مراجعة

الجبر والفراغية

للصف الثالث الثانوي

الأستاذ / محمد عبدالعزيز

قواعد المنهج

- $\text{ن}! = \text{ن}\,(\text{ن}-1)! = \text{ن}\,(\text{ن}-1)\,(\text{ن}-2)!$
- $0! = 1! = 1$
- $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) \times \dots \times (\text{ن}-\text{ر}+1)$
- $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ن}! = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
- $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$
- $^{\text{ن}}\text{ل}_{0} = 1$
- $^{\text{ن}}\text{ل}_{1} = \text{ن}$
- $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!}$
- $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$ يستخدم اذا كان $\text{ر} > \frac{1}{2}\text{ن}$
- $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{0} = 1$
- $^{\text{ن}}\text{ق}_{1} = \text{ن}$
- اذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{هـ}}$ فإن ا

  إما $\text{ن} = \text{ر} + \text{هـ}$ أو $\text{ن} = \text{ر} + \text{هـ} \in \{0, 1, 2, \dots, \text{ن}\}$
- $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}-1}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ر}}$

- $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{ن-ر+1}{ر} = \frac{ن - \text{الدليل الصغير}}{\text{الدليل الكبير}}$

- ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$

- اذا كان ${}^{ن}ل_{س} = {}^{ن}ل_{ص}$

  فإن $س = ص \in \{0, 1, 2, \dots, ن\}$

  أو $س = ن$ ، $ص = ن - 1$

  أو $ص = ن$ ، $س = ن - 1$

- عند اختيار ر من الاشياء من بين ن من الاشياء نراعى

مع مراعاة الترتيب		مع عدم مراعاة الترتيب	
بدون احلال	مع الاحلال	بدون إحلال	مع الاحلال
${}^{ن}ل_{ر}$	$ن^{ر}$	${}^{ن}ق_{ر}$	${}^{ن+ر-1}ق_{ر}$

- عدد طرق ترتيب ر من الاشياء فى صف به ن من الاماكن

عدد الاشياء (ر) = عدد الاماكن (ن)	ترتيب ر من الاشياء فى ن من الاماكن	
	متجاورة	الجوار ليس شرطا
$ن!$	$(ن-ر+1)\ ر!$	${}^{ن}ل_{ر}$

- عدد طرق ترتيب ر من الاشياء فى دائرة بها ن من الأماكن

عدد الاشياء (ر) = عدد الأماكن (ن)	ترتيب ر من الاشياء فى (ن) من الأماكن	
	متجاورة	الجوار ليس شرطا
$(ن-1)!$	$ن\ ر!$	${}^{ن-1}ل_{ر-1}$

M

- عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ن ضلع $= {}^{ن}ق_{ر} - ن$

- عدد المثلثات الناتجة من توصيل (ر) من الرؤس لمضلع عدد أضلاعه (ن) $= {}^{ن}ق_{ر}$

- $(أ+ب)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\, ب\, أ^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\, ب^{2}\, أ^{ن-2} + \dots + ب^{ن}$

- $(أ-ب)^{ن} = أ^{ن} - {}^{ن}ق_{1}\, ب\, أ^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\, ب^{2}\, أ^{ن-2} - {}^{ن}ق_{3}\, ب^{3}\, أ^{ن-3}$
  $+ {}^{ن}ق_{4}\, ب^{4}\, أ^{ن-4} - \dots + (-ب)^{ن}$

- $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \times ب^{ر} \times أ^{ن-ر}$

- $(1+س)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_{1}\, س + {}^{ن}ق_{2}\, س^{2} + {}^{ن}ق_{3}\, س^{3} + \dots + س^{ن}$

- الحد الاوسط فى مفكوك $(أ+ب)^{ن}$

  إذا كان ن عدد فردى يكون لدينا حدين اوسطين ترتيبهما $\frac{ن+1}{2}$ ، $\frac{ن+3}{2}$

  اما اذا كان ن عدد زوجى فيكون لدينا حد او سط واحد ترتيبه $\frac{ن}{2} + 1 = \frac{ن+2}{2}$

- $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = 2(ح_{1} + ح_{3} + ح_{5} + \dots)$ لمفكوك $(س+أ)^{ن}$

- $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = 2(ح_{2} + ح_{4} + ح_{6} + \dots)$ لمفكوك $(س+أ)^{ن}$

- مجموع معاملات حدود المفكوك $(أس \pm بص)^{ن} = (أ \pm ب)^{ن}$

- فى مفكوك $(س+ص)^{ن}$ يكون $\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{ص}{س}$

  ، $\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل ص}}{\text{معامل س}}$

M

- لايجاد أكبر معامل فى مفكوك $(أ س + ب ص)^{ن}$ يكون

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} \geq 1 \quad ، \quad \frac{\text{معامل } ح_{ر+2}}{\text{معامل } ح_{ر+1}} \leq 1$$

ومنهما نستنتج قيمه $ر$ وذلك على فرض أن $ح_{ر+1}$ الأكبر

- فى مفكوك $(1 + س)^{ن}$ حيث ن عدد زوجى يكون أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الاوسط $= {}^{ن}ق_{\frac{ن}{2}}$

- فى مفكوك $(1 + س)^{ن}$ حيث ن عدد فردى يكون معاملا الحدان الأوسطان متساويان وهما أكبر المعاملات للمفكوك ويساويان ${}^{ن}ق_{\frac{ن-1}{2}}$ ، ${}^{ن}ق_{\frac{ن+1}{2}}$

- $ح_{ر+1}$ من النهاية فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هو $ح_{ر+1}$ من البدايه فى مفكوك $(ص + س)^{ن}$

- مجموع معاملات المفكوك $(أ س \pm ب ص)^{ن}$ $= (أ \pm ب)^{ن}$

الأعداد المركبة

العدد المركب

الصورة الجبرية	الصورة المثلثية	الصورة الأسيه
$ع = س + ت ص$	$ع = ل(حتا\theta + ت حا\theta)$	$ع = ل هـ^{\theta ت}$

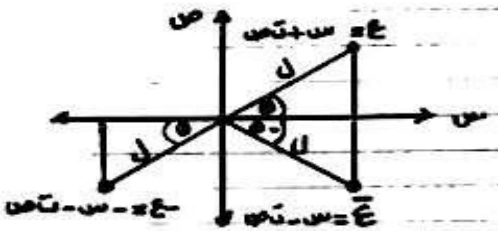
حيث $ل = |ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ، $\theta \in]-\pi ، \pi]$ السعة الاساسية

- اذا كان $ع = س + ت ص$ فإن مرافقه $\bar{ع} = س - ت ص$ ويكون

$$ع + \bar{ع} = 2 س \quad ، \quad ع - \bar{ع} = 2 ت ص$$

$$ع \bar{ع} = س^2 + ص^2 = ل^2$$ حيث ل مقياس العدد المركب $|ع|$

- تمثيل العدد المركب على مستوى أرجاند



- تحويل الصورة الجبريه إلى الصورة المثلثيه

$ع = ل حتا\theta + ت ل حا\theta$

$= س + ت ص$

حيث

$س = ل حتا\theta$

$ص = ل حا\theta$

$\theta = ظا^{-1}\frac{ص}{س}$ ، $\theta = \pi + ظا^{-1}\frac{ص}{س}$

$\theta = -\pi - ظا^{-1}\frac{ص}{س}$ ، $\theta = -ظا^{-1}\frac{ص}{س}$

لاحظ أن اذا كان

* $س > 0$ ، $ص = 0$ فإن $\theta = 0$ * $س < 0$ ، $ص = 0$ فإن $\theta = \pi$
* $س = 0$ ، $ص > 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ * $س = 0$ ، $ص < 0$ فإن $\theta = -\frac{\pi}{2}$

تحويل الصورة المثلثيه الغيرقياسية الى الصورة القياسية

الربع الأول

اذا كان
$ع = ل(حا\,\theta + ت\,حتا\,\theta)$
نحولها الى
$ع = ل(حتا(٩٠-\theta) + ت\,حا(٩٠-\theta))$

الربع الثاني

اذا كان
$ع = ل(-حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta)$
نحولها الى
$= ل(حتا(١٨٠-\theta) + ت\,حا(١٨٠-\theta))$

أما اذا كان
$ع = ل(-حا\,\theta + ت\,حتا\,\theta)$
نحولها إلى
$ع = ل(حتا(٩٠+\theta) + ت\,حا(٩٠+\theta))$

الربع الرابع

اذا كان
$ع = ل(حتا\,\theta - ت\,حا\,\theta)$
نحولها إلى
$ع = ل(حتا(-\theta) + ت\,حا(-\theta))$

أما اذا كان
$ع = ل(حا\,\theta - ت\,حتا\,\theta)$
نحولها إلى
$ع = ل[حتا(-٩٠+\theta) + ت\,حا(-٩٠+\theta)]$

الربع الثالث

اذا كان
$ع = ل(-حتا\,\theta - ت\,حا\,\theta)$
نحولها الى
$ع = ل(حتا(-١٨٠+\theta) + ت\,حا(-١٨٠+\theta))$

اما اذا كان
$ع = ل(-حا\,\theta - ت\,حتا\,\theta)$
نحولها إلى
$ع = ل(حتا(-٩٠-\theta) + ت\,حا(-٩٠-\theta))$

- اذا كان $ع_١ = ل_١(حتا\,\theta_١ + ت\,حا\,\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢(حتا\,\theta_٢ + ت\,حا\,\theta_٢)$ فإن
  - $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ (حتا(\theta_١+\theta_٢) + ت\,حا(\theta_١+\theta_٢))$
  - $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} (حتا(\theta_١-\theta_٢) + ت\,حا(\theta_١-\theta_٢))$
- اذا كان $ع = ل(حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta)$ فإن
  - $ع^ن = ل^ن (حتا\,ن\theta + ت\,حا\,ن\theta) = ل^ن هـ^{ن\theta ت}$
  - $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل} (حتا(-\theta) + ت\,حا(-\theta)) = \frac{1}{ل} هـ^{-\theta ت}$

- اذا كان $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$ فإن

★ $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١+\theta_٢)ت}$ ★ $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١-\theta_٢)ت}$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $ع = س + ص\,ت$ هما $\pm\left[\sqrt{\frac{ل+س}{٢}} \pm ت \sqrt{\frac{ل-س}{٢}}\right]$ حيث ل سعه العدد

- نظريه ديموافر (نستخدم لايجاد الجذر النوني للعدد)

$$(حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta)^ن = حتا\,ن\theta + ت\,حا\,ن\theta$$

$$(حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta)^{\frac{1}{ن}} = حتا\,\frac{\theta + ٣٦٠ر}{ن} + ت\,حا\,\frac{\theta + ٣٦٠ر}{ن}$$

حيث $ن \in ص^+$ ،

- خذ بالك من
  - ★ $١ = حتا\,٠ + ت\,حا\,٠$
  - ★ $ت = حتا\,\frac{\pi}{٢} + ت\,حا\,\frac{\pi}{٢}$
  - ★ $-١ = حتا\,\pi + ت\,حا\,\pi$
  - ★ $-ت = حتا\,\frac{-\pi}{٢} + ت\,حا\,\frac{-\pi}{٢}$
- افتكر
  - ★ $حا(-\theta) = -حا\,\theta$
  - ★ $حتا(-\theta) = حتا\,\theta$
  - ★ $ظا(-\theta) = -ظا\,\theta$
- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

١ ، $\omega = -\frac{1}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ ، $\omega^٢ = -\frac{1}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

- $١ + \omega + \omega^٢ = ٠$ ومنها $١ + \omega = -\omega^٢$
  $١ + \omega^٢ = -\omega$
  $\omega + \omega^٢ = -١$
- $١ \times \omega \times \omega^٢ = ١$ ومنها $\omega = \frac{1}{\omega^٢}$ ، $\omega^٢ = \frac{1}{\omega}$ ، $\omega^٣ = ١$
- $\omega - \omega^٢ = \omega^٢ - \omega = \pm\sqrt{٣}\,ت$
- $\omega^{٣ن} = ١$

مراجعة المحددات والمصفوفات

- قيمة المحدد لا تتغير عند فكه بعناصر أى صف أو أى عمود مستخدماً قاعدة إشارات فك للمحدد التاليه

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- يمكن إخراج عامل مشترك من أحد صفوف المحدد أو من أحد أعمدة المحدد

مثال

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٦ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٦ \end{vmatrix}$$

ثم أخذ عامل مشترك من $ع_٢$

- تبديل صفين فى المحدد كل مكان الآخر يغير اشارة المحدد كذلك الحال بالنسبه للأعمدة.

مثال

$$\begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$$

تم تبديل $ع_١ ، ع_٢$

- لا تتغير قيمه المحدد إذا اضفنا عناصر أى صف أو مضاعفاته إلى عناصر أى صف أخر . كذلك الحال بالنسبه للأعمدة

مثال

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٢+١ \\ ٣ & ١ & ١+٢ \\ ٢ & ٤ & ٤+١ \end{vmatrix}^{ع_١+ع_٢} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٣+٢ & ٤+١ & ٢+٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$$

ثم اضافه ص٣ إلى ص٢

- قيمة المحدد = صفر فى الحالات التالية
  - إذا كانت عناصر أحد الصفوف = صفر
  - اذا كان عناصر أحد الاعمدة = صفر
  - اذا تساوت العناصر المناظرة لصفين
  - اذا تساوت العناصر المناظرة لعمودين

مثال

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$ لأن ص١ = ص٢

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$ لأن عناصر $ع_١$ كلها أصفار

- قيمة المحدد على الصورة المثلثيه يساوى حاصل ضرب عناصر القطـــر الرئيسى

مثال

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ \times ٥$$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٥ & ٢ & ٠ \\ ٧ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = -(٣ \times ٢ \times ٤)$$

- تدوير المحدد لا يغير من قيمته

مثال

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٠ \\ ٧ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٦ & ٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$$

- المصفوفه أ تسمى مصفوفه منفردة اذا كان $|أ| = ٠$
- المعكوس الضربى للمصفوفه أ على النظم ٢×٢

اذا كان $أ = \begin{pmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{pmatrix}$ حيث $|أ| = \Delta \neq ٠$

فإن $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{pmatrix}$

- المعكوس الضربى لمصفوفه على النظم ٣×٣ لايجاد $أ^{-١}$ نتبع الخطوات التاليه
  - ١- نوجد $|أ|$
  - ٢- نوجد مصفوفه العوامل المرافقه $\bar{أ}$
  - ٣- نوجد المصفوفه الملحقه $أ^{مل}$ حيث $أ^{مل} = (\bar{أ})^{مد}$
  - ٤- نوجد $أ^{-١}$ حيث $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل}$

- إذا كان أ مصفوفه غير صفريه على النظم $م \times ن$
فإن $١ \leq ر(أ) \leq ن$ إذا كان $م \geq ن$
$١ \leq ر(أ) \leq م$ إذا كان $م \leq ن$
حيث ر(أ) هى رتبه المصفوفه أ وهى درجه أكبر محدد ≠ صفر يمكن تكوينه من عناصر المصفوفه أ

- إذا كان أ مصفوفه صف أو عمود غير صفريه فإن ر(أ) = ١

- إذا كانت المصفوفه أ هى مصفوفه وحدة على النظم $ن \times ن$ فإن ر(أ) = ن

- إذا كان أ = $\boxed{}$ فإن ر(أ) = صفر

- بحث إمكانيه حل مجموعه من المعادلات الخطيه
يوجد لدينا ٣ احتمالات
① إذا كان ر(أ) = ر($أ^*$) = عدد المجاهيل فإنه يوجد للمعادلات حل وحيد
② إذا كان ر(أ) = ر($أ^*$) ≠ عدد المجاهيل فإن للمعادلات عدد لانهائى من الحلول
③ إذا كان ر(أ) ≠ ر($أ^*$) فإن المعادلات لا يوجد لها حل

