}$ $\overleftarrow{\text{ف}}$ = $\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\overleftarrow{\text{ع}}$ = ق ع حتا θ

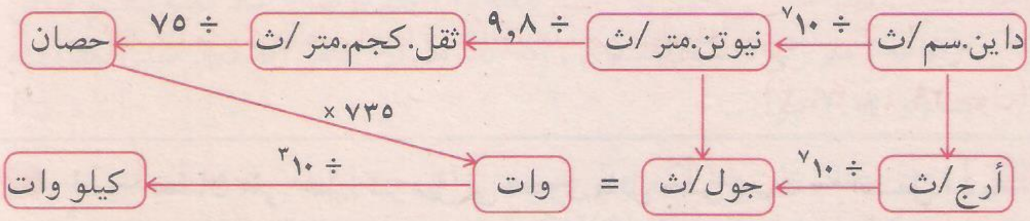
ثانيًا : إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ثابتة وفى اتجاه السرعة ، فإن القدرة = ق ع

ثالثًا : إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ثابتة ، فإن القدرة = $\frac{\text{د}}{\text{د ه}}$ ($\overleftarrow{\text{ق}}$ • $\overleftarrow{\text{ف}}$)

□ **لاحظ أن :** إذا أعطيت القدرة كدالة فى الزمن فإنه يمكن حساب الشغل المبـــذول فى أى فترة زمنية [ه$_1$ ، ه$_2$] حيث :

الشغل (فى الفترة الزمنية ه$_1$ ، ه$_2$) = $\int_{\text{ه}_1}^{\text{ه}_2}$ القدرة . د ه

◉ وحدة قياس القدرة = وحدة شغل ÷ وحدة زمن أو وحدة قوة × وحدة سرعة



• الحصان : هو قدرة آلة تبذل شغل قدرة ٧٥ ثقل كجم.متر فى زمن قدره ١ ثانية .

• الـوات : هو قدرة آلة تبذل شغل قدرة ١ نيوتن فى زمن قدره ١ ثانية .

• العلاقة بين الحصان والوات:

الحصان = ٧٥ ثقل كجم.متر/ث = ٧٥ × ٩,٨ نيوتن.متر/ث = ٧٣٥ جول/ث = ٧٣٥ وات

□ **ملاحظة هامة :**

يفضل عند حل المسائل تحويــل القــوة ق إلـى ث.كجـم ، والسـرعة ع إلـى مـتر/ث فتكون القدرة الناتجة بوحدة ثقل كجرامتر/ث وتقسم (÷ ٧٥) لتحول إلى حصان .

• القدرة المتوسطة : إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ تبذل شغلاً ش فى الفترة الزمنية [ه$_1$ ، ه$_2$] فإن :

القدرة المتوسطة = $\frac{\text{ش}}{\text{ه}_2 - \text{ه}_1}$

مضخة ترفع كمية من الماء بمقدار 24500 N من عمق 40m إلى سطح الأرض خلال دقيقة احسب قدرة هذه المضخة بالحصان الميكانيكي بفرض أن الشغل الذي تبذله لا يفقد منه شيء .

ق = ٢٤٥٠٠ نيوتن　　ن = ١ دقيقة = ٦٠ ثانية　　ف = ٤٠ متر

ش = ق × ف = ٢٤٥٠٠ × ٤٠ = ٩٨٠٠٠٠ جول

القدرة = ش ÷ ن = ٩٨٠٠٠٠ ÷ ٦٠ = ١٦٣٣٣,٣٣٣ جول/ثانية = ١٦٣٣٣,٣٣ وات

= ١٦٣٣٣,٣٣٣ ÷ ٧٣٥ = ٢٢,٢٢٢ حصان ميكانيكى

مثال

(١) شخص كتلته ٥٠ كجم يصعد سلم برج إرتفاع البرج ٤٤١ متر فى زمن قدره ١٥ دقيقة إحسب القدرة المتوسطه له بوحدة الوات.

الحل

القوه (ق) = ك ى = ٥٠ × ٩,٨ = ٤٩٠ نيوتن

سرعة الرجل المتوسطة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ = $\frac{٤٤١}{١٥ \times ٦٠}$ = ٠,٤٩ م/ث

القدرة المتوسطة = القوة × السرعة = ق × ع = ٤٩٠ × ٠,٤٩ = ٢٤٠,١ وات

مثال

(٢) سيارة كتلتها ٢ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ١٠٨ كم/س ضد مقاومات تعادل ١٥ ث.كجم لكل طن من الكتلة إحسب قدرة آلتها بالحصان.