- بحث إمكانيه حل مجموعه من المعادلات المتجانسه (الحد المطلق = صفر) يوجد حالتان
① إذا كان ر(أ) = عدد المجاهيل فإن الحل الصفرى هو الحل الوحيد للمعادلات ح = {(٠، ٠، ٠)}
② ر(أ) ≠ عدد المجاهيل فإن للمعادلات عدد لانهائى من الحلول من ضمنها الحل الصفرى

- خد بالك من ★ $أ^{-1} \times أ = I$
★ $(أ ب)^{-1} = ب^{-1} \times أ^{-1}$
★ $(أ^{-1})^{-1} = أ$
★ $(أ^{-1})^{مد} = (أ^{مد})^{-1}$

حيث أ ، ب مصفوفه منفردة

قواعد الفراغية

- البعد بين نقطتين
إذا كان أ $(س_١، ص_١، ع_١)$ ، ب = $(س_٢، ص_٢، ع_٢)$
فإن $أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

- إحداثيات منتصف قطعه مستقيمة
إذا كان أ $(س_١، ص_١، ع_١)$ ، ب $(س_٢، ص_٢، ع_٢)$
فإن إحداثيات منتصف $\overline{أب}$ هى
$$= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$$

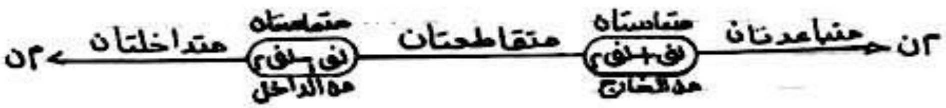
- إحداثيات نقطه تقاطع متوسطات المثلث
إذا كان أ ، ب ، حـ هى رؤس مثلث حيث أ $(س_١، ص_١، ع_١)$ ، ب $(س_٢، ص_٢، ع_٢)$ ، حـ $(س_٣، ص_٣، ع_٣)$ فإن إحداثيات نقطة تقاطع المتوسطات هى
$$= \left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} ، \frac{ع_١ + ع_٢ + ع_٣}{٣}\right)$$

- معادلة الكرة
معادلة الكرة التى مركزها (ل ، ك ، ن) وطول نصف قطرها نق هى
$$(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$$

وإذا كان المركز نقطة الأصل فإن المعادلة تصبح
$$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = نق^٢$$

- الصورة العامه لمعادلة الكرة هى
$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + 2\text{ل}\,\text{س} + 2\text{ك}\,\text{ص} + 2\text{ن}\,\text{ع} + \text{د} = 0$
ويكون مركزها (−ل ، −ك ، −ن)
ويكون $\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ن}^2 - \text{د}}$
واذا كان د = ٠ فإن الكرة تمر بنقطه الأصل (و)
- الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبه وطول نصف قطرها نق يكون مركزها (نق، نق، نق)
- اذا كان مركز الكرة يقع على محور السينات (س) وتمس المستوى ص ع فإن مركزها (س، ٠، ٠) ونق = |س|
- اذا كان مركز الكرة يقع على محور الصادات (ص) وتمس المستوى ع س فإن مركزها (٠، ص، ٠) ونق = |ص|
- اذا كان مركز الكرة يقع على محور ع وتمس المستوى س ص فإن مركزها (٠، ٠، ع) ويكون نق = |ع|
- الكرة التى مركزها (س، ص، ع) وتمس المستوى س ص يكون نصف قطرها نق = |ع|
- الكرة التى مركزها (س، ص، ع) وتمس المستوى س ع يكون نصف قطرها نق = |ص|
- الكرة التى مركزها (س، ص، ع) وتمس المستوى ص ع يكون نصف قطرها نق = |س|
- مساحه سطح الكرة = $4\,\pi\,\text{نق}^2$
- حجم الكرة = $\frac{4}{3}\,\pi\,\text{نق}^3$

- أوضاع كرتين



- متجه الموضع
اذا كانت النقطه أ (أس، أص، أع) فإن متجه الموضع للنقطه أ هو $\overrightarrow{\text{و أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س}، \text{أ}_\text{ص}، \text{أ}_\text{ع})$
حيث $\text{أ}_\text{س}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور س
، $\text{أ}_\text{ص}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه محور ص
، $\text{أ}_\text{ع}$ تسمى مركبه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه محور ع
- معيار المتجه (طوله)
اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س}، \text{أ}_\text{ص}، \text{أ}_\text{ع})$ فإن معيار $\overrightarrow{\text{أ}}$ هو $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$
حيث
$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أ}_\text{س}^2 + \text{أ}_\text{ص}^2 + \text{أ}_\text{ع}^2}$
- جمع وطرح المتجهات
اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_\text{س}، \text{أ}_\text{ص}، \text{أ}_\text{ع})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_\text{س}، \text{ب}_\text{ص}، \text{ب}_\text{ع})$
فإن
  - $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_\text{س}+\text{ب}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص}+\text{ب}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع}+\text{ب}_\text{ع})$
  - $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_\text{س}-\text{ب}_\text{س} ، \text{أ}_\text{ص}-\text{ب}_\text{ص} ، \text{أ}_\text{ع}-\text{ب}_\text{ع})$
- خواص العمليات على المتجهات
  - $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$
  - $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) + \overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{أ}} + (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}})$
  - $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{أ}}$
  - $\overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}}) = \overrightarrow{\text{و}}$
  - اذا كان ك ∈ ح فإن $\text{ك}\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك}\,\text{أ}_\text{س}، \text{ك}\,\text{أ}_\text{ص}، \text{ك}\,\text{أ}_\text{ع})$

- **تساوى المتجهات**
  اذا كان $(\text{أ}_{س}, \text{أ}_{ص}, \text{أ}_{ع}) = (\text{ب}_{س}, \text{ب}_{ص}, \text{ب}_{ع})$ فإن
  $\text{أ}_{س} = \text{ب}_{س}$ ، $\text{أ}_{ص} = \text{ب}_{ص}$ ، $\text{أ}_{ع} = \text{ب}_{ع}$

- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ هما متجها موضع للنقطتين أ ، ب
  فإن $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$

- **متجه الوحدة**
  اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ متجه وحدة فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = 1$ وحدة طول

- **متجهات الوحدة الأساسية**
  - $\overrightarrow{س} = (1, 0, 0)$ هو متجه وحدة فى الإتجاه الموجب لمحور السينات حيث $\|\overrightarrow{س}\| = 1$
  - $\overrightarrow{ص} = (0, 1, 0)$ هو متجه وحدة فى الإتجاه الموجب لمحور الصادات حيث $\|\overrightarrow{ص}\| = 1$
  - $\overrightarrow{ع} = (0, 0, 1)$ هو متجه وحدة فى الإتجاه الموجب لمحور ع حيث $\|\overrightarrow{ع}\| = 1$

- **التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية**
  اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{س}, \text{أ}_{ص}, \text{أ}_{ع})$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسيه كالتالى
  $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{س}, \text{أ}_{ص}, \text{أ}_{ع}) = \text{أ}_{س}\,\overrightarrow{س} + \text{أ}_{ص}\,\overrightarrow{ص} + \text{أ}_{ع}\,\overrightarrow{ع}$

- **إيجاد متجه وحدة فى إتجاه متجه معلوم**
  اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} (\text{أ}_{س}, \text{أ}_{ص}, \text{أ}_{ع})$ فإن متجه الوحدة فى إتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هو $\overrightarrow{ى}_{\text{أ}}$ حيث

$$\overrightarrow{ى}_{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$$

- **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه**
  اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{س}, \text{أ}_{ص}, \text{أ}_{ع})$ يصنع زوايا قياساتها $(\theta_{س}, \theta_{ص}, \theta_{ع})$ مع الاتجاهات الموجبه للمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن
  - $\text{أ}_{س} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ حتا $\theta_{س}$ ، $\text{أ}_{ص} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ حتا $\theta_{ص}$ ، $\text{أ}_{ع} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ حتا $\theta_{ع}$

- $(\theta_{س}, \theta_{ص}, \theta_{ع})$ تسمى بزوايا الإتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$
- حتا $\theta_{س}\,\overrightarrow{س}$ + حتا $\theta_{ص}\,\overrightarrow{ص}$ + حتا $\theta_{ع}\,\overrightarrow{ع}$ هو متجه وحدة فى إتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$
- حتا$^2\theta_{س}$ + حتا$^2\theta_{ص}$ + حتا$^2\theta_{ع}$ = 1

- **الضرب القياسى**

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهى موضع قياس الزاويه المحصورة بينهما θ حيث $\theta \in [0, 180°]$ فإن

★ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ حتا θ
$= \text{أ}_{س}\,\text{ب}_{س} + \text{أ}_{ص}\,\text{ب}_{ص} + \text{أ}_{ع}\,\text{ب}_{ع}$

★ اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = 0$

★ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\|)^2$

★ حتا $\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

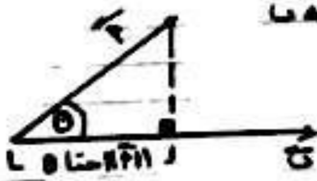
واذا كان حتا $\theta = 1$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ وفى نفس الإتجاه
حتا $\theta = -1$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ وفى عكس اتجاهه
حتا $\theta = 0$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ ($\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = 0$)

- **خواص الضرب القياسى**
  - $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$
  - $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$
  - $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})$ حيث $\text{ك} \in ح$

- **مركبه (مسقط) متجه فى إتجاه متجه آخر**

مركبه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ يرمز لها بالرمز $\text{أ}_{\text{ب}}$ حيث

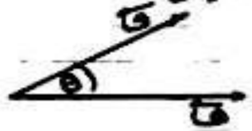
$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ حتا } \theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$



- الشغل المبذول من قوة $\overrightarrow{ق}$ لاحداث إزاحه $\overrightarrow{ف}$

$ش = \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$= \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\| \, حتا \theta$



● الضرب الإتجاهى

اذاكان $\overrightarrow{أ}$ (أس ، أص ، أع) ، $\overrightarrow{ب}$ (بس ، بص ، بع) فإن

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \, حا \theta) \, \overrightarrow{ى}$$

حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$
، θ قياس الزاويه الصغرى بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$$

- خواص الضرب الإتجاهى

- $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = - \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$
- $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$
- $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ج}$

- متجه الوحدة العمودى على مستوى المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ هو $\overrightarrow{ى}$ حيث

$$\overrightarrow{ى} = \frac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}$$

- الضرب الإتجاهى لمتجهات الوحدة الأساسية

- $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$
- $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$
- $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$

● توازى متجهين

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ (أس ، أص ، أع) ، $\overrightarrow{ب}$ (بس ، بص ، بع)
فإن $\overrightarrow{أ} \,//\, \overrightarrow{ب}$ اذا تحقق أحد الشروط التاليه

١- $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

٢- $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

٣- $\overrightarrow{أ} = ك \, \overrightarrow{ب}$ حيث $ك \in ح$

● المعنى الهندسى للضرب الإتجاهى

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$ = ضعف مساحه المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان
= مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

- الضرب الاتجاهى فى مستوى الاحداثيات س ص

اذا كان $\overrightarrow{أ}$ (أس ، أص) ، $\overrightarrow{ب}$ (بس ، بص) فإن

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س) \, \overrightarrow{ع}$$

- الضرب الثلاثى القياسى

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ ج_س & ج_ص & ج_ع \end{vmatrix}$$

وتكون القيمة المطلقه لحاصل الضرب الثلاثى
$|\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج}|$ = حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ثلاثه متجهات تمثل أحرف غير متوازى

* $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ج}$
* لا تتغير قيمة الضرب الثلاثى القياسى إذا تم تبديل المتجهات مع احتفاظهم بنفس التركيب الدورى

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ج} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ج} \cdot \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$$

معادلات الخط المستقيم

اذا كان $\overline{\text{ر}}$ (س، ص، ع) متجه موضع نقطه مجهوله على المستقيم ، $\overline{\text{أ}}$ (س${}_1$، ص${}_1$، ع${}_1$) متجه موضع نقطه معلومه على المستقيم ، $\overline{\text{ى}}$ (أ، ب، حـ) متجه اتجاه للخط المستقيم فإن الصور المختلفه لمعادلات المستقيم هى كالتالى

* **الصورة المتجهة**

$\overline{\text{ر}} = \overline{\text{أ}} + \text{ك}\ \overline{\text{ى}}$ حيث ك ثابت $\neq$ ٠

(س، ص، ع) = (س${}_1$، ص${}_1$، ع${}_1$) + ك (أ، ب، حـ)

* **الصورة البارامترية**

س = س${}_1$ + أ ك ، ص = ص${}_1$ + ب ك ، ع = ع${}_1$ + حـ ك

* **الصورة الإحداثية**

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}}$$

اذا كان أ = ٠ فإن المعادلات تصبح س = س${}_1$ ، $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$ = $\frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}}$

اذا كان ب = ٠ فإن المعادلات تصبح ص = ص${}_1$ ، $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}}$

اذا كان حـ = ٠ فإن المعادلات تصبح $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$ ، ع = ع${}_1$

● إذا كان (ل، م، ن) متجه وحدة فى اتجاه المستقيم فإن $\overline{\text{ى}}$ = ك (ل، م، ن)

(أ، ب، حـ) = ك (ل، م، ن)

حيث ل، م، ن هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم ، أ، ب، حـ هى نسب اتجاه المستقيم

نسب الاتجاه أ، ب، حـ تتناسب مع جيوب تمام زوايا الاتجاه ل، م، ن ويمكن كتابه الصورة الاحداثيه كالتالى $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$

اذا كان المستقيم يمر بالنقطتين أ، ب فإن متجه اتجاه المستقيم هو $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}}$

معادلات المحاور

* معادلة محور س هى ع = ٠ ، ص = ٠
* معادله محور ص هى س = ٠ ، ع = ٠
* معادلة محور ع هى س = ٠ ، ص = ٠

معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل هى

* المتجهه $\overline{\text{ر}}$ = ك (أ، ب، حـ)
* البارامتريه هى س = أ ك ، ص = ب ك ، ع = حـ ك
* الاحداثيه هى $\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{حـ}}$

معادله مستقيم مار بالنقطه (س${}_1$، ص${}_1$، ع${}_1$) موازيا

* موازيا محور س هى ص = ص${}_1$ ، ع = ع${}_1$
* موازيا محور ع هى س = س${}_1$ ، ص = ص${}_1$
* موازيا محور ص هى س = س${}_1$ ، ع = ع${}_1$

لايجاد نقطه تقع على المستقيم ر = أ + ك هـ نضع ك = أى عدد ما عدا صفر نحصل على نقطه على الخط المستقيم

معادلات المستوى

* الصورة المتجهه $\overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{ر}} = \overline{\text{ن}} \cdot \overline{\text{أ}}$

حيث أ (س${}_1$، ص${}_1$، ع${}_1$) نقطه على المستوى ، ن (أ، ب، حـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى ، $\overline{\text{ر}}$ (س، ص، ع) متجه موضع نقطه على المستوى

★ الصورة القياسية

$\text{أ}(\text{س}-\text{س}_1)+\text{ب}(\text{ص}-\text{ص}_1)+\text{جـ}(\text{ع}-\text{ع}_1)=0$