الحل

الجسم يتحرك بسرعة منتظمة «تبعا للقانون الأول لنيوتن فتكون ق = م = ١٥ × ٢ = ٣٠ ثقل كيلوجرام

سرعة السيارة = ١٠٨ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٣٠ م/ث

∴ القدرة = ق × ع = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ ث كجم.م/ث

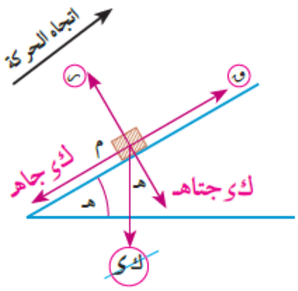
∴ القدرة = $\frac{٩٠٠}{٧٥}$ = ١٢ حصان

مثال

٣ سيارة كتلتها ٩ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{١}{١٢٥}$ بأقصى سرعة مقدارها ٤٥ كم/س ضد مقاومات تعادل ٢٠ ثقل كيلوجرام لكل طن من الكتلة ، إحسب قدرة محركها بالحصان

الحل

الحركة لأعلى المستوى



معادلة الحركة $\quad$ و $=$ م $+$ ك ء جا هـ

و $= ٢٠ \times ٩ \times ٩,٨ + ٩ \times ١٠^{٣} \times ٩,٨ \times \frac{١}{١٢٥}$ نيوتن

و $=$ ٢٥٢ ث.كجم

أقصى سرعة تصعد بها السيارة على المنحدر

ع $= ٤٥ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٢٥}{٢}$ م/ث

∴ أقصى قدرة للسيارة $=$ و $\times$ ع $= \frac{٢٥٢ \times \frac{٢٥}{٢}}{٧٥} = ٤٢$ حصان

مثال

٤ عامل وظيفته تحميل صناديق على شاحنة كتلة الصندوق الواحد ٣٠ كجم فاذا كان إرتفاع الشاحنة ٠,٩ متر احسب عدد الصناديق التى يستطيع العامل تحميلها فى زمن قدره ١ دقيقة اذا كانت قدرته المتوسطة تساوى ٠,٦ حصان.

الحل

القدرة $= \frac{\text{الشغل الكلى}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{عدد الصناديق} \times \text{الشغل اللازم لتحميل صندوق واحد}}{\text{الزمن}}$

∴ عدد الصناديق اللازم تحميلها فى زمن قدرة ١ دقيقة $= \frac{\text{القدرة} \times \text{الزمن}}{\text{الشغل للصندوق الواحد}}$

عدد الصناديق $= \frac{٠,٦ \times ٧٣٥}{٣٠ \times ٩,٨ \times ٠,٩} = \frac{٥}{٣}$ صندوق لكل ثانية

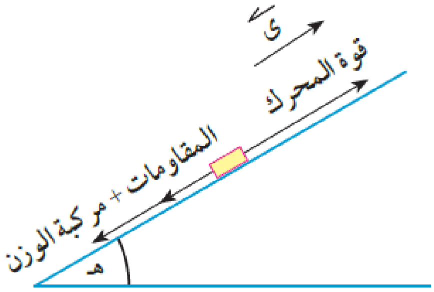
عدد الصناديق $= \frac{٥}{٣} \times ٦٠ = ١٠٠$ صندوق لكل دقيقة

مثال

⑤ قطار كتلته ٢٠٠ طن يصعد منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ بسرعة منتظمة مقدارها ٢٧ كم/س ضد مقاومات للحركة موازية لاتجاه خط أكبر ميل للمستوى بمعدل ١٨ ثقل كجم لكل طن من الكتلة. فما قدرة القاطرة بالحصان؟ وإذا هبط القطار على المنحدر بنفس السرعة فكم تكون قدرة القاطرة فى هذه الحالة بفرض ثبوت مقاومات الحركة فى الحالتين؟

الحل

أولًا: عندما يكون القطار صاعدًا المنحدر:



نتخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ في اتجاه الحركة أى إلي أعلى المستوى

∴ مقاومات الحركة = ٢٠٠ × ١٨ = ٣٦٠٠ ثقل كجم

مركبة وزن القطار في اتجاه المستوى = ٢٠٠ × ١٠٠٠ × $\frac{١}{٢٠٠}$

= ١٠٠٠ ثقل كجم

∵ القطار يصعد بسرعة منتظمة

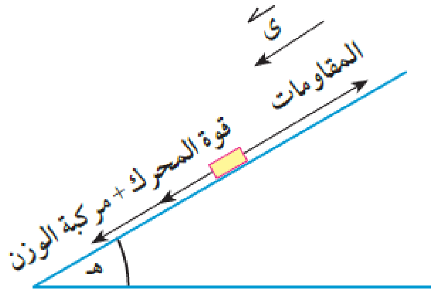
∴ قوة المحرك = المقاومات + مركبة الوزن = ٣٦٠٠ + ١٠٠٠ = ٤٦٠٠ ثقل كجم

∵ القدرة = $ق_١$ ع حيث $ق_١$ قوة المحرك ، ع السرعة

∴ القدرة = ٤٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ ثقل كجم . متر/ث

= ٤٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ × $\frac{١}{٧٥}$ = ٤٦٠ حصان