★ الصورة العامة

$\text{أ س}+\text{ب ص}+\text{جـ ع}+\text{د}=0$

حيث $\vec{\text{ن}}(\text{أ}،\text{ب}،\text{جـ})$ ، $\text{د}=-\vec{\text{ن}}\cdot\vec{\text{أ}}$

● معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور

$$\frac{\text{س}}{\text{س}_1}+\frac{\text{ص}}{\text{ص}_1}+\frac{\text{ع}}{\text{ع}_1}=1$$

حيث $(\text{س}_1،0،0)$ ، $(0،\text{ص}_1،0)$ ، $(0،0،\text{ع}_1)$ هى نقط التقاطع مع المحاور س ، ص ، ع على الترتيب

● الزاوية بين متجهين $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$

$$\text{جتا}\,\theta=\frac{\vec{\text{أ}}\cdot\vec{\text{ب}}}{\|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\|}$$ حيث $0\le\theta\le 180$

● الزاوية بين مستقيمين

★ $\text{جتا}\,\theta=\frac{|\vec{\text{هـ}}_1\cdot\vec{\text{هـ}}_2|}{\|\vec{\text{هـ}}_1\|\,\|\vec{\text{هـ}}_2\|}$ حيث $\vec{\text{هـ}}_1$ ، $\vec{\text{هـ}}_2$ متجها اتجاه المستقيمين ، $0\le\theta\le 90$

★ إذا كان $(\text{ل}_1،\text{م}_1،\text{ن}_1)$ ، $(\text{ل}_2،\text{م}_2،\text{ن}_2)$ هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن $\text{جتا}\,\theta=|\text{ل}_1\text{ل}_2+\text{م}_1\text{م}_2+\text{ن}_1\text{ن}_2|$

● الزاويه بين مستويين

$$\text{جتا}\,\theta=\frac{|\vec{\text{ن}}_1\cdot\vec{\text{ن}}_2|}{\|\vec{\text{ن}}_1\|\,\|\vec{\text{ن}}_2\|}$$ حيث $0\le\theta\le 90$

حيث

$\vec{\text{ن}}_1$ متجه اتجاه عمودى على المستوى الأول

$\vec{\text{ن}}_2$ متجه إتجاه عمودى على المستوى الثانى

● شرط توازى متجهين $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$

إذا كان $\vec{\text{أ}}=(\text{أ}_\text{س}،\text{أ}_\text{ص}،\text{أ}_\text{ع})$ ، $\vec{\text{ب}}=(\text{ب}_\text{س}،\text{ب}_\text{ص}،\text{ب}_\text{ع})$ فإن $\vec{\text{أ}}\parallel\vec{\text{ب}}$ اذا تحقق أحد الشروط التاليه

(١) $\vec{\text{أ}}=\text{ك}\,\vec{\text{ب}}$ حيث $\text{ك}\in\text{ح}^*$

(٢) $\frac{\text{أ}_\text{س}}{\text{ب}_\text{س}}=\frac{\text{أ}_\text{ص}}{\text{ب}_\text{ص}}=\frac{\text{أ}_\text{ع}}{\text{ب}_\text{ع}}$

(٣) جتا θ = ١ فإن $\vec{\text{أ}}\parallel\vec{\text{ب}}$ وهما نفس الإتجاه

جتا θ = −١ فإن $\vec{\text{أ}}\parallel\vec{\text{ب}}$ ومتضادان فى الاتجاه

(٤) $\vec{\text{أ}}\times\vec{\text{ب}}=\vec{\text{و}}$

● شرط توازى مستقيمين

المستقيمان ل١ ، ل٢ يكونا متوازيان إذا كان $\vec{\text{هـ}}_1\parallel\vec{\text{هـ}}_2$ حيث $\vec{\text{هـ}}_1$ ، $\vec{\text{هـ}}_2$ متجها إتجاه ل١ ، ل٢

● شرط توازى مستويين

يكون المستويان متوازيان إذا كان $\vec{\text{ن}}_1\parallel\vec{\text{ن}}_2$ حيث $\vec{\text{ن}}_1$ ، $\vec{\text{ن}}_2$ هما متجها الإتجاه العمودى عليهما.

● شرط تعامد متجهين $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$

$\vec{\text{أ}}\perp\vec{\text{ب}}$ إذا تحقق أحد الشروط التاليه

(١) جتا θ = صفر

(٢) $\vec{\text{أ}}\cdot\vec{\text{ب}}=0$

أى $\text{أ}_\text{س}\text{ب}_\text{س}+\text{أ}_\text{ص}\text{ب}_\text{ص}+\text{أ}_\text{ع}\text{ب}_\text{ع}=0$

شرط تعامد مستقيمين

يكون المستقيمان متعامدان اذا كان $\vec{ه}_1 \perp \vec{ه}_2$ حيث $\vec{ه}_1$ ، $\vec{ه}_2$ متجه اتجاه المستقيمين

شرط تعامد مستويين

يكون المستويين متعامدين اذا كان $\vec{ن}_1 \perp \vec{ن}_2$ حيث $\vec{ن}_1$ ، $\vec{ن}_2$ متجها الاتجاه العمودى على المستويين

طول العمود من نقطه إلى مستقيم

لايجاد طول العمود الساقط من نقطه جـ على $\overleftrightarrow{أب}$ نتبع الخطوات التاليه

(١) نوجد طول $\overline{جب} = \|\overrightarrow{جب}\|$

(٢) نوجد طول بك = مقياس مسقط $\overrightarrow{بج}$ فى إتجاه $\overrightarrow{بأ}$ $= \dfrac{\overrightarrow{بج} \cdot \overrightarrow{بأ}}{\|\overrightarrow{بأ}\|}$

طريقه أخرى

$جتا هـ = \dfrac{\overrightarrow{أج} \cdot \vec{ه}}{\|\overrightarrow{أج}\| \, \|\vec{ه}\|}$

$جد = \|\overrightarrow{أج}\| \, جا هـ$

(٣) نوجد طول جك من فيثاغورث جك = $\sqrt{(جب)^2 - (بك)^2}$

ملاحظه : يمكن استخدام $\vec{ه}$ متجه إتجاه للمستقيم بدلاً من $\overrightarrow{بأ}$

طول العمود من نقطه إلى مستوى

البعد بين النقطه $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ والمستوى أ س + ب ص + جـ ع + د = ٠ حيث

$$ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$$

اذا كونت $^{ن}ق_٤$ ، $^{ن}ق_٥$ ، $^{ن}ق_٦$ متتابعه حسابيه فاوجد قيمة ن

الحل

$^{ن}ق_٤ + {}^{ن}ق_٦ = ٢ \, {}^{ن}ق_٥$ بالقسمه على $^{ن}ق_٥$

$$\frac{^{ن}ق_٤}{^{ن}ق_٥} + \frac{^{ن}ق_٦}{^{ن}ق_٥} = ٢$$

$$\frac{٥}{ن-٤} + \frac{ن-٥}{٦} = ٢$$ بالضرب × ٦(ن−٤)

$٣٠ + (ن-٥)(ن-٤) = ٢ \times ٦(ن-٤)$

$٣٠ + ن^2 - ٤ن - ٥ن + ٢٠ = ١٢ن - ٤٨$

$ن^2 - ٩ن + ٥٠ = ١٢ن - ٤٨$

$ن^2 - ٢١ن + ٩٨ = ٠$

$(ن-٧)(ن-١٤) = ٠$

$\therefore ن = ٧$ أو $ن = ١٤$

بكم طريقه يمكن ركن ٥ سيارات فى ٨ أماكن اذا كان الركن (١) فى صف (٢) فى دائرة

الحل

(١) عدد الطرق = $(ن-ر+١) \, ل_ر$

$= (٨-٥+١) \, ل_٥$

$= ٤ \times ل_٥ = ٤ \times ١٢٠ = ٤٨٠$ طريقه

(٢) عدد الطرق = $ن \, ل_ر$

$= ٨ \, ل_٥$

$= ٨ \times ١٢٠$

$= ٩٦٠$ طريقه

أوجد معامل الحد الأوسط فى مفكوك

$(1+3س+3س^2+س^3)^4$

الحل

$(1+3س+3س^2+س^3)^4 = [(1+س)^3]^4 = (1+س)^{12}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{ن}{2}+1 = \frac{12}{2}+1 = 7$

$\therefore$ معامل $ح_7 = {}^{12}ق_6 = 924$

أوجد عدد الأعداد الأقل من ٣٠٠ والتى يمكن تكوينها من مجموعة الأعداد {١، ٢، ٥، ٦}

الحل

عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ طريقة

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٤ طريقة

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٤ طريقة

$\therefore$ عدد الأعداد الأقل من ٣٠٠ $= 2\times4\times4 = 32$ عدد

أوجد معامل الحد الذى يحتوى على $س^8$ فى مفكوك

$س^3\left(س^2+\frac{3}{س}\right)^{13}$

الحل

$ح_{ر+1} = س^3 \times {}^{13}ق_ر\,(س^2)^{13-ر}\times\left(\frac{3}{س}\right)^ر$

$= {}^{13}ق_ر \times 3^ر \times س^{29-3ر}$

بوضع $29-3ر = 8 \quad \therefore ر = 7$

معامل $ح_8 = {}^{13}ق_7 \times 3^7 = 3752892$

فى مفكوك $(1+س)^ن$ إذا كان معامل $ح_ب$ = معامل $ح_{جـ}$ فإن ب + جـ = ...

الحل (أ) ن (ب) ن + ٢ (ج) ن − ٢ (د) ٢ن

$\because$ معامل $ح_ب$ = معامل $ح_{جـ}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ب-1} = {}^{ن}ق_{جـ-1}$

أما ب − ١ = جـ − ١

$\therefore$ ب = جـ

أو ب − ١ + جـ − ١ = ن

$\therefore$ ب + جـ = ن + ٢

من مجموعة أشخاص تحتوى على ٦ رجال و ٤ سيدات يراد تكوين لجنة مكونة من ٥ أشخاص بحيث تحتوى هذه اللجنة على ٣ رجال على الأقل . أوجد عدد اللجان التى يمكن تكوينها.

الحل

عدد طرق الاختيار

إما ٣ رجال و ٢ سيدة $= {}^{6}ق_3 \times {}^{4}ق_2 = 120$

أو ٤ رجل و ١ سيدة $= {}^{6}ق_4 \times {}^{4}ق_1 = 60$

أو ٥ رجل وصفر سيدة $= {}^{6}ق_5 \times {}^{4}ق_0 = 6$

$\therefore$ عدد طرق اختيار اللجنة

$= {}^{6}ق_3\times{}^{4}ق_2 + {}^{6}ق_4\times{}^{4}ق_1 + {}^{6}ق_5\times{}^{4}ق_0$

$= 120 + 60 + 6 = 186$ طريقة

إذا كان $(س-2)\times {}^{ن}ق_3 = {}^{ن}ل_3$ فإن قيمة س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ٣ن

الحل

$(س-2)\times {}^{ن}ق_3 = {}^{ن}ل_3$

$(س-2)\times \frac{\cancel{{}^{ن}ل_3}}{3!} = \cancel{{}^{ن}ل_3}$

$(س-2) = 3!$

$س-2 = 6 \quad \therefore س = 6+2 = 8$

اذا كان $٦ \times {}^{ن}ق_{٣}$ ، $٤\, {}^{ن}ق_{٤}$ ، $٥\, {}^{ن}ق_{٥}$ هى ثلاث حدود من متتابعه هندسية اوجد قيمة ن

الحل

$\because$ $٦\, {}^{ن}ق_{٣}$ ، $٤\, {}^{ن}ق_{٤}$ ، $٥\, {}^{ن}ق_{٥}$ م.هـ

$$\therefore \frac{٤\, {}^{ن}ق_{٤}}{٦\, {}^{ن}ق_{٣}} = \frac{٥\, {}^{ن}ق_{٥}}{٤\, {}^{ن}ق_{٤}}$$

$$\frac{٤(ن-٤+١)}{٦ \times ٤} = \frac{٥ \times (ن-٥+١)}{٤ \times ٥}$$

$$\frac{ن-٤+١}{٦} = \frac{ن-٥+١}{٤}$$

$$\frac{ن-٣}{٦} = \frac{ن-٤}{٤}$$

$٦ن - ٢٤ = ٤ن - ١٢$

$٢ن = ١٢$ $\therefore$ ن $= ٦$

اذا كان معاملات ثلاثه حدود متتاليه فى مفكوك $(١+س)^{ن}$ هى على الترتيب ٣٥ ، ٢١ ، ٧ حسب قوى س التصاعديه أوجد رتب هذه الحدود ثم اوجد قيمة ن

الحل

بفرض الحدود هى $ح_{ر-١}$ ، $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر}}{\text{معامل } ح_{ر-١}} = \frac{٢١}{٣٥}$$

$$\frac{ن-(ر-١)+١}{ر-١} \times \frac{١}{١} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{ن-ر+٢}{ر-١} = \frac{٣}{٥}$$

$\therefore ٥ن - ٥ر + ١٠ = ٣ر - ٣$

$\therefore ٥ن - ٨ر = -١٣ \longleftarrow (١)$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{٧}{٢١}$$

$$\frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{٣}$$

$٣ن - ٣ر + ٣ = ر$

$٣ن - ٤ر = -٣ \longleftarrow (٢)$

بحل المعادلات (١) ، (٢)

بضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٥ والطرح

$\therefore ١٥ن - ٢٤ر = -٣٩$

$١٥ن - ٢٠ر = -١٥$

بالطرح

$-٤ر = -٢٤$

$\therefore ر = ٦$ بالتعويض فى (١)

$١٥ن - ١٢٠ = -١٥$

$١٥ن = ١٠٥$

$ن = ٧$

$\therefore$ الحدود هى $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$

كيس به ٥ كرات متماثله اوجد عدد طرق سحب كرتين منه مع الإحلال وبدون ترتيب

الحل

عدد الطرق $= {}^{ن+ر-١}ق_{ر}$

$= {}^{٥+٢-١}ق_{٢} = {}^{٦}ق_{٢} = ١٥$

مجموع المعاملات فى مفكوك $(٤س - ٣ص)^{٢٥} =$ ....

● ١ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٢٥

الحل

مجموع المعاملات $= (٤-٣)^{٢٥}$

$= (١)^{٢٥} = ١$

$^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٣} + ٢\ ^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٢} + \ ^{\text{ن}+١}\text{ق}_{١} = \ldots$

(أ) $^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٣}$ (ب) $^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٢}$ (ج) $^{\text{ن}+١}\text{ق}_{١}$ (د) $^{\text{ن}+٣}\text{ق}_{٣}$

الحل

$^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٣} + \ ^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٢} + \ ^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٢} + \ ^{\text{ن}+١}\text{ق}_{١}$

$= \ ^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{٣} + \ ^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{٢}$

$= \ ^{\text{ن}+٣}\text{ق}_{٣}$

اذا كانت النسبه بين الحدود الخامس والسادس والسابع فى مفكوك $\left(\frac{٣\text{س}}{٢} + \frac{٢}{٣\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازليه هى ٤٠ : ٢٤ : ١١ اوجد كل من ن ، س

الحل

$\frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٥}} = \frac{٢٤}{٤٠}$

$\frac{\text{ن}-٥+١}{٥} \times \frac{\frac{٢}{٣\text{س}}}{\frac{٣\text{س}}{٢}} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{\text{ن}-٤}{\cancel{٥}} \times \frac{٤}{٩\text{س}^{٢}} = \frac{٣}{\cancel{٥}}$

$\text{ن} - ٤ = \frac{٢٧}{٤}\text{س}^{٢} \longrightarrow (١)$

$\frac{\text{ح}_{٧}}{\text{ح}_{٦}} = \frac{١١}{٢٤}$

$\frac{\text{ن}-٦+١}{٦} \times \frac{٤}{٩\text{س}^{٢}} = \frac{١١}{٢٤}$

$\text{ن} - ٥ = \frac{١١}{٢٤} \times \frac{٩\text{س}^{٢}}{٤} \times \frac{٦}{١}$

$\text{ن} - ٥ = \frac{٩٩}{١٦}\text{س}^{٢} \longrightarrow (٢)$

من (١) ، (٢) بالقسمة $\frac{\text{ن}-٤}{\text{ن}-٥} = \frac{\frac{٢٧}{٤}\cancel{\text{س}^{٢}}}{\frac{٩٩}{١٦}\cancel{\text{س}^{٢}}}$

$\frac{\text{ن}-٤}{\text{ن}-٥} = \frac{١٢}{١١}$ $\therefore ١٢\text{ن} - ٦٠ = ١١\text{ن} - ٤٤$ $\therefore \text{ن} = ١٦$

بالتعويض فى (١)

$١٦ - ٤ = \frac{٢٧}{٤}\text{س}^{٢}$ $\therefore \text{س}^{٢} = \frac{١٦}{٩}$ $\therefore \text{س} = \pm\frac{٤}{٣}$

فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣\text{ن}}$ اوجد معامل $\text{س}^{٣\text{ن}}$ واذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبه بين معامل $\text{س}^{٣\text{ن}}$ ومعامل الحد الاوسط

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = \ ^{٣\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} \times (\text{س}^{٢})^{٣\text{ن}-\text{ر}}$

$= \ ^{٣\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{٦\text{ن}-٢\text{ر}}$

$= \ ^{٣\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{٦\text{ن}-٣\text{ر}}$

$\therefore ٦\text{ن} - ٣\text{ر} = ٣\text{ن}$

$٣\text{ن} = ٣\text{ر}$

$\therefore \text{ن} = \text{ر}$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{٣\text{ن}} = \ ^{٣\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}$

عندما ن = ٦ $\therefore$ معامل $\text{س}^{٣\text{ن}} = \ ^{١٨}\text{ق}_{٦}$

الحد الاوسط فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٨}$ هو $\text{ح}_{١٠}$

معامل $\text{ح}_{١٠} = \ ^{١٨}\text{ق}_{٩}$

$\therefore \frac{\text{معامل س}^{٣\text{ن}}}{\text{معامل ح الاوسط}} = \frac{^{١٨}\text{ق}_{٦}}{^{١٨}\text{ق}_{٩}} = \frac{٢١}{٥٥}$

اذا كان $ع = 1 - \sqrt{3}\,ت$ اوجد الصورة المثلثيه والصورة الأسيه لما يلى

(١) $ع$ (٢) $\bar{ع}$ (٣) $\frac{1}{ع}$ (٤) $\frac{1}{\bar{ع}}$

(٥) $ع^{2}$ (٦) $ع$

الحل

$س = 1 \quad ، \quad ص = -\sqrt{3}$

$ل = \sqrt{س^{2} + ص^{2}} = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^{2}} = 2$

∵ س موجب ، ص سالب ∴ ربع رابع ∴ $\theta = ظا^{-1}\frac{ص}{س}$

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -60$

(١) $ع = ل\,(حتا\,\theta + ت\,حا\,\theta)$

$ع = 2\,(حتا(-60) + ت\,حا(-60)) = 2\,هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}$

(٢) $\bar{ع} = 1 + \sqrt{3}\,ت$

$ل = 2 \quad ، \quad \theta = ظا^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = 60$

$\bar{ع} = 2\,(حتا 60 + ت\,حا 60) = 2\,هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

حل آخر

∵ $ع = 2\,(حتا -60 + ت\,حا -60)$

$\bar{ع} = 2\,(حتا -60 - ت\,حا -60)$

$= 2\,(حتا 60 + ت\,حا 60)$

(٣) $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل}\,(حتا(-\theta) + ت\,حا(-\theta))$

$= \frac{1}{2}\,(حتا 60 + ت\,حا 60) = \frac{1}{2}\,هـ^{\frac{\pi}{3}ت}$

(٤) $\frac{1}{\bar{ع}} = \frac{1}{ل}\,(حتا(-\theta) + ت\,حا(-\theta))$ بالنسبه لـ $\bar{ع}$

$= \frac{1}{2}\,(حتا(-60) + ت\,حا(-60)) = \frac{1}{2}\,هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}$

(٥) ∴ $ع^{ن} = ل^{ن}\,(حتا\,ن\theta + ت\,حا\,ن\theta)$

∴ $ع^{2} = 2^{2}\,(حتا 2\times -60 + ت\,حا 2\times -60)$

∴ $ع^{2} = 4\,(حتا(-120) + ت\,حا(-120))$

∴ $ع^{2} = 4\,(حتا(-120) - ت\,حا(-120))$

$= 4\,(حتا 120 + ت\,حا 120) = 4\,هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

$\mathcal{M}$

(٦) ∵ $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل}\,(حتا(-\theta) + ت\,حا(-\theta))$

∴ $ع^{-2} = \frac{1}{ع^{2}} = \frac{1}{4}\,(حتا 120 + ت\,حا 120) = \frac{1}{4}\,هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

امتحان مصر دور أول ٢٠١٦م

ضع العدد $ع = \frac{-8}{1 + \sqrt{3}\,ت}$ على الصورة المثلثيه ثم اوجد جذريه التربيعين على الصورة الأسية .

الحل

$ع = \frac{-8}{1 + \sqrt{3}\,ت} \times \frac{1 - \sqrt{3}\,ت}{1 - \sqrt{3}\,ت} = \frac{-8 + 8\sqrt{3}\,ت}{1 + 3} = \frac{-8 + 8\sqrt{3}\,ت}{4}$

$ع = -2 + 2\sqrt{3}\,ت$

$ل = \sqrt{(-2)^{2} + (2\sqrt{3})^{2}} = 4$

∵ س < صفر ، ص > صفر ∴ θ ∋ تقع فى الربع الثانى

$\theta = \pi + ظا^{-1}\frac{ص}{س} = \pi + ظا^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi + ظا^{-1}(-\sqrt{3})$

$\theta = \pi + (-60) = 120 = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$

∴ $ع = 4\,(حتا \frac{2}{3}\pi + ت\,حا \frac{2}{3}\pi)$

$\sqrt{ع} = 2\,(حتا \frac{2}{3}\pi + ت\,حا \frac{2}{3}\pi)^{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(حتا \frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi ر}{2} + ت\,حا \frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi ر}{2}\right)$

$\sqrt{ع} = 2\,هـ^{\frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi ر}{2}ت}$

عند $ر = 0$ $\quad \sqrt{ع} = 2\,هـ^{\frac{1}{3}\pi ت}$

عند $ر = 1$ $\quad \sqrt{ع} = 2\,هـ^{\frac{4}{3}\pi ت} = 2\,هـ^{-\frac{2}{3}\pi ت}$

$\mathcal{M}$

المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث أ عدد مركب يكون لها ن عدد من الجذور على الصورة $س = أ^{\frac{1}{ن}}$ وتمثل الجذور فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة طول نصف قطرها $|أ|^{\frac{1}{ن}}$ وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له $= \frac{360}{ن}$

مثل على شكل أرجاند الجذور الخماسيه للعدد -32

الحل

الجذور الخماسيه للعدد -32 هى حلول المعادلة $ع^{5} = -32$

وبتحويل العدد -32 إلى الصورة المثلثية

$ع^{5} = 32 \times -1 = 32(-1 + ت \times 0)$

$ع^{5} = 32(\text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi)$

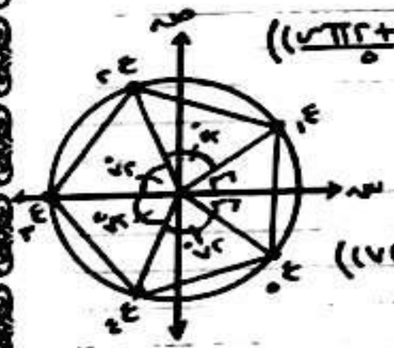
$ع = (32)^{\frac{1}{5}}(\text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi)^{\frac{1}{5}}$

$ع = 2\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi + 2\pi ر}{5}\right) + ت\,\text{جا}\left(\frac{\pi + 2\pi ر}{5}\right)\right)$

نوجد الجذر الأول بوضع $ر = 0$

$ع_1 = 2(\text{جتا}\,36 + ت\,\text{جا}\,36)$

وتكون قياس الزاويه بين كل جذر والذى يليه هى $\frac{360}{5} = 72$



$ع_2 = 2(\text{جتا}(36 + 72) + ت\,\text{جا}(36 + 72))$

$= 2(\text{جتا}\,108 + ت\,\text{جا}\,108)$

$ع_3 = 2(\text{جتا}(108 + 72) + ت\,\text{جا}(108 + 72))$

$= 2(\text{جتا}\,180 + ت\,\text{جا}\,180)$

$ع_3 = 2(\text{جتا}(180 + 72) + ت\,\text{جا}(180 + 72))$

$ع_3 = 2(\text{جتا}\,180 + ت\,\text{جا}\,180)$

$ع_4 = 2(\text{جتا}\,180 + 72 + ت\,\text{جا}(180 + 72))$

$= 2(\text{جتا}\,252 + ت\,\text{جا}\,252)$

$= 2(\text{جتا}(252 - 360) + ت\,\text{جا}(252 - 360))$

$= 2(\text{جتا}(-108) + ت\,\text{جا}(-108))$

$ع_5 = 2(\text{جتا}(252 + 72) + ت\,\text{جا}(252 + 72))$

$= 2(\text{جتا}\,324 + ت\,\text{جا}\,324)$

$= 2(\text{جتا}(324 - 360) + ت\,\text{جا}(324 - 360))$

$= 2(\text{جتا}(-36) + ت\,\text{جا}(-36))$

أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة

$س^{2} + (1 + ت)س + (-6 + 2ت) = 0$

حاول أن تحل صـ ٥٩ كتاب المدرسة

الحل

بتطبيق القانون العام

$أ = 1$ ، $ب = (1 + ت)$ ، $جـ = -6 + 3ت$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - 4أجـ}}{2أ}$

$س = \frac{-(1 + ت) \pm \sqrt{(1 + ت)^{2} - 4 \times 1 \times (-6 + 3ت)}}{2 \times 1}$

$س = \frac{-(1 + ت) \pm \sqrt{(1 + 2ت - 1) + 24 - 12ت}}{2}$

$س = \frac{-(1 + ت) \pm \sqrt{24 - 10ت}}{2} \longrightarrow (*)$

بفرض $س + ص\,ت = \sqrt{24 - 10ت}$ بالتربيع

$س^{2} - ص^{2} + 2س\,ص\,ت = 24 - 10ت$

$س^{2} - ص^{2} = 24 \longrightarrow (1)$

$2س\,ص = -10 \quad \therefore س = \frac{-5}{ص} \longrightarrow (2)$

بالتعويض من (2) فى (1)

$\left(\frac{-5}{ص}\right)^{2} - ص^{2} = 24$

$\frac{25}{ص^{2}} - ص^{2} = 24$ بالضرب × $ص^{2}$

$25 - ص^{4} = 24ص^{2}$

$ص^{4} + 24ص^{2} - 25 = 0$

$(\text{ص}^2 + 25)(\text{ص}^2 - 1) = 0$

$\text{ص}^2 = -25$ مرفوض ، $\text{ص}^2 = 1$

$\text{ص} = \pm 1$

بالتعويض فى (٢)

$\text{س} = \pm 5$

$\therefore \sqrt{24 - 10\text{ت}} = \pm(5 - \text{ت})$ بالتعويض فى ٤

$\text{س} = \dfrac{-1 - \text{ت} \pm (5 - \text{ت})}{2}$

$\text{س} = \dfrac{-1 - \text{ت} + 5 - \text{ت}}{2} = \dfrac{4 - 2\text{ت}}{2} = 2 - \text{ت}$

أو $\text{س} = \dfrac{-1 - \text{ت} - 5 + \text{ت}}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

متنساش

$1 = \text{حتا}\,0 + \text{ت}\,\text{حا}\,0$

$\text{ت} = \text{حتا}\,\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\pi}{2}$

$-1 = \text{حتا}\,\pi + \text{ت}\,\text{حا}\,\pi$

$-\text{ت} = \text{حتا}\,\frac{-\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{-\pi}{2}$

تمرين

(١) أوجد مجموعه حل المعادلة $\text{س}^3 = -8\text{ت}$ حيث $\text{س} \in \text{ك}$

(٢) اكتب بالصورة الجبرية $\text{ع} = 3\,\text{هـ}^{-\frac{\pi}{2}\text{ت}}$

(٣) اذا كان $\text{ع}_1 = 3(\text{حتا}\,70 + \text{ت}\,\text{حا}\,70)$ ، $\text{ع}_2 = 6(\text{حتا}\,40 + \text{ت}\,\text{حتا}$
أوجد على الصورة الأسيه $\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$

اذا كان $\text{ع} = \text{هـ}^{\theta\text{ت}}$ فاوجد المقياس والسعة للعدد $\dfrac{1+\text{ع}}{1-\text{ع}}$

الحل

$\because \text{ع} = \text{هـ}^{\theta\text{ت}} \quad \therefore \text{ع} = \text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta$

$\therefore \dfrac{1+\text{ع}}{1-\text{ع}} = \dfrac{1 + \text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta}{1 - \text{حتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{حا}\,\theta}$

$= \dfrac{1 + 2\text{حتا}^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2\text{ت}\,\text{حا}\frac{\theta}{2}\,\text{حتا}\frac{\theta}{2}}{1 - 1 + 2\text{حا}^2\frac{\theta}{2} - 2\text{ت}\,\text{حا}\frac{\theta}{2}\,\text{حتا}\frac{\theta}{2}}$

$= \dfrac{2\text{حتا}^2\frac{\theta}{2} + 2\text{ت}\,\text{حا}\frac{\theta}{2}\,\text{حتا}\frac{\theta}{2}}{2\text{حا}^2\frac{\theta}{2} - 2\text{ت}\,\text{حا}\frac{\theta}{2}\,\text{حتا}\frac{\theta}{2}}$

$= \dfrac{2\text{حتا}\frac{\theta}{2}\left(\text{حتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\frac{\theta}{2}\right)}{2\text{حا}\frac{\theta}{2}\left(\text{حا}\frac{\theta}{2} - \text{ت}\,\text{حتا}\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \dfrac{2\text{حتا}\frac{\theta}{2}\left(\text{حتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\frac{\theta}{2}\right)}{2\text{حا}\frac{\theta}{2}\left(\text{حتا}(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) + \text{ت}\,\text{حا}(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})\right)}$

$= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}\left[\text{حتا}(\cancel{\tfrac{\theta}{2}} + \tfrac{\pi}{2} - \cancel{\tfrac{\theta}{2}}) + \text{ت}\,\text{حا}(\cancel{\tfrac{\theta}{2}} + \tfrac{\pi}{2} - \cancel{\tfrac{\theta}{2}})\right]$

$= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}\left(\text{حتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ المقياس $= \text{ظتا}\frac{\theta}{2}$ والسعه $= \frac{\pi}{2}$