ثانيًا: عندما يكون القطار هابطًا المنحدر:



نتخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه الحركة أى إلي أسفل المستوى

∵ القطار يهبط بسرعة منتظمة

∴ قوة المحرك + مركبة الوزن = المقاومات

∴ قوة المحرك + ١٠٠٠ = ٣٦٠٠

∴ قوة المحرك = ٢٦٠٠ ثقل كجم

∵ القدرة = $ق_٢$ ع حيث $ق_٢$ قوة المحرك ، ع السرعة (لأنها لم تتغير)

∴ القدرة = ٢٦٠٠ × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ × $\frac{١}{٧٥}$ = ٢٦٠ حصان

مثال

٦ يتحرك جسيم كتلته ١ كجم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\ \overrightarrow{\text{س}} + ٤\ \overrightarrow{\text{ص}}$ بحيث كانت إزاحته $\overrightarrow{\text{ف}}$ كدالة فى الزمن تعطى بالعلاقة $\overrightarrow{\text{ف}} = ٣\text{ن}^{٢}\ \overrightarrow{\text{س}} + ٦\text{ن}\ \overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدين أوجد الشغل المبذول من القوة ثم أوجد القدرة عندما ن = ٢ ثانية إذا كانت ق مقيسة بالنيوتن، ف مقيسه بالمتر، ن بالثانية .

الحل

∵ $\text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ف}}$

∴ ش = (٣، ٤) ⊙ (٣ن^{٢}، ٦ن) = ٩ن^{٢} + ٢٤ ن

∵ القدرة = $\frac{\text{د}}{\text{د ن}}$ (ش)

∴ القدرة = ١٨ ن + ٢٤

عندما ن = ٢ ثانية

القدرة = ٦٠ جول

حاول أن تحل

مثال

٧ إذا كانت قدرة آلة عند أى زمن ن مقاسًا بالثوانى يساوى (٩ن^{٢} + ٤ن) فأوجد الشغل المبذول من الآلة خلال الثوانى الثلاث الأولى ثم أوجد الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة.

الحل

∵ القدرة = $\frac{\text{د ش}}{\text{د ن}}$

∴ ش = $\int_{\text{ن}_١}^{\text{ن}_٢}$ (القدرة) د ن

الشغل المبذول خلال الثوانى الثلاث الأولى = $\int_{٠}^{٣}$ (٩ن^{٢} + ٤ن) د ن

= $[٣\text{ن}^{٣} + ٢\text{ن}^{٢}]_{٠}^{٣}$

= ٩٩ وحدة شغل

الشغل المبذول خلال الثانية الرابعة = $\int_{٣}^{٤}$ (٩ن^{٢} + ٤ن) د ن

= $[٣\text{ن}^{٣} + ٢\text{ن}^{٢}]_{٣}^{٤}$

= ١٢٥ وحدة شغل

مثال

⑧ أوجد الزمن الذى تستغرقه سيارة كتلتها ١٢٠٠ كجم لتصل سرعتها إلى ١٢٦ كم/س من السكون إذا كانت قدرة المحرك ثابتة وتساوى ١٢٥ حصان.

الحل

$\because$ ش $= \int_{٠}^{ن}$ (القدرة) ء ن $\therefore$ ش $= \int_{٠}^{ن} (١٢٥ \times ٧٣٥)$ ء ن

ش $= ١٢٥ \times ٧٣٥$ ن

$\because$ الشغل = التغير فى طاقة الحركة $\therefore$ $\frac{١}{٢}$ ك $($ع^{٢} - ع$_{٠}^{٢}) = ١٢٥ \times ٧٣٥$ ن

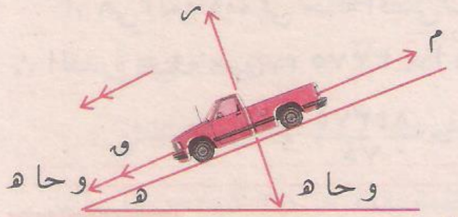
$\therefore$ $\frac{١}{٢} \times ١٢٠٠ \left((١٢٦ \times \frac{٥}{١٨})^{٢} - ٠ \right) = ١٢٥ \times ٧٣٥$ ن

$\therefore$ $٧٣٥ \times ١٠٠٠ = ١٢٥ \times ٧٣٥$ ن $\therefore$ ن $= ٨$ ث

مثال (١) : سيارة نقل كتلتها ٣ طن حملت بفحم كتلته ٧ طن من منجم بأعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيب قياسها = $\frac{١}{١٠٠}$ فإذا تحركت السيارة أسفل المنحدر بأقصى سرعة لها = ٢٧ كم/س ، أوجد قدرة المحرك بالحصان علمًا بأن المقاومة الكلية = ٣٠ ث.كجم لكل طن من الكتلة وإذا أفرغت السيارة حمولتها وعادت إلى أعلى المنحدر . أحسب أقصى سرعة لها علمًا بأن المقاومة لكل طن لم تتغير .

الحل

أولاً : ∵ السيارة تهبط بأقصى سرعة أى بسرعة منتظمة : و = ١٠ ث.طن



م = ٣٠ × ١٠ = ٣٠٠ ث.كجم

ق + و جا هـ = م ⇐

ق = م − و جا هـ

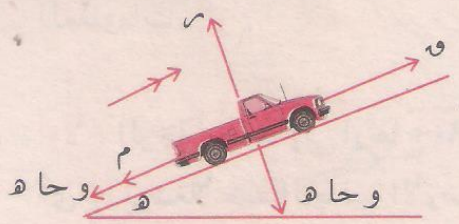
ق = ٣٠٠ − ١٠ × $١٠^{٣}$ × $\frac{١}{١٠٠}$ = ٢٠٠ ث.كجم

القدرة = ق × ع = ٢٠٠ × (٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$) ث.كجم.متر/ث

القدرة = $\frac{١٥٠٠}{٧٥}$ = ٢٠ حصان

وهذه أقصى قدرة للسيارة أى أنها ثابتة .

ثانيًا : السيارة صاعدة بسرعة منتظمة : و = ٣ ث.طن



ق = م + و جا هـ

= ٩٠ + ٣ × $١٠^{٣}$ × $\frac{١}{١٠٠}$ = ١٢٠ ث.كجم

القدرة = ق × ع~ ∴ ٢٠ × ٧٥ = ١٢٠ ع~

∴ ع~ = $\frac{٧٥}{٦}$ متر/ث = $\frac{٧٥}{٦}$ × $\frac{١٨}{٥}$ = ٤٥ كم/س

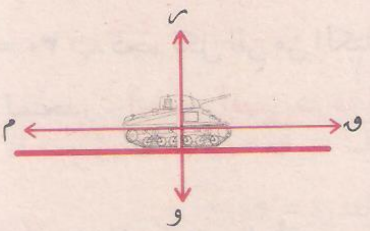
لاحظ أن :

(١) إذا تحركت السيارة على أرض أفقية بسرعة منتظمة فإن ق = م

(٢) إذا كانت السيارة تتحرك بعجلة منتظمة فلابد من استخدام الوحدات الأساسية (نيوتن) فى معادلة الحركة .

⇐ نستخدم ك ء بدلاً من و . ⇐ ق ، م تحول إلى النيوتن .

مثال (٢) : دبابة تتحرك على طريق أفقى ضد مقاومات تتناسب مع مربع سرعتها فإذا كانت المقاومة = ١٥٠٠ ث.كجم عندما كانت سرعة الدبابة = ٦٠ كم/س وكانت أقصى سرعة للدبابة = ٩٠ كم/س . أحسب قدرة محركها بالحصان .



الحـل

$\because$ م α ع^{٢} $\therefore$ $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{ع_١^{٢}}{ع_٢^{٢}}$

$\therefore$ $\frac{١٥٠٠}{م_٢} = \frac{(٦٠)^{٢}}{(٩٠)^{٢}}$ $\therefore$ م$_٢$ = ٣٣٧٥ ث.كجم

$\because$ م$_٢$ هى المقاومة فى حالة أقصى سرعة $\therefore$ ق = م$_٢$ = ٣٣٧٥ ث.كجم

$\therefore$ القدرة = ق × عَ = ٣٣٧٥ × (٩٠ × $\frac{٥}{١٨}$) ث.كجم.متر/ث

= $\frac{٨٤٣٧٥}{٧٥}$ = ١١٢٥ حصان

مثال (٣) : رجل كتلته ٧٥ كجم يصعد منحدر ارتفاعه ٩٠ متر فى دقيقتين أوجد قدرته بالحصان وإذا كانت هى أقصى قدرة له فأوجد أقصى سرعة يصعد بها على طريق يميل على الأفقى بزاوية حا$^{-١}$ $\frac{١}{١٠}$ وهو يحمل على كتفه ثقل = ١٥ كجم بفرض إهمال المقاومات .

الحـل

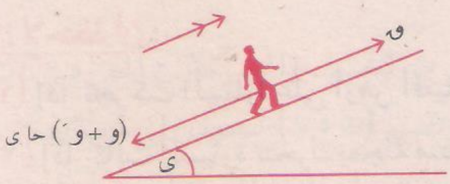
أولاً : الرجل يصعد إلى ارتفاع ٩٠ متر فى دقيقتين :

أى يبذل شغلاً ضد الجاذبية الأرضية

القدرة = $\frac{و \times ف}{ن}$ = $\frac{٧٥ \text{ ث.كجم} \times ٩٠ \text{ متر}}{٢ \times ٦٠ \text{ ثانية}}$ = $\frac{٩٠ \times ٧٥}{٢ \times ٦٠ \times ٧٥}$ = $\frac{٣}{٤}$ حصان

ثانيًا : الرجل يتحرك على المستوى المائل بأقصى سرعة

أى يبذل شغل ضد مركبة الوزن .