امتحان مصر دور أول ٢٠١٦م

أوجد قيمة $\left(\dfrac{\omega}{1+2\omega}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega^2}{1+2\omega}\right)^2$

الحل

$= \dfrac{\omega^2}{1 + 4\omega^2 + 4\omega} + \dfrac{\omega^4}{1 + 4\omega^2 + 4\omega}$

$= \dfrac{\omega^2 + \omega^4}{1 + 4\omega + \omega^2} = \dfrac{\omega^2 + \omega}{1 + 4(\omega + \omega^2)} = \dfrac{-1}{1 + 4 \times -1} = \dfrac{1}{3}$

امتحان مصر دور ثان ٢٠١٦م

اثبت ان $\left(\dfrac{\omega}{1-\omega} - \omega^2\right)^2 = \dfrac{-4}{3}$

الحل

$= \left(\dfrac{\omega - \omega^2 + \omega^3}{1-\omega}\right)^2 = \left(\dfrac{\omega - \omega^2 + 1}{1-\omega}\right)^2 = \left(\dfrac{\omega + 1 - \omega^2}{1-\omega}\right)^2$

$= \left(\dfrac{-\omega^2 - \omega^2}{1-\omega}\right)^2 = \left(\dfrac{-2\omega^2}{1-\omega}\right)^2 = \dfrac{4\omega^4}{1 + \omega^2 - 2\omega}$

$= \dfrac{4 \times \omega}{-\omega - 2\omega} = \dfrac{4\cancel{\omega}}{-3\cancel{\omega}} = \dfrac{-4}{3}$

تمرين دور ثان ٢٠١٥

اثبت أن $(أ + ب\omega + أ\omega^2)(أ + ب\omega^2 + أ\omega) = (ب - أ)^2$

رقم (١١) الأختبار التراكمى ص٦٣ كتاب المدرسة

اذا كان $\text{ع} = \frac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ وكان $\text{ع}_1 = \frac{1+\text{ع}}{1-\text{ع}}$

أوجد العدد ع_1 وجذريه التربيعين فى الصورة المثلثيه

الحل

$$\text{ع} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت} = \omega$$

$$\therefore \text{ع}_1 = \frac{1+\omega}{1-\omega} \times \frac{1-\omega}{1-\omega} = \frac{1-\omega^2}{1-2\omega+\omega^2} = \frac{1-\omega^2}{-3\omega}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{-\omega} - \frac{\omega^2}{-\omega}\right) = \frac{1}{3}(-\omega^2+\omega) = \frac{1}{3}(\omega-\omega^2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \pm\sqrt{3}\,\text{ت} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ت}$$

$$\text{ع}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\text{ع}_1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\text{جتا}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\text{ر}}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\text{ر}}{2}\right)\right)$$

عندما ر = ٠ فإن $\sqrt{\text{ع}_1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{\pi}{4}\right)$

ر = −١ فإن $\sqrt{\text{ع}_1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\text{جتا}\frac{-3\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{-3\pi}{4}\right)$

حل أخر

$$\text{ع}_1 = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}} \times \frac{2}{2}$$

$$\text{ع}_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{3-\sqrt{3}\,\text{ت}} \times \frac{3+\sqrt{3}\,\text{ت}}{3+\sqrt{3}\,\text{ت}} = \frac{\cancel{3}+\sqrt{3}\,\text{ت}+3\sqrt{3}\,\text{ت}\cancel{-3}}{9+3}$$

$$\text{ع}_1 = \frac{4\sqrt{3}\,\text{ت}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ت} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ت} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\text{ع}_1} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\text{جتا}\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\text{ر}}{2} + \text{جا}\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\text{ر}}{2}\right)$$

عند ر = ٠ $\sqrt{\text{ع}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{\pi}{4}\right)$

عند ر = −١ $\sqrt{\text{ع}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(\text{جتا}\frac{-3\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{-3\pi}{4}\right)$

$\mathcal{M}$

الامتحان التجريبى

بدون فك المحدد اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 0 \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix} = 0$$

الحل

بتدوير للمحدد الأول

$$\text{الطرف الايمن} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 0 \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix} = 0$$

= صفر حيث ان $\text{ع}_2 = \text{ع}_3$

الإمتحان التجريبى

ابحث إمكانيه حل المعادلات الأتيه واوجد الحل ان وجد

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

الحل

بفرض $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|\text{أ}| = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0+2) - 1(0-2) + 1(-2-3) = -1 \neq 0$$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = 3$

$$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{ر}(\text{أ}^*) = 3$$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) =$ عدد المجاهيل $= 3$

والمعادلات غير متجانسه $\therefore$ للمعادلات حل وحيد

نوجد مصفوفه العوامل المرافقه $\bar{\text{أ}}$

$\mathcal{M}$

$$\bar{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \bar{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -٥ \\ -١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{أ}^{\text{حل}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ -٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{حل}} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ٢ & -١ & ٠ \\ -٥ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ٠ \\ ٥ & -٢ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \text{أ}^{-١} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ٠ \\ ٥ & -٢ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ + ٠ + ٣ \\ -٢ + ٠ + ٠ \\ ٥ + ٠ - ٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \\ ٢ \end{pmatrix}$$ ∴ س = ١ ، ص = −٢ ، ع = ٢

حل المعادلات التالية ٣س − ٢ص + ٣ع = ٠ ،

س + ص = ٠ ، ص − ع = ٠

الحل

المعادلات متجانسه لأن الحدود المطلقه = صفر

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -١ \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(-١ - ٠) - ١(٢ - ٣) + ٠(٠ - ٣) = -٢$$

∵ |أ| = −٢ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ النظام له حل وحيد وهو الحل الصفرى

أى أن س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠

م.ح = {(٠، ٠، ٠)}

بين أن لنظام المعادلات س + ٢ص + ٣ع = ٠ ،

٢س + ٣ص + ٥ع = ٠ ، ٣س − ص + ٢ع = ٠ عدد لانهائى

من الحلول واكتب صورة الحل

الحل

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix} \qquad ١ \leq \text{ر(أ)} \leq ٣$$

|أ| = ١(٦ + ٥) − ٢(٤ − ١٥) + ٣(−٢ − ٩) = صفر

∴ ر(أ) < ٣

$$\because \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٤ = -١ \neq ٠ \qquad \therefore \text{ر(أ)} = ٢$$

∵ ر(أ) = ٢ أى لاتساوى عدد المجاهيل

∴ للمعادلات عدد لانهائى من الحلول

لايجاد صورة الحل نضع $\boxed{\text{س} = \text{ل}}$ فى المعادله الأولى

∴ ل + ٢ص + ٣ع = ٠ ← ٢ص + ٣ع = −ل ← (١)

بوضع س = ل فى المعادله الثالثه

٣ل − ص + ٢ع = ٠ ← −ص + ٢ع = −ل بالضرب × ٢

−٢ص + ٤ع = −٢ل ← (٢)

بحل (١) ، (٢) بالجمع

٧ع = −٧ل

∴ $\boxed{\text{ع} = -\text{ل}}$

بالتعويض فى (١)

٢ص − ٣ل = −ل

٢ص = ٢ل

$\boxed{\text{ص} = \text{ل}}$

∴ المعادلات لها عدد لانهائى من الحلول على الصورة

م.ح = {(ل، ل، −ل)}

اذا كان (س − ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} س-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & س+1 \\ -1 & 1 & س+ك \end{vmatrix}$

فأوجد قيمه ك

الحل

∵ س − ١ أحد عوامل المحدد

∴ عندما س = ١ فان | | = صفر

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1+ك \end{vmatrix} = 0$

$= 0\,(1+ك-2) - 1\,(1+ك+2) + 1\,(1+1) = 0$

$-3 - ك + 2 = 0$

$-ك - 1 = 0 \quad \therefore ك = -1$

ابحث امكانيه حل نظام المعادلات التاليه س − ص + ع = ٢ ، ٢س + ٣ص − ع = ٥ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = −١ واكتب الحل أو صورته ان وجد

الحل

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ بفرض أ = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \because |أ| = -11 \neq 0$

∴ ر(أ) = ر($أ^*$) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ للمعادلة حل وحيد

$\bar{أ} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -19 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore \overset{مل}{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -19 \\ -7 & -1 & 2 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$أ^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ -19 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \\ -19 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -11 \\ -22 \\ -33 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

بدون فك المحدد اثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & ب & جـ+أ \\ 1 & جـ & أ+ب \\ 1 & أ & ب+جـ \end{vmatrix} = 0$

الحل

باضافه ع٢ إلى ع٣

$\begin{vmatrix} 1 & ب & جـ+أ+ب \\ 1 & جـ & أ+ب+جـ \\ 1 & أ & ب+جـ+أ \end{vmatrix}$

باخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من ع٣

$= (أ+ب+جـ)\begin{vmatrix} 1 & ب & 1 \\ 1 & جـ & 1 \\ 1 & أ & 1 \end{vmatrix}$ ∵ ع١ = ع٣

$= (أ+ب+جـ) \times$ صفر = صفر

دور أول ٢٠١٦

بدون فك المحدد اثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ أ & ب & جـ \\ أ^2 & ب^2 & جـ^2 \end{vmatrix} = (أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)$

الحل

باضافه − ع١ إلى ع٢ ، واضافه − ع١ إلى ع٣

الايمن $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & ب-أ & جـ-أ \\ أ^2 & ب^2-أ^2 & جـ^2-أ^2 \end{vmatrix}$ بأخذ (ب − أ) ، (جـ − أ) عامل مشترك من ع٢ ، ع٣

$= (ب-أ)(جـ-أ)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ أ & 1 & 1 \\ أ^2 & ب+أ & جـ+أ \end{vmatrix}$

بإضافة $-\text{ع}_2$ إلى ع_3

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{أ} & ١ & ٠ \\ \text{أ}^2 & \text{ب}+\text{أ} & \text{جـ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{ب})$$

$$= (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ})(\text{جـ} - \text{أ})$$

دور ثان ٢٠١٦

بدون فك أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{أ}^3 & \text{ب}^3 & \text{أ}^2+\text{أب}+\text{ب}^2 \end{vmatrix} = ٠$$

الحل

بأخذ أ عامل مشترك من ع_1 ، ب عامل مشترك من ع_2

$$= \text{أب} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2+\text{أب}+\text{ب}^2 \end{vmatrix}$$

بطرح ع_2 من ع_1 ، ع_2 من ع_3

$$= \text{أب} \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ \text{أ}-\text{ب} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}^2-\text{ب}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2+\text{أب} \end{vmatrix}$$

بأخذ أ − ب عامل مشترك من ع_1 ، أ عامل مشترك من ع_3

$$= \text{أب} \times \text{أ} \times (\text{أ}-\text{ب}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & \text{ب} & ١ \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{ب}^2 & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$$

= صفر لأن $\text{ع}_1 = \text{ع}_3$

إذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + ٤\text{س} - ٦\text{ص} + ٨\text{ع} + ٤ = ٠$ هي معادلة كرة فإن طول قطرها = ...

الحل

م = ($-\frac{1}{2}$ معامل س / $-\frac{1}{2}$ معامل ص ، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

م = (−٢ ، ٣ ، −٤)

$$\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ن}^2 - \text{د}} = \sqrt{(-٢)^2 + (٣)^2 + (-٤)^2 - ٤} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

∴ طول قطر الدائرة = ١٠ وحدة طول

إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢ ، -٦ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٦ ، -١)$ فإن θ = ...

الحل

$$\text{حتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{(-٢ ، -٦ ، ١) \cdot (٢ ، ٦ ، -١)}{\sqrt{٤+٣٦+١} \times \sqrt{٤+٣٦+١}}$$

$$\text{حتا}\,\theta = \frac{-٤ - ٣٦ - ١}{\sqrt{٤١} \times \sqrt{٤١}} = \frac{-٤١}{٤١} = -١ \quad \therefore \theta = ١٨٠^\circ$$

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -٦\overrightarrow{\text{س}} - ٤\overrightarrow{\text{ص}} + ٤\overrightarrow{\text{ع}}$ وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن ك = ...

الحل

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$

$(٢ ، ٣ ، \text{ك}) \cdot (-٦ ، -٤ ، ٤) = ٠$

$-١٢ - ١٢ + ٤\text{ك} = ٠$

$-٢٤ + ٤\text{ك} = ٠ \quad \therefore ٤\text{ك} = ٢٤ \quad \therefore \text{ك} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، ٠ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = ...$

الحل

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}}(٠ \times ٣ - ٤ \times -٢) - \overrightarrow{\text{ص}}(٣ \times ٣ - ٤ \times ١) + \overrightarrow{\text{ع}}(٣ \times -٢ - ٠ \times ١)$$

$$= ٨\overrightarrow{\text{س}} - ٥\overrightarrow{\text{ص}} - ٦\overrightarrow{\text{ع}}$$

معادلة الكرة التى مركزها (٢، -٣، ١) وطول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ هى ....

الحل

$(س-ل)^2 + (ص-ك)^2 + (ع-ن)^2 = نق^2$

$(س-٢)^2 + (ص+٣)^2 + (ع-١)^2 = ٢٠$

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٢، ٤، ٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠، ك، ٣)$ حيث ك ∈ ص وكان $\|\overrightarrow{أب}\| = ٧$ فإن قيمة ك = ...

الحل

∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٢، ك-٤، -٣)$

∵ $\|\overrightarrow{أب}\| = ٧$

∴ $\sqrt{٤ + (ك-٤)^2 + ٩} = ٧$

$٤ + (ك-٤)^2 + ٩ = ٤٩$

$(ك-٤)^2 = ٣٦$

$ك - ٤ = \pm ٦$

$ك - ٤ = ٦$ أو $ك - ٤ = -٦$

$ك = ١٠$ ، $ك = -٢$ مرفوض لأن ك ∈ ص

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (-١، ٤، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢، ٢، ١)$ فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

الحل

مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب} = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(-١، ٤، ٢) \cdot (٢، ٢، ١)}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = \frac{-٢ + ٨ + ٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$

إذا كان $س^2 + ص^2 + ع^2 - ٤ك س + ٤ص - ٨ع + ٢ك = ٠$. معادلة كرة طول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ فإن قيمة ك = ...

الحل

مركز الكرة = (٢ك، -٢، ٤) / نق = $٢\sqrt{٥}$ ، د = ٢ك

$نق^2 = ٢٠$

$٤ك^2 + ٤ + ١٦ - ٢ك = ٢٠$

$٤ك^2 - ٢ك = ٠$

$٢ك(ك-١) = ٠$

$ك = ٠$ أو $٢ك - ١ = ٠$

∴ $ك = \frac{١}{٢}$

اذا كان $(س-٢)^2 + (ص+٤)^2 + (ع-٢)^2 = ١$ ، $(س+٤)^2 + (ص-٤)^2 + (ع-٢)^2 = ٤$ معادلتا كرتين أوجد البعد بين مركزى الكرتين وبين أن الكرتين غير متقاطعتين

الحل

مركز الكرة الأولى $م_١ = (٢، -٤، ٢)$ ، $نق_١ = ١$

مركز الكرة الثانيه $م_٢ = (-٤، ٤، ٢)$ ، $نق_٢ = ٢$

$م_١م_٢ = \sqrt{(٢+٤)^2 + (-٤-٤)^2 + (٢-٢)^2} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

$نق_١ + نق_٢ = ٣$

∵ $م_١م_٢ > نق_١ + نق_٢$ ∴ الكرتان متباعدتان

∴ الكرتان غير متقاطعتين

اذا كان أ(-٤، -٢، ٣) ، ب(١، ٢، ك) وكان طول $\overline{أب} = \sqrt{٧٧}$ فإن إحدى قيم ك هى ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٢٠

الحل

$أب = \sqrt{٧٧}$

$\sqrt{(-٤-١)^2 + (-٢-٢)^2 + (٣-ك)^2} = \sqrt{٧٧}$

$٢٥ + ١٦ + (٣-ك)^2 = ٧٧$

$٤١ + (٣-ك)^2 = ٧٧$

$(٣-ك)^2 = ٣٦$

$٣ - ك = \pm ٦$

$٣ - ك = ٦$ أو $٣ - ك = -٦$

$ك = -٣$ ، $ك = ٩$

جيوب تمام الإتجاه للمتجه (٢، -٤، ٤) هى ...

الحل

∵ $\|(٢، -٤، ٤)\| = \sqrt{٤ + ١٦ + ١٦} = ٦$

∴ جيوب تمام الاتجاه = $\left(\frac{٢}{٦} ، \frac{-٤}{٦} ، \frac{٤}{٦}\right)$

$= \left(\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٧ ، ٣ ، ١٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٤ ، -١ ، -٢)$
أوجد متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أب}$

الحل

$\overrightarrow{أب} = (-٤ ، -١ ، -٢) - (-٧ ، ٣ ، ١٠) = (٣ ، -٤ ، -١٢)$

$\therefore \|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = ١٣$

متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب} = \dfrac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$

$= \dfrac{(٣ ، -٤ ، -١٢)}{١٣} = \left(\dfrac{٣}{١٣} ، \dfrac{-٤}{١٣} ، \dfrac{-١٢}{١٣}\right)$

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، -٢ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٠ ، ٢ ، ٤)$ فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \dots$

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ١٦

الحل

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$= ١(-٨ + ٠) + ١(١٢ + ٠) + ٢(٦ + ٠) = ١٦$

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها $(٣ ، ٤ ، -٥)$ وتمس المستوى ص ع

الحل

$\because$ الكرة تمس المستوى ص ع $\therefore$ نق $= |٣| = ٣$ وحدة طول

$\therefore$ معادلة الكرة هى

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع + ٥)^٢ = ٩$

اذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٠ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، -١ ، -٢)$ اوجد
$(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$

الحل

$(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}) = (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot (-(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})) = -(\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|)^٢$

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٢\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$$

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٤ + ٣٦ + ١} = \sqrt{٤١}$

$(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}) = -(\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|)^٢ = -(\sqrt{٤١})^٢ = -٤١$

اذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ج} = ٠$. فإن $\overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ج} = \dots$

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) $\overrightarrow{أ}$ (د) $\|\overrightarrow{ب}\|$

الحل

$\because \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

$\therefore \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ ← (١)

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ج} = ٠$

$\therefore \overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ج}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) $\overrightarrow{ب} \perp \overrightarrow{ج}$

$\therefore \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ج} = ٠$

اذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع الاتجاهات الموجبه لمحاور الاحداثيات س / ص ، ع زوايا قياساتها $٦٠°$ ، $٨٠°$ ، θ حيث θ زاويه حاده

(أ) اوجد قيمة θ

(ب) اكتب الصورة الجبريه للمتجه أ إذا علمت أن $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٣$

الحل

(أ) $\because$ حتا$^٢\theta$ + حتا$^٢ ٦٠$ + حتا$^٢ ٨٠ = ١$

$\therefore$ حتا$^٢\theta$ = ١ − حتا$^٢ ٦٠$ − حتا$^٢ ٨٠$

حتا$^٢\theta$ = ٠,٧١٩٨٤

$\therefore$ حتاθ = ٠,٨٤٨٤ $\therefore$ θ الحادة = $٣١° ٥٧'$

(ب) $\overrightarrow{أ} = ١٣$ (حتا٦٠ ، حتا٨٠ ، حتا$٣١° ٥٧'$)

$أ_{س}$ = ١٣ حتا٦٠ $\overrightarrow{س}$ = ٦,٥ $\overrightarrow{س}$

$أ_{ص}$ = ١٣ حتا٨٠ $\overrightarrow{ص}$ = ٢,٢٦ $\overrightarrow{ص}$

$أ_{ع}$ = ١٣ حتا $٣١° ٥٧'$ $\overrightarrow{ع}$ = ١١,٠٣ $\overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{أ} = (٦,٥ \overrightarrow{س} ، ٢,٢٦ \overrightarrow{ص} ، ١١,٠٣ \overrightarrow{ع})$

اذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فى $ح^٣$. تحت أى شروط يكون حاصل الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ يمثل متجه وحدة فى $ح^٣$ فسر اجابتك

الحل

$\because \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \times \|\overrightarrow{ب}\|$ حا $\theta) \overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (١ \times ١$ حا $\theta) \overrightarrow{ى}$

يكون $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = ١$ عندما حا $\theta = ١$ أى عندما $\theta = ٩٠$

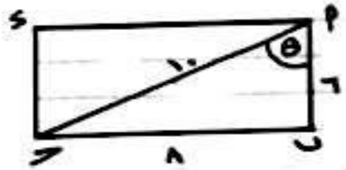
$\therefore$ الشرط هو أن يكون $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

اب حـ ء مستطيل فيه اب = ٦سم ، ب حـ = ٨سم اوجد

(أ) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ}$ (ب) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـء}$

(حـ) مركبة $\overrightarrow{حـء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{بحـ}$

الحل



(أ) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ}$

$= \|\overrightarrow{أب}\| \, \|\overrightarrow{أحـ}\|$ حتا θ

$= ٦ \times ٨ \times \frac{٦}{١٠} = ٣٦$

(ب) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـء} = \|\overrightarrow{أب}\| \, \|\overrightarrow{حـء}\|$ حتا ١٨٠

$= ٦ \times ٦ \times -١ = -٣٦$

(حـ) مركبة $\overrightarrow{حـء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{بحـ}$ $= \dfrac{\overrightarrow{حـء} \cdot \overrightarrow{بحـ}}{\|\overrightarrow{بحـ}\|}$

$= \dfrac{٦ \times ٨ \times \text{حتا } ٩٠}{٨} =$ صفر

برهن أن $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^٢ + |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|^٢ = \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$

حيث $\overrightarrow{أ} ، \overrightarrow{ب} \in ح^٣$

الحل

$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ حا θ $\overrightarrow{ى}$

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^٢ = \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$ حا$^٢\theta$ ← (١)

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ حتا θ

$|\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|^٢ = \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$ حتا$^٢\theta$ ← (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع

∴ $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^٢ + |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}|^٢ = \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$ حا$^٢\theta$ $+ \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$ حتا$^٢\theta$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$ (حا$^٢\theta$ + حتا$^٢\theta$)

$= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢ \times ١$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \, \|\overrightarrow{ب}\|^٢$

اذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ اثبت أن إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ ∴ اما $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ أو أحدهما $= \overrightarrow{و}$ ← (١)

∵ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ∴ اما $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ أو أحدهما $= \overrightarrow{و}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) اما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(٢ ، -١ ، ٤) ، ب (-١ ، ٠ ، ٢)

الحل

$\overrightarrow{ى} = \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٣ ، ١ ، -٢)$

∴ معادله المستقيم هى $\dfrac{س - س_١}{أ} = \dfrac{ص - ص_١}{ب} = \dfrac{ع - ع_١}{حـ}$

∴ $\dfrac{س - ٢}{-٣} = \dfrac{ص + ١}{١} = \dfrac{ع - ٤}{-٢}$

اوجد الصور المختلفه لمعادلة المستقيم $\dfrac{س + ٣}{٢} = \dfrac{٢ص - ١}{٥} = \dfrac{٣ع + ٢}{٤}$

الحل

نفرض أن $\dfrac{س + ٣}{٢} = \dfrac{٢ص - ١}{٥} = \dfrac{٣ع + ٢}{٤} = ك$

∴ $س + ٣ = ٢ك$ ∴ $س = -٣ + ٢ك$

$٢ص - ١ = ٥ك$ ∴ $ص = \frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}ك$ البارامتريه

$٣ع + ٢ = ٤ك$ ∴ $ع = \frac{-٢}{٣} + \frac{٤}{٣}ك$

المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (-٣ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{٢}{٣}) + ك(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣})$

الصورة الاحداثيه $\dfrac{س + ٣}{٢} = \dfrac{ص - \frac{١}{٢}}{\frac{٥}{٢}} = \dfrac{ع + \frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٣}}$

اذا كان $ل_١ : \dfrac{س - ٣}{٢} = \dfrac{-ص - ١}{٦} = \dfrac{ع}{ك}$ يوازى

$ل_٢ : \dfrac{س + ٢}{٦} = \dfrac{ص - ٤}{م} = \dfrac{ع - ١}{٣}$ فإن ك + م = ...

الحل

$\overrightarrow{ى_١} = (٢ ، -٦ ، ك)$ $\overrightarrow{ى_٢} = (٦ ، م ، ٣)$

∵ $ل_١ \parallel ل_٢$

∴ $\dfrac{٢}{٦} = \dfrac{-٦}{م} = \dfrac{ك}{٣}$

∴ $٢م = -٣٦$ ∴ $م = -١٨$

، $٦ك = ٦$ ∴ $ك = ١$

∴ $م + ك = -١٨ + ١ = -١٧$

اذا كان المستوى ٣س − ص + ٢ع + ٣ = ٠ ، المستوى ك س − ٤ ص + ع − ٥ = ٠ متعامدان أوجد قيمه ك

الحل

$\overrightarrow{ن_1}$ = (٣، −١، ٢) ، $\overrightarrow{ن_2}$ (ك، −٤، ١)

∵ المستويان متعامدان

∴ $\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2}$ = ٠

(٣، −١، ٢) • (ك، −٤، ١) = ٠

٣ك + ٤ + ٢ = ٠

٣ك = −٦ ∴ ك = −٢

أوجد طول العمود المرسوم من النقطه أ(٢، ٠، −٥) على المستوى ٢س + $\sqrt{٥}$ص + ٤ع − ٦ = ٠

الحل

$$\text{طول العمود} = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + ح ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + ح^2}}$$

$$= \frac{|٢ \times ٢ + \sqrt{٥} \times ٠ + ٤ \times −٥ − ٦|}{\sqrt{٤ + ٥ + ١٦}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

أوجد قياس الزاويه بين المستقيمين

س − ١ = $\frac{ص + ٢}{\sqrt{٢}}$ = −ع + ١ ، −س = ع + ٣ ، ص = ٤

الحل

معادله المستقيم الاول $\frac{س − ١}{١} = \frac{ص + ٢}{\sqrt{٢}} = \frac{ع − ١}{−١}$

∴ متجه إتجاهه $ى_1$ = (١، $\sqrt{٢}$، −١)

معادله المستقيم الثانى $\frac{س}{−١} = \frac{ع + ٣}{١}$ ، ص = ٤

∴ متجه اتجاهه $ى_2$ = (−١، ٠، ١)

$$حتا \theta = \frac{|(١، \sqrt{٢}، −١) \cdot (−١، ٠، ١)|}{\sqrt{١ + ٢ + ١}\ \sqrt{١ + ٠ + ١}} = \frac{|−١ + ٠ − ١|}{٢\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

∴ θ = ٤٥°

اذا كان قياس الزاويه التى يصنعها $\overrightarrow{أ}$ (٢، ٤، ك) مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى ٤٥° اوجد ك

الحل

متجه الاتجاه لمحور الصادات (٠، ١، ٠)

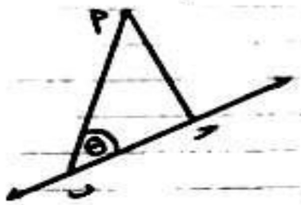
$$حتا \theta = \frac{(٢، ٤، ك) \cdot (٠، ١، ٠)}{\sqrt{٤ + ١٦ + ك^2}\ \sqrt{٠ + ١ + ٠}}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٤}{\sqrt{٢٠ + ك^2}} \quad ∴ \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^2 = \left(\frac{٤}{\sqrt{٢٠ + ك^2}}\right)^2$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١٦}{٢٠ + ك^2}$$

٢٠ + ك² = ٣٢ ∴ ك² = ١٢ ∴ ك = ± ٢$\sqrt{٣}$

أوجد طول العمود المرسوم من النقطه (−٤، ١، ١) على المستقيم $\frac{س + ٣}{١} = \frac{ص − ١}{\sqrt{٥}} = \frac{ع + ٢}{٢}$



الحل

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ (١، $\sqrt{٥}$، ٢)

النقطه ب (−٣، ١، −٢) ∈ للمستقيم

بفرض ح مسقط أ على المستقيم

، θ قياس الزاويه بين $\overrightarrow{ب أ}$ والمستقيم

$\overrightarrow{ب أ}$ = (−٤، ١، ١) − (−٣، ١، −٢)

$\overrightarrow{ب أ}$ = (−١، ٠، ٣)

$$حتا \theta = \frac{|\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{هـ}|}{\|\overrightarrow{ب أ}\|\ \|\overrightarrow{هـ}\|} = \frac{(−١، ٠، ٣) \cdot (١، \sqrt{٥}، ٢)}{\sqrt{١ + ٠ + ٩}\ \sqrt{١ + ٥ + ٤}} = \frac{١}{٢}$$

∴ حا θ = حا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\|\overrightarrow{أ ب}\|$ = $\sqrt{١ + ٠ + ٩}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ أ ح = $\|\overrightarrow{أ ب}\|$ حا θ = $\sqrt{١٠} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

حل آخر

أ ب = $\|\overrightarrow{أ ب}\|$ = $\sqrt{١ + ٠ + ٩}$ = $\sqrt{١٠}$

$$ح ب = \text{مسقط } \overrightarrow{أ ب} \text{ فى اتجاه } \overrightarrow{ب ح} = \frac{(١، \sqrt{٥}، ٢) \cdot (−١، ٠، ٣)}{\sqrt{١ + ٥ + ٤}}$$

$$= \frac{٥}{\sqrt{١٠}}$$

∴ أ ح = $\sqrt{(أ ب)^2 − (ب ح)^2}$ = $\sqrt{١٠ − \frac{٢٥}{١٠}} = \frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

أوجد قياس الزاويه بين المستقيمين الذين جيوب تمام اتجاهما هي $\left(\frac{٥}{٢\sqrt{١٣}} ، \frac{-١٤}{٢\sqrt{٧١٣}} ، \frac{١}{٢\sqrt{٧}}\right)$ ، $\left(\frac{-٣}{٢\sqrt{٥}} ، \frac{٤}{٢\sqrt{٥}} ، \frac{١}{٢\sqrt{٧}}\right)$

الحل

$حتا\ \theta = |ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢|$

$= \left|\frac{٥}{٢\sqrt{١٣}} \times \frac{-٣}{٢\sqrt{٥}} + \frac{-١٢}{٢\sqrt{١٣}} \times \frac{٤}{٢\sqrt{٥}} + \frac{١}{٢\sqrt{٧}} \times \frac{١}{٢\sqrt{٧}}\right| = \frac{١}{٦٥}$

$\therefore \theta = حتا^{-١}\left(\frac{١}{٦٥}\right) = ٨٩^\circ\ ٧'\ ٦''$

إثبت أن المستويين $س + ٣ص - ٤ع = ٣$ ، $٢س + ٦ص - ٨ع = ٤$ متوازيان وأوجد البعد بينهما.