ق = (و + وَ) حا ى

= (٧٥ + ١٥) × $\frac{١}{١٠}$ = ٩ ث.كجم

القدرة = ق × ع

$\therefore$ $\frac{٣}{٤}$ × ٧٥ = ٩ × ع $\therefore$ ع = ٦,٢٥ متر/ث

مثال (٤) : إذا كانت قدرة آلة على بذل شغل فى أى لحظة زمنية (ن) ثابتة وتُعطى بالعلاقة :

القدرة = (٣ن^{٢} + ١٠ن) وحدة قدرة

أوجد : أولاً : الشغل المبذول من ن = ١ إلى ن = ٥

ثانيًا : الشغل المبذول خلال الثوانى الثلاث الأولى .

ثالثًا : الشغل المبذول خلال الثانية الثالثة وحدها .

الحل

أولاً : الشغل = $\int_{١}^{٥}$ (٣ن^{٢} + ١٠ن) ءن = $[$ن^{٣} + ٥ن$^{٢}]_{١}^{٥}$

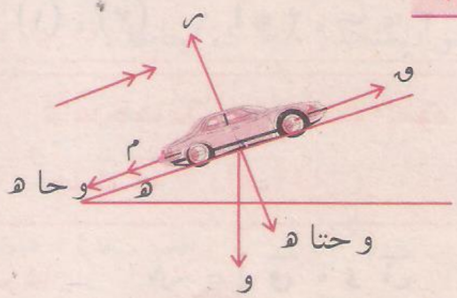
= (١٢٥ + ١٢٥) − (١ + ٥) = ٢٤٤ وحدة شغل .

ثانيًا : الشغل = $\int_{٠}^{٣}$ (٣ن^{٢} + ١٠ن) ءن = $[$ن^{٣} + ٥ن$^{٢}]_{٠}^{٣}$ = ٧٢ وحدة شغل .

ثالثًا : الشغل = $\int_{٢}^{٣}$ (٣ن^{٢} + ١٠ن) ءن = $[$ن^{٣} + ٥ن$^{٢}]_{٢}^{٣}$ = ٤٤ وحدة شغل .

مثال (٥) : سيارة كتلتها ٥ طن تتحرك بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س إلى أعلى طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٤٠}$ ضد مقاومات تعادل ٢,٥٪ من وزنها . أوجد قدرة المحرك بالحصان . وإذا زادت قدرة المحرك فجأة لتكون ٥٠ حصان . أوجد مقدار العجلة التى تتحرك بها السيارة فى اللحظات التالية .

الحل



أولاً : م = $\frac{٢٥}{١٠٠٠}$ × ٥٠٠٠ = ١٢٥ ث.كجم

ق = م + و جا هـ

= ١٢٥ + ٥٠٠٠ × $\frac{١}{٤٠}$

= ١٢٥ + ١٢٥ = ٢٥٠ ث.كجم

القدرة = $\frac{\text{ق} \times \text{ع}}{٧٥}$ = $\frac{٢٥٠ \times ٣٦ \times \frac{٥}{١٨}}{٧٥}$ = ٣٣$\frac{١}{٣}$ حصان

ثانيًا : عندما تزداد القدرة فجأة إلى ٥٠ حصان

القدرة = ق × ع ⇐ ∴ ٥٠ × ٧٥ = ق × ٣٦ × $\frac{٥}{١٨}$

∴ ٥٠ × ٧٥ = ١٠ق ∴ ق = ٣٧٥ ث.كجم ∵ ق − م − ك ء جا هـ = ك جـ

∴ ٣٧٥ × ٩,٨ − ١٢٥ × ٩,٨ − ٥٠٠٠ × ٩,٨ × $\frac{١}{٤٠}$ = ٥٠٠٠جـ

∴ جـ = ٠,٢٤٥ م/ث^{٢}

مثال (٦) : يتحرك جسيم تحت تأثير قوة $\overrightarrow{\text{ق}} = \text{ا}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ وكانت إزاحته خلال فترة زمنية (ن) من لحظة بدء تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{\text{ف}} = \left(\tfrac{1}{2}\text{ن}^2 + 3\text{ن}\right)\overrightarrow{\text{س}} + \left(\text{ن}^2 + 1\right)\overrightarrow{\text{ص}}$$

حيث $\|\overrightarrow{\text{ق}}\|$ يقاس بالداين ، $\|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ بالسم ، (ن) بالثانية ، ووجد أن الشغل المبذول بواسطة هذه القوة فى الفترة من ن = ١ ث إلى ن = ٤ ث يساوى ٧٨ إرج وقدرة هذه القوة عند ن = ٣ ثانية هى ٣٠ إرج/ث ، عيِّن ا ، ب .

الحل

$\text{شـ} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

$\text{شـ} = \left(\text{ا}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}}\right) \cdot \left(\left(\tfrac{1}{2}\text{ن}^2 + 3\text{ن}\right)\overrightarrow{\text{س}} + \left(\text{ن}^2 + 1\right)\overrightarrow{\text{ص}}\right)$

$\text{شـ} = \tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{ن}^2 + 3\text{ا}\,\text{ن} + \text{ب}\,\text{ن}^2 + \text{ب}$

القدرة $= \dfrac{\text{د شـ}}{\text{د ن}} = \text{ا}\,\text{ن} + 3\text{ا} + 2\text{ب}\,\text{ن}$

عند ن = ٣ : القدرة = ٣٠ : ∴ ٣٠ = ٦ا + ٦ب ، ا + ب = ٥ .... (١)

$\text{شـ}_1 = 13{,}5\text{ا} + 2\text{ب}$ ، $\text{شـ}_4 = 120\text{ا} + 17\text{ب}$ ، $\text{شـ} = \text{شـ}_4 - \text{شـ}_1$

∴ ٧٨ = ١٠٦,٥ا + ١٥ب ∴ ٢١٣ا + ٣٠ب = ١٥٦ .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ا = ٢ ، ب = ٣

قاعدة هامة : إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ متغيرة فى اتجاه الإزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$

حيث $\overrightarrow{\text{ق}}$ = د(ف) فإن : $\boxed{\text{القدرة} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}}$

البرهان : ∵ $\text{شـ} = \int \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \text{د}\overrightarrow{\text{ف}}$ ∴ $\text{شـ} = \int \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \dfrac{\text{د}\overrightarrow{\text{ف}}}{\text{د ن}}\,\text{د ن}$

∴ $\text{شـ} = \int \left(\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}\right)\text{د ن}$

∴ $\dfrac{\text{د شـ}}{\text{د ن}} = \dfrac{\text{د}}{\text{د ن}}\int \left(\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}\right)\text{د ن}$ $\boxed{\therefore \text{القدرة} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}}$

مثال (٧) : جسم كتلته ٥ كجم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ وكان متجه موضع الجسم عند أى لحظة زمنية ن يُعطى بالعلاقة : $\overrightarrow{\text{س}}(\text{ن}) = 2\text{ن}^3\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ن}^2\,\overrightarrow{\text{ص}}$

حيث س مقيسة بالمتر ، ق بالنيوتن ، ن بالثانية ، أوجد :

(أ) قدرة القوة $\overline{ق}$ بدلالة الزمن ن

(ب) الشغل المبذول من القوة $\overline{ق}$ خلال الفترة الزمنية : ٠ ≤ ن ≤ ٣

الحل

أولاً : إيجاد قدرة القوة $\overline{ق}$ بدلالة الزمن ن :

∵ $\overline{س}$(ن) = ٢ن³ $\overline{س}$ + ن² $\overline{ص}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $\overline{ع}$(ن) = ٦ن² $\overline{س}$ + ٢ن $\overline{ص}$

∵ $\overline{ق}$ = ك $\frac{\text{د}\overline{ع}}{\text{دن}}$ ∴ $\overline{ق}$ = ٥(١٢ن $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$)

∴ $\overline{ق}$ = ٦٠ن $\overline{س}$ + ١٠ $\overline{ص}$ ∴ القدرة = $\overline{ق}$ • $\overline{ع}$ = ٣٦٠ن³ + ٢٠ن

ثانيًا : القدرة = $\frac{\text{دش}}{\text{دن}}$ ∴ ش = $\int_{٠}^{٣}$ القدرة . دن

∴ ش = $\int_{٠}^{٣}$ (٣٦٠ن³ + ٢٠ن) دن

∴ ش = [٩٠ن⁴ + ١٠ن]$_{٠}^{٣}$ = ٨١٩٠ وحدة شغل .

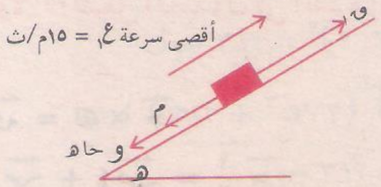
مثال (٨) : تتحرك شاحنة كتلتها ٦ طن صاعدة منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ فى اتجاه خط أكبر ميل له بأقصى سرعة لها ومقدارها ٥٤ كم/ساعة .

فإذا كانت أقصى سرعة لها عند الهبوط على نفس المنحدر ١٠٨ كم/ساعة ، فأوجد :

(أولاً) مقدار مقامة الطريقة لحركة الشاحنة بفرض أنها ثابتة .

(ثانيًا) قدرة محرك الشاحنة بالحصان .