الحل

$ن_١ = (١ ، ٣ ، -٤)$ ، $ن_٢ = (٢ ، ٦ ، -٨)$

$\therefore \frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ $\therefore$ المستويان متوازيان

نوجد نقطه على المستوى الأول وذلك بوضع $س = ٠$ ، $ع = ٠$ $\therefore ص = ١$

نوجد البعد بين النقطه $(٠ ، ١ ، ٠)$ والمستوى $٢س + ٦ص - ٨ع - ٤ = ٠$

$البعد = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

$ل = \frac{|٢ \times ٠ + ٦ \times ١ - ٨ \times ٠ - ٤|}{\sqrt{٤ + ٣٦ + ٦٤}} =$

$ل = \frac{٢}{\sqrt{١٠٤}}$ وحدة طول

أوجد الصورة المتجهه لمعادلة المستوى المار بالنقطة $(٢ ، -٣ ، ١)$ والمتجه $\overline{ن} = (١ ، -٢ ، ٣)$ عمودى على المستوى

الحل

المعادله المتجهة $\overline{ن} \cdot \overline{ر} = \overline{ن} \cdot \overline{أ}$

$(١ ، -٢ ، ٣) \cdot \overline{ر} = (١ ، -٢ ، ٣)(٢ ، -٣ ، ١)$

$(١ ، -٢ ، ٣) \cdot \overline{ر} = ٢ + ٦ + ٣$

$(١ ، -٢ ، ٣) \cdot \overline{ر} = ١١$

أوجد الصور المختلفه لمعادلة المستوى المار بالنقطه $(-٣ ، ٤ ، ٢)$ والمتجه $\overline{ن}(١ ، -١ ، ٣)$ عمودى على المستوى.

الحل

الصورة المتجهة

$\overline{ن} \cdot \overline{ر} = \overline{ن} \cdot \overline{أ}$

$(١ ، -١ ، ٣) \cdot \overline{ر} = (١ ، -١ ، ٣) \cdot (-٣ ، ٤ ، ٢)$

$(١ ، -١ ، ٣) \cdot \overline{ر} = -٣ - ٤ + ٦$

$(١ ، -١ ، ٣) \cdot \overline{ر} = -١$

الصورة القياسيه

$أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + جـ(ع - ع_١) = ٠$

$١(س + ٣) - ١(ص - ٤) + ٣(ع - ٢) = ٠$

وبفك الاقواس نحصل على الصورة العامة

$س + ٣ - ص + ٤ + ٣ع - ٦ = ٠$

$س - ص + ٣ع + ١ = ٠$ أو $(١ ، -١ ، ٣)(س ، ص ، ع) = -١$ ثم نفك.

معادله المستوى المار بثلاث نقط

اذا كان المستوى يمر بالنقط $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ ، $(س_٣ ، ص_٣ ، ع_٣)$ فإن معادلته هى

$$\begin{vmatrix} س - س_١ & ص - ص_١ & ع - ع_١ \\ س_٢ - س_١ & ص_٢ - ص_١ & ع_٢ - ع_١ \\ س_٣ - س_١ & ص_٣ - ص_١ & ع_٣ - ع_١ \end{vmatrix} = ٠$$

أوجد مسقط النقطة أ(٠، ٩، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب(١، ٢، ٣)، جـ(٧، -٢، ٥)

الحل

نوجد معادلة ب جـ أولاً

ب جـ = جـ - ب = (٧، -٢، ٥) - (١، ٢، ٣) = (٦، -٤، ٢)

∴ معادلة ب جـ هى

ر = (١، ٢، ٣) + ك(٦، -٤، ٢)

بفرض نقطة المسقط هى د

حيث د = (١+٦ك، ٢-٤ك، ٣+٢ك) ← (١)

∴ أ د = د - أ = (١+٦ك، ٢-٤ك، ٣+٢ك) - (٠، ٩، ٦)

أ د = (١+٦ك، -٧-٤ك، -٣+٢ك)

∵ أ د ⊥ ب جـ

∴ أ د • ب جـ = ٠

(١+٦ك، -٧-٤ك، -٣+٢ك) • (٦، -٤، ٢) = ٠

٦+٣٦ك +٢٨+١٦ك -٦+٤ك = ٠

٥٦ك +٢٨ = ٠

٥٦ك = -٢٨ ∴ ك = -٢٨/٥٦ = -١/٢

بالتعويض فى (١)

∴ النقطه د = (-٢، ٤، ٢)

لإثبات المستقيمين ر١ = ص + ك١(س + ٢ص - ع)، ر٢ = (س + ص + ع) + ك٢(-٢س - ٢ص) متقاطعان فى نقطة واوجد نقطه تقاطعهما.

الحل

ر١ = (٠، ١، ٠) + ك١(١، ٢، -١)

ر٢ = (١، ١، ١) + ك٢(-٢، -٢، ٠)

بمساواة ر١، ر٢ لايجاد نقطه التقاطع إن وجدت

ر١ = ر٢

∴ (٠، ١، ٠) + ك١(١، ٢، -١) = (١، ١، ١) + ك٢(-٢، -٢، ٠)

ك١ = ١ - ٢ك٢

∴ ك١ + ٢ك٢ = ١ ← (١)

، ١ + ٢ك١ = ١ - ٢ك٢

٢ك١ - ٢ك٢ = ٠

ك١ - ك٢ = ٠ ← (٢)

- ك١ = ١ ∴ ك١ = -١ ← (٣)

بالتعويض فى (٢) ك٢ = ١

بالتعويض فى (١) عن ك١ = -١، ك٢ = ١

نجد أن -١ + ٢×١ = ١ ∴ تحقق المعادلة (١)

∴ المستقيمان متقاطعان

نوجد نقطه التقاطع بالتعويض عن ك١ = -١ فى ر١

أو ك٢ = ١ فى ر٢

ر٢ = (١، ١، ١) + ١(-٢، -٢، ٠)

(س، ص، ع) = (-١، -١، ١)

∴ المستقيمان متقاطعان فى النقطة (-١، -١، ١)

أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين

ل١: ر١ = (٣، -١، ن) + ك١(٤، ١، ٣)،

ل٢: س = (ص-٤)/-١ = (ع+١)/٢ متقاطعان فى نقطه وأوجد نقطه تقاطعهما

الحل

بفرض س/١ = (ص-٤)/-١ = (ع+١)/٢ = ك٢

∴ س = ك٢

ص - ٤ = -ك٢ ∴ ص = ٤ - ك٢

ع + ١ = ٢ك٢ ∴ ع = -١ + ٢ك٢

∴ ر٢ = (٠، ٤، -١) + ك٢(١، -١، ٢)

عند نقطه التقاطع ر١ = ر٢

٣ + ٤ك١ = ك٢ ∴ ٤ك١ - ك٢ = -٣ ← (١)

، -١ + ك١ = -ك٢ + ٤ ∴ ك١ + ك٢ = ٥ ← (٢)

، ن + ٣ك١ = ٢ك٢ - ١

∴ ٣ك١ - ٢ك٢ = -١ - ن ← (٣)

بحل (١)، (٢) بالجمع

٥ك١ = ٢ ∴ ك١ = ٢/٥ بالتعويض فى (٢)

∴ ٢/٥ + ك٢ = ٥ ∴ ك٢ = ٢٣/٥

∵ المستقيمان متقاطعان

∴ ك١، ك٢ تحقق المعادلة (٣)

٣×٢/٥ - ٢×٢٣/٥ = -١ - ن ∴ ن = ٧

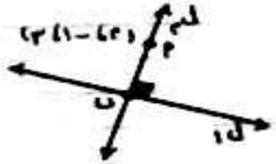
لايجاد نقطه التقاطع نضع ك٢ = ٢٣/٥ فى ر٢

ر٢ = (٠، ٤، -١) + ٢٣/٥ (١، -١، ٢)

(س، ص، ع) = (٠ + ٢٣/٥، ٤ - ٢٣/٥، -١ + ٤٦/٥)

= (٢٣/٥، -٣/٥، ٤١/٥)

اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطه (٢، -١، ٣)
ويقطع المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (١، -١، ٢) + ك (٢، ٢، -١)
على التعامد



الحل

بفرض ل$_1$ ∩ ل$_2$ = {ب}

∴ ب = (١ + ٢ك، -١ + ٢ك، ٢ - ك)

$\overrightarrow{ه}_2$ = $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{ه}_2$ = (١ + ٢ك، -١ + ٢ك، ٢ - ك) - (٢، -١، ٣)

ه$_2$ = (٢ك - ١، ٢ك، -ك - ١) ← (١)

∵ ل$_1$ ⊥ ل$_2$

∴ $\overrightarrow{ه}_1$ ∙ $\overrightarrow{ه}_2$ = ٠

(٢، ٢، -١) ∙ (٢ك - ١، ٢ك، -ك - ١) = ٠

٤ك - ٢ + ٤ك + ك + ١ = ٠

٩ك - ١ = ٠ ∴ ك = $\frac{١}{٩}$ بالتعويض فى (١)

∴ ه$_2$ = ($\frac{-٧}{٩}$، $\frac{٢}{٩}$، $\frac{-١٠}{٩}$) = (-٧، ٢، -١٠)

∴ معادلة ل$_2$ هى $\overrightarrow{ر}_2$ = (٢، -١، ٣) + ك (-٧، ٢، -١٠)

إثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{ر}_1$ = (١، ٢، ٤) + ك$_1$ (٢، -١، ١)،
$\overrightarrow{ر}_2$ = (١، ١، ١) + ك$_2$ (-٢، ٧، ١١) متعامدان
ثم بين أن المستقيمين متخالفان

الحل

$\overrightarrow{ه}_1$ = (٢، -١، ١) ، $\overrightarrow{ه}_2$ = (-٢، ٧، ١١)

∵ $\overrightarrow{ه}_1$ ∙ $\overrightarrow{ه}_2$ = (٢، -١، ١) ∙ (-٢، ٧، ١١)

= -٤ - ٧ + ١١ = صفر

∴ المستقيمان متعامدان .

عند نقطة التقاطع يكون $\overrightarrow{ر}_1$ = $\overrightarrow{ر}_2$

∴ (١، ٢، ٤) + ك$_1$ (٢، -١، ١) = (١، ١، ١) + ك$_2$ (-٢، ٧، ١١)

∴ ١ + ٢ك$_1$ = ١ - ٢ك$_2$

∴ ٢ك$_1$ + ٢ك$_2$ = ٠

ك$_1$ + ك$_2$ = ٠ ← (١)

، ٢ - ك$_1$ = ١ + ٧ك$_2$

-ك$_1$ - ٧ك$_2$ = -١ ← (٢)

، ٤ + ك$_1$ = ١ + ١١ك$_2$

ك$_1$ - ١١ك$_2$ = -٣ ← (٣)

بحل (١)، (٢) بالجمع

-٦ك$_2$ = -١ ∴ ك$_2$ = $\frac{١}{٦}$ بالتعويض فى (١)

ك$_1$ = $\frac{-١}{٦}$

بالتعويض عن ك$_1$ = $\frac{-١}{٦}$ ، ك$_2$ = $\frac{١}{٦}$ فى المعادلة (٣)

نجد أن $\frac{-١}{٦}$ - ١١ × $\frac{١}{٦}$ ≠ -٣ لا تحقق المعادلة

∴ المستقيمان متخالفان

إوجد الصور المختلفه لمعادلة المستوى المار بالنقط
(١، ٠، ٠) ، (٠، ٢، ٠) ، (٠، ٠، ٣)

الحل

النقط (١، ٠، ٠) ، (٠، ٢، ٠) ، (٠، ٠، ٣) هى نقط تقاطع للمستوى مع محاور الإحداثيات

∴ $\frac{س}{١}$ + $\frac{ص}{٢}$ + $\frac{ع}{٣}$ = ١ بالضرب × ٦

الصورة العامة

٦س + ٣ص + ٢ع - ٦ = ٠

$\overrightarrow{ن}$ (٦، ٣، ٢) ، أ (١، ٠، ٠)

الصورة المتجهه

$\overrightarrow{ن}$ ∙ $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ن}$ ∙ $\overrightarrow{أ}$

(٦، ٣، ٢) ∙ $\overrightarrow{ر}$ = (٦، ٣، ٢) ∙ (١، ٠، ٠)

(٦، ٣، ٢) ∙ $\overrightarrow{ر}$ = ٦

الصورة القياسية

٦(س - ١) + ٣(ص - ٠) + ٢(ع - ٠) = ٠

٦(س - ١) + ٣ص + ٢ع = ٠

إثبت أن المستقيمان ل$_1$: ٢س = ٣ص = ٤ع ،
ل$_2$: ٣س = ٢ص = ٥ع متقاطعان ثم إوجد معادلة المستوى الذى يحويهما .

الحل

∵ المستقيمان يمران بنقطه الأصل ∴ المستقيمان متقاطعان ونقطه التقاطع هى (٠، ٠، ٠)

ل$_1$: $\frac{س}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{ص}{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{ع}{\frac{١}{٤}}$

∴ متجه اتجاهه $\overrightarrow{ه}_1$ = ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٤}$) = (٦، ٤، ٣)

ل٢ = س / ⅓ = ص / ½ = ع / ⅕

∴ متجه اتجاهه هـ٢ (⅓ ، ½ ، ⅕) = (١٠ ، ١٥ ، ٦)

متجه الاتجاه العمودى على مستويهما ن = هـ١ × هـ٢

ن = | س ص ع | ٦ ٤ ٣ | ١٠ ١٥ ٦ | = −٢١ س − ٦ ص + ٥٠ ع

ن = (−٢١ ، −٦ ، ٥٠)

∴ معادلة المستوى هى ن . ر = ن . أ

(−٢١ ، −٦ ، ٥٠) . ر = (−٢١ ، −٦ ، ٥٠) . (٠ ، ٠ ، ٠)

(−٢١ ، −٦ ، ٥٠) . ر = ٠

أوجد إحداثيات نقطه تقاطع المستقيم ر حيث

ر = (٢ ، −١ ، ٢) + ك (٣ ، ٤ ، ٢) مع المستوى

ر . (١ ، −١ ، ١) = ٥

الحل

بالتعويض عن ر من معادلة المستقيم فى معادلة المستوى

∴ (٢ + ٣ك ، −١ + ٤ك ، ٢ + ٢ك) . (١ ، −١ ، ١) = ٥

٢ + ٣ك + ١ − ٤ك + ٢ + ٢ك = ٥

ك = ٠

بالتعويض فى معادله المستقيم

∴ نقطه التقاطع هى (٢ ، −١ ، ٢)

أوجد نقطه تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٤

مع المستوى ٣س + ص − ٢ع = ٥

الحل

من معادلة المستقيم س / ½ = (ص − ⅓) / ⅓ = (ع − ٤) / ١ = ك

∴ س = ½ ك ، ص = ⅓ ك + ⅓ ، ع = ك + ٤

بالتعويض فى معادلة المستوى

٣ × ½ ك + ⅓ ك + ⅓ − ٢(ك + ٤) = ٥ بالضرب × ٦

٩ك + ٢ك + ٢ − ١٢ك − ٤٨ = ٣٠

− ك = ٧٦ ∴ ك = −٧٦

بالتعويض فى (١)

∴ نقطة التقاطع هى (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

حل ثان

من معادلة المستوى ص = ٥ + ٢ع − ٣س ← (١)

بالتعويض فى معادله المستقيم

٢س = ٣(٥ + ٢ع − ٣س) − ١ = ع − ٤

٢س = ١٤ + ٦ع − ٩س = ع − ٤

∴ ٢س = ١٤ + ٦ع − ٩س ، ١٤ + ٦ع − ٩س = ع − ٤

١١س − ٦ع = ١٤ ← (٢) ، −٥ع + ٩س = −١٨ ← (٣)

بحل المعادلتين (٢) ، (٣)

١١س − ٦ع = ١٤ —×٥→ (٢)

٩س − ٥ع = −١٨ —×٦→ (٣)

∴ ٥٥س − ٣٠ع = ٧٠

٥٤س − ٣٠ع = −١٠٨

بالطرح

س = −٣٨ بالتعويض فى (٢) ع = −٧٢

بالتعويض فى (١) ∴ ص = ٥ + ٢ × −٧٢ − ٣ × −٣٨

ص = −٢٥

∴ نقطه التقاطع (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

حل ثالث

من معادله المستقيم

س / ½ = (ص − ⅓) / ⅓ = (ع − ٤) / ١

∴ ر = (٠ ، ⅓ ، ٤) + ك (½ ، ⅓ ، ١)

ر = (٠ ، ½ ، ٤) + ك (٣ ، ٢ ، ٦)

ر = (٣ك ، ٢ك + ½ ، ٦ك + ٤) بالتعويض فى معادلة المستوى ن . ر = ن . أ

(٣ ، ١ ، −٢) . (٣ك ، ٢ك + ½ ، ٦ك + ٤) = ٥

٩ك + ٢ك + ½ − ١٢ك − ٨ = ٥

− ك = ٣٨/٣ ∴ ك = −٣٨/٣

بالتعويض عن ك = −٣٨/٣ فى ر

ر = (٣ × −٣٨/٣ ، ٢ × −٣٨/٣ + ½ ، ٦ × −٣٨/٣ + ٤)

= (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢) نقطه التقاطع المطلوبه

اذا قطع المستوى ٢س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة $(س+٣)^{٢} + (ص+٢)^{٢} + (ع-١)^{٢} = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل

المقطع الناتج هو دائرة مركزها م

مركز الكرة ن (−٣، −٢، ١)

وطول نصف قطرها ن أ = $\sqrt{١٥}$

ن م يكون عمودياً على مستوى الدائرة

ن م = طول العمود المرسوم من ن (−٣، −٢، ١) إلى المستوى ٢س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠

$$ن م = \frac{|٢\times -٣ - ١\times -٢ - ٢\times ١ + ١٢|}{\sqrt{(٢)^{٢} + (-١)^{٢} + (-٢)^{٢}}} = ٢ \text{ وحدة طول}$$

نق للدائرة هو م أ = $\sqrt{(\sqrt{١٥})^{٢} - (٢)^{٢}} = \sqrt{١١}$ وحدة طول

مساحه المقطع الناتج (الدائرة) = ط نق^{٢}

= ١١ ط وحدة مربعة

أوجد المعادلة المتجهه للمستقيم المار بالنقطه (٣، ٢، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبه لمحاور الاحداثيات زوايا متساويه.

الحل

زوايا الاتجاه هى (θس، θص، θع)

∵ حتا^{٢}θس + حتا^{٢}θص + حتا^{٢}θع = ١ ∵ θس = θص = θع

∴ ٣حتا^{٢}θس = ١ ∴ حتا^{٢}θس = $\frac{١}{٣}$ ∴ حتاθس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه اتجاه المستقيم $(\frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}، \frac{١}{\sqrt{٣}}) = (١، ١، ١)$

∴ المعادلة المتجهة

$\vec{ر} = (٣، ٢، ٥) + ك (١، ١، ١)$

اختبار (٥) رقم ٥/أ

بدون فك المحدد إثبات أن
$$\begin{vmatrix} أ^{٢}+١ & أب & أجـ \\ أب & ب^{٢}+١ & ب جـ \\ أجـ & ب جـ & جـ^{٢}+١ \end{vmatrix} = أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١$$

الحل

بإخراج عامل مشترك أ من ص١، ب من ص٢، جـ من ص٣
$$أ ب جـ \begin{vmatrix} أ+\frac{١}{أ} & ب & جـ \\ أ & ب+\frac{١}{ب} & جـ \\ أ & ب & جـ+\frac{١}{جـ} \end{vmatrix}$$

ثم بضرب أ × ع١، ب × ع٢، جـ × ع٣
$$\begin{vmatrix} أ^{٢}+١ & ب^{٢} & جـ^{٢} \\ أ^{٢} & ب^{٢}+١ & جـ^{٢} \\ أ^{٢} & ب^{٢} & جـ^{٢}+١ \end{vmatrix}$$

ثم بإضافه ع٢ + ع٣ إلى ع١، (ع١ + ع٢ + ع٣)
$$\begin{vmatrix} أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١ & ب^{٢} & جـ^{٢} \\ أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١ & ب^{٢}+١ & جـ^{٢} \\ أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١ & ب^{٢} & جـ^{٢}+١ \end{vmatrix}$$

بأخذ أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + ١ عامل مشترك من ع١
$$(أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١)\begin{vmatrix} ١ & ب^{٢} & جـ^{٢} \\ ١ & ب^{٢}+١ & جـ^{٢} \\ ١ & ب^{٢} & جـ^{٢}+١ \end{vmatrix}$$

بإجراء ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١
$$(أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١)\begin{vmatrix} ١ & ب^{٢} & جـ^{٢} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١ \times (١\times١\times١) = أ^{٢}+ب^{٢}+جـ^{٢}+١$$

اختبار (٦) رقم ٢/أ

أكمل $(١-\frac{١}{\omega})(١-\frac{١}{\omega^{٢}})(١-\frac{١}{\omega^{٣}})(١-\frac{١}{\omega^{٤}})$ .... الى ١٠ عوامل يساوى

الحل

$(١-\omega)(١-\omega^{٢})(١-\omega)(١-\omega^{٢})$ .... إلى ١٠ عوامل

$= [(١-\omega)(١-\omega^{٢})]^{٥} = [١-\omega-\omega^{٢}+\omega^{٣}]^{٥}$

$= [١-\omega-\omega^{٢}+١]^{٥} = [٢-\omega-\omega^{٢}]^{٥}$

$= [٢-(\omega+\omega^{٢})]^{٥}$

$= [٢-(-١)]^{٥}$

$= [٣]^{٥} = ٢٤٣$

اختبار (٦) رقم ٣/٢

كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى س+ص+ع = ١
أوجد معادلة الكرة

الحل

∵ الكرة تمس المستوى

∴ طول نصف قطر الكرة = طول العمود المرسوم من مركز الكرة على المستوى

$$\therefore \text{نق} = \frac{|١\times١ + ١\times٢ + ١\times١ - ١|}{\sqrt{١+١+١}} = \sqrt{٣}$$

∴ معادلة الكرة هى $(س-١)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع-١)^٢ = ٣$

الاختبار السادس رقم ٥/أ

بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ب & أ & س \\ ب & س & أ \\ س & أ & ب \end{vmatrix} = (س+أ+ب)(س-أ)(س-ب)$$

الحل

بإضافة (ع٢ + ع٣) إلى ع١

$$\begin{vmatrix} ب & أ & س+أ+ب \\ ب & س & أ+س+ب \\ س & أ & ب+أ+س \end{vmatrix}$$

بأخذ س+أ+ب عامل مشترك من ع١

$$(س+أ+ب)\begin{vmatrix} ب & أ & ١ \\ ب & س & ١ \\ س & أ & ١ \end{vmatrix}$$

بإجراء ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١

$$(س+أ+ب)\begin{vmatrix} ب & أ & ١ \\ ٠ & س-أ & ٠ \\ س-ب & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = (س+أ+ب)(س-أ)(س-ب)$$

اختبار ٧ رقم ١/٦

إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١، −٢، ١)$ ، $\overrightarrow{ت} = (−٢، ١، ٢)$ فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ت}$ = ...

الحل

$$= \frac{\overrightarrow{أ}\cdot\overrightarrow{ت}}{\|\overrightarrow{ت}\|}\left(\frac{\overrightarrow{ت}}{\|\overrightarrow{ت}\|}\right) = \frac{(١، −٢، ١)\cdot(−٢، ١، ٢)}{\sqrt{٩}}\left(\frac{(−٢، ١، ٢)}{\sqrt{٩}}\right)$$

$$= -\frac{٢}{٩}(−٢، ١، ٢) = \left(\frac{٤}{٩}، -\frac{٢}{٩}، -\frac{٤}{٩}\right)$$

اختبار ٧ رقم ١/٤

$$\left(\frac{٣+٥س}{٥+٣س^٢} + \frac{٥+٣س^٢}{٣+٥س}\right)^٨ = ...$$

الحل

$$= \left(\frac{س(٣س^٢+٥)}{٥+٣س^٢} + \frac{س^٢(٥س+٣)}{٣+٥س}\right)^٨ = (س+س^٢)^٨ = (-١)^٨ = ١$$

الاختبار السابع رقم ٥/٢

أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى
س + ٢ص + ٣ع = ١٢

الحل

∵ س = ص = ع بالتعويض فى معادلة المستوى
س + ٢س + ٣س = ١٢

٦س = ١٢ ∴ س = ٢ وبالتالى ص = ٢ ، ع = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (٢، ٢، ٢)

اختبار (٨) رقم (١)

إذا كان $\frac{١}{١+لو س} = ١$ فإن س = ...

الحل

إما ١ + لو س = ١ أو ١ + لو س = ٠

لو س = ٠ لو س = −١

س = ١ س = $(١٠)^{-١} = \frac{١}{١٠}$

إختبار (٨) رقم ٢/ ١

إذا كان $\frac{أ^٢+ب^٢}{أ+ب ت} = ٢ + ٣ت$ فإن أ × ب = ... حيث أ×ب ∈ ح*

الحل

$أ^٢ + ب^٢ = (أ + ب ت)(٢ + ٣ت)$

$أ^٢ + ب^٢ = ٢أ + ٣أ ت + ٢ب ت − ٣ب$

$أ^٢ + ب^٢ = ٢أ − ٣ب + (٣أ + ٢ب) ت$

∴ $أ^٢ + ب^٢ = ٢أ − ٣ب$ (١) ، $٣أ + ٢ب = ٠$

∴ $ب = \frac{-٣}{٢}أ$ ← (٢)

بالتعويض ٥ (١)

$أ^٢ + \frac{٩}{٤}أ^٢ = ٢أ - \frac{-٩}{٢}أ$ بالضرب × ٤

$٤أ^٢ + ٩أ^٢ = ٨أ + ١٨أ$

$١٣أ^٢ − ٢٦أ = ٠$

أ (١٣أ − ٢٦) = ٠

أ = ٠ أو ١٣أ = ٢٦

مرفوض أ = ٢ بالتعويض فى (١) ب = −٣

∴ أ × ب = ٢ × −٣ = −٦

الاختبار الثامن رقم (٢) /٤

مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢ ط سم

ح منتصف أم فإن $\overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح و} = \dots$

الحل

محيط القاعدة = ١٢ط

٢ ط نق = ١٢ ط ∴ نق = ٦

∴ ب و = و م = ٦

∵ و منتصف م ب ، ح منتصف أم

∴ و ح = ½ أ ب = ½ × ١٠ = ٥ ، $\overline{و ح} \parallel \overline{م أ}$

∴ ق(∠ م ب أ) + ق(∠ ب و ح) = ١٨٠° ∴ حتا م ب أ = − حتا ب و ح =

∵ حتا م ب و = ٦ / ١٠ = ٣ / ٥ ∴ حتا ب و ح = −٣ / ٥

فى △ ب و ح

$\overrightarrow{ب و} + \overrightarrow{و ح} = \overrightarrow{ب ح}$

∴ $\overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح و} = (\overrightarrow{ب و} + \overrightarrow{و ح}) \cdot \overrightarrow{ح و}$

$= \overrightarrow{ب و} \cdot \overrightarrow{ح و} + \overrightarrow{و ح} \cdot \overrightarrow{ح و}$

= ||$\overrightarrow{ب و}$|| ||$\overrightarrow{ح و}$|| حتا ح و ب − $\overrightarrow{و ح} \cdot \overrightarrow{و ح}$

= ٦ × ٥ × −٣ / ٥ − ||$\overrightarrow{و ح}$||²

= −١٨ − (٥)² = −٤٣

إختبار (٨) رقم ٥ / ب

اذا كانت الكرتان (س − ٣)² + ص² + (ع − ٣)² = ١٦ ،

(س + ١)² + (ص − ٤)² + (ع − ل)² = ٢٥ متماستان فأوجد قيمة ل

الحل

بالنسبه للكرة الأولى م١ = (٣ ، ٠ ، ٣) ، نق١ = ٤

بالنسبة للكرة الثانيه م٢ = (−١ ، ٤ ، ل) / نق٢ = ٥

اذا كانت الكرتان متماستان من الخارج فإن نق١ + نق٢ = م١م٢ = ٩

∴ (م١م٢)² = ٨١ ∴ (٣ + ١)² + (٠ − ٤)² + (٣ − ل)² = ٨١

∴ ١٦ + ١٦ + (٣ − ل)² = ٨١ ∴ (٣ − ل)² = ٤٩

∴ ٣ − ل = ± ٧

٣ − ل = ٧ أو ٣ − ل = −٧

ل = −٤ ل = ١٠

اذا كان الكرتان متماستان من الداخل فإن

م١م٢ = نق٢ − نق١ = ١

(م١م٢)² = ١

١٦ + ١٦ + (٣ − ل)² = ١

(٣ − ل)² = −٣١ مرفوض

اذا كان $س = \frac{-١ - \sqrt{٣}ت}{٢}$ حيث $ت^٢ = -١$ فإن القيمة العدديه للمقدار $س^٨ + س^٤ + ٥ = \dots$

الحل

$س = \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت = ω$ أو $س = \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ω^٢$

عندما $س = ω$ فإن

$س^٨ + س^٤ + ٥ = ω^٨ + ω^٤ + ٥ = ω^٢ + ω + ٥ = -١ + ٥ = ٤$

عندما $س = ω^٢$ فان

$س^٨ + س^٤ + ٥ = ω^{١٦} + ω^٨ + ٥ = ω + ω^٢ + ٥ = -١ + ٥ = ٤$

$\left(\frac{٥ - ٣ω^٢}{٥ω - ٣} - \frac{٢ - ٧ω}{٢ω^٢ - ٧}\right)^٢ = \dots$

الحل

المقدار $= \left(\frac{ω^٢(\cancel{٥ω - ٣})}{\cancel{٥ω - ٣}} - \frac{ω(\cancel{٢ω^٢ - ٧})}{\cancel{(٢ω^٢ - ٧)}}\right)^٢$

$= (ω^٢ - ω)^٢ = (-\sqrt{٣}ت)^٢ = -٣$

بدون فك اثبت ان

$$\begin{vmatrix} ص+ع & س & س \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \\ ص & س & ٠ \end{vmatrix}$$

الحل

باضافة (ص٢ - ص٣) الى ص١

$$∴ = \begin{vmatrix} ٢ع & ٠ & ٢س \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$$

بأخذ ٢ ع مشترك من ص١

$$= ٢ \begin{vmatrix} ع & ٠ & س \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$$

ص٣ - ص١

$$= ٢ \begin{vmatrix} ع & ٠ & س \\ ص & ع+س & ص \\ ٠ & ع & ص \end{vmatrix}$$

باجراء ص٢ - ص٣

$$= ٢ \begin{vmatrix} ع & ٠ & س \\ ص & س & ٠ \\ ٠ & ع