الحل

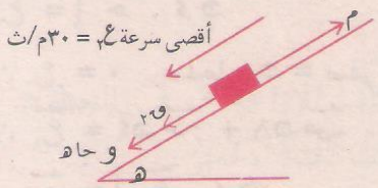


فى حالة الصعود : ق₁ = م + و جا هـ

القدرة = ق₁ × ع₁ = (م + و جا هـ) × ع₁

القدرة = (م + ٦ × ١٠٠٠ × $\frac{١}{١٠٠}$) × $\frac{٥٤ \times ٥}{١٨}$

= ١٥م + ٩٠٠



فى حالة الهبوط : ق₂ + و جا هـ = م

ق₂ = م − و جا هـ

القدرة = ق₂ × ع₂ = (م − و جا هـ) × ع₂

القدرة = (م − ٦ × ١٠٠٠ × $\frac{١}{١٠٠}$) × $\frac{١٠٨ \times ٥}{١٨}$ = ٣٠م − ١٨٠٠

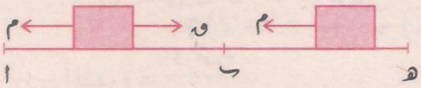
٣٠م − ١٨٠٠ = ١٥م − ٩٠٠ ∴ ١٥م = ٢٧٠٠ ∴ م = ١٨٠ ث.كجم

القدرة = ١٥ × ١٨٠ + ٩٠٠ = ٣٦٠٠ ث.كجم.م/ث

القدرة = ٣٦٠٠ ÷ ٧٥ = ٤٨ حصان

مثال (٩) : راكب دراجة كتلتها هو والدراجة ٩٨ كجم يتحرك على أرض أفقية خشنة من السكون فبلغت سرعته أقصى قيمة لها وقدرها ٧,٥ م/ث بعد زمن قدره دقيقة واحدة . وعندما أوقف حركة قدميه إلى بدالة الدراجة سكنت الدراجة بعد أن قطعت مسافة قدرها ١٥ مترًا . أحسب أقصى قدرة لهذه الرجل خلال هذه الرحلة بالحصان .

الحل



∵ ع = ع. + حـ ن

∴ ٧,٥ = ٠ + حـ × ٦٠ ∴ حـ = $\frac{1}{8}$ م/ث^{٢}

ب ه : ∴ −م × ١٥ = $\frac{1}{2}$ × ٩٨[٠ − (٧,٥)^{٢}] ∴ م = ١٨٣,٧٥ نيوتن

، ا ب : ق − م = ك حـ ∴ ق − ١٨٣,٧٥ = ٩٨ × $\frac{1}{8}$

∴ ق = ١٩٦ نيوتن ، ∵ القدرة = ق × ع

∴ القدرة = ١٩٦ × ٧,٥ نيوتن.م/ث ، (÷ ٩,٨ × ٧٥) ∴ القدرة = ٢ حصان

مثال (١٠) : يتحرك جسم كتلته $\frac{1}{2}$ ك جم تحت تأثير قوة ثابتة ٢ سَ + ٤ صَ حيث أن ‖ قَ ‖ بالنيوتن ، فإذا بدأ الجسم حركته من السكون حيث كان متجه موضعه عندها سَ. = ٢ سَ + ٥ صَ ، حيث ‖ سَ ‖ بالمتر ، أوجد :

أولاً : الشغل المبذول فى الفترة [٠ ، ٣] ثانيًا : القدرة عند ن = ٣

الحل

قَ = ك × حـَ

٢ سَ + ٤ صَ = $\frac{1}{2}$ حـَ ∴ حـَ = ٤ سَ + ٨ صَ

عَ = ∫ حـَ . ء ن ∴ عَ = ٤ن سَ + ٨ن صَ + ث

∴ ع. = ٠ عندما ن = صفر ∴ ث = ٠

∴ عَ = ٤ن سَ + ٨ن صَ .... (١)

، سَ = ∫ عَ . ء ن ∴ سَ = ٢ن^{٢} سَ + ٤ن^{٢} صَ + ث

، سَ. = ٢ سَ + ٥ صَ عندما ن = ٠ ∴ ث = ٢ سَ + ٥ صَ

، سَ = (٢ن^{٢} + ٢) سَ + (٤ن^{٢} + ٥) صَ

فَ = سَ − سَ. = ٢ن^{٢} سَ + ٤ن^{٢} صَ

∴ الشغل = قَ • فَ = (٢ ، ٤) • (٢ن^{٢} ، ٤ن^{٢}) = ٤ن^{٢} + ١٦ن^{٢} = ٢٠ن^{٢}

∴ الشغل المبذول فى الفترة [٠ ، ٣] = ٢٠ × (٣)^{٢} = ١٨٠ جول = ٤٠ن

∵ القدرة = $\frac{\text{ء ش}}{\text{ء ن}}$ = ٤٠ن ∴ عند ن = ٣ : القدرة = ١٢٠ وات

مثال (١١) : جسم كتلته ٣ كجم يتحرك تحت تأثير قوة مقدارها ق نيوتن فى اللحظة ن ثانية فإذا كان متجه موضعه $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{٢ن}\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{ن}^{٣}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ن}^{٢}\ \overrightarrow{\text{ع}})$ أوجد :

أولاً : مقدار القوة عند ن = ١ ثانية . ثانيًا : القدرة فى اللحظة ن ثانية .

ثالثًا : أحسب الشغل المبذول من ن = ٠ إلى ن = ٢ث

الحل

$\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{ر}} - \overrightarrow{\text{ر}}_{\text{.}} = \text{٢ن}\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{ن}^{٣}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ن}^{٢}\ \overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ع}} = \text{٢}\ \overrightarrow{\text{س}} + \text{٣ن}^{٢}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{٢ن}\ \overrightarrow{\text{ع}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{ح}} = \text{٦ن}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{٢}\ \overrightarrow{\text{ع}}$

أولاً : $\overrightarrow{\text{ق}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ح}} = \text{١٨ن}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{٦}\ \overrightarrow{\text{ع}}$ ، عند ن = ١ $\therefore \overrightarrow{\text{ق}} = \text{١٨}\ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{٦}\ \overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{ق}}\| = \sqrt{(\text{١٨})^{٢} + (\text{٦})^{٢}} = \text{٦}\sqrt{\text{١٠}}$ نيوتن

$\therefore \text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}} = (\text{٠ ، ١٨ن ، ٦}) \cdot (\text{٢ن ، ن}^{٣}\text{ ، ن}^{٢})$ $\therefore \text{ش} = \text{١٨ن}^{٤} + \text{٦ن}^{٢}$

ثانيًا : القدرة $= \dfrac{\text{ء ش}}{\text{ء ن}} = \text{٧٢ن}^{٣} + \text{١٢ن}$

ثالثًا : عندما ن $\in$ [٠ ، ٢] $\therefore$ ش $= \text{١٨} \times (\text{٢})^{٤} + \text{٦}(\text{٢})^{٢} = \text{٣١٢}$ جول

حل آخر لإيجاد الشغل : $\text{ش} = \int_{\text{.}}^{\text{٢}} \text{القدرة ء ن} = \int_{\text{.}}^{\text{٢}} (\text{٧٢ن}^{٣} + \text{١٢ن})\ \text{ء ن}$

$\text{ش} = [\text{١٨ن}^{٤} + \text{٦ن}^{٢}]_{\text{.}}^{\text{٢}} = \text{٣١٢}$ جول

حاول أن تحل

(١) محرك طائرة يعطى قوة مقدارها ٣٢,٢ × ١٠^٤ نيوتن عندما تكون سرعة الطائرة ٩٠٠ كم/س إحسب قدرة المحرك بالحصان

حاول أن تحل

(٢) شاحنة كتلتها ٦ طن تتحرك على طريق أفقى بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم/س عندما تكون قدرة محركها ٣٠ حصان ، احسب مقاومة الطريق بثقل الكيلوجرام لكل طن من الكتلة.

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق إذا هبطت السيارة بعد ذلك على نفس المستوى بعد تحميلها ببضائع كتلتها ٣ طن، أحسب أقصى سرعة للهبوط بالكم/س علما بأن المقاومة عن كل طن من الكتلة لم تتغير .

لاحظ أن: اذا كان معدل بذل الشغل منتظمًا (ثابتًا) فإن :

$$\text{القدرة} = \frac{\text{الشغل}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{القوة} \times \text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

حاول أن تحل

(٥) قاطرة كتلتها ٢٨ طن تجر عربة كتلتها ٥٦ طن بعجلة ثابتة أسفل منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ولما بلغت قدرة محركها ٨٤ حصان أصبحت سرعتها ٢١ م/ث احسب عجلة الحركة اذا علمأن المقاومة ١٠ ث كجم لكل طن من الكتلة

حاول أن تحل

(٦) أثرت قوة ثابتة ق على جسيم بحيث كان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة ف = (٣ن^٢ +ن) س - ٤ ن ص حيث س ، ص متجها وحدة متعامدين . أوجد ق إذا كانت قدرة القوة ق تساوى ٧٥ إرج/ث عندما ن = ٤ ثانية، وكانت قدرة القوة ق تساوى ١٦٥ إرج/ث عندما ن = ٩ ثانية علمًا بأن ف مقيسة بالسنتيمتر ، ق مقيسة بوحدة الإرج.

حاول أن تحل

(٧) إذا كانت قوة محرك سيارة تبذل شغلًا بمعدل يعطى خلال الفترة الزمنيةن∋ [٠، ٥]بالعلاقة ١٤٤ ن - ٢٦ ن^٢ ، و إذا كانت كتلة السيارة ٩٨٠ كجم وسرعتها فى نهاية الثانية الثالثة ٩٠ كم/س فأوجد سرعتها فى نهاية الثانية الرابعة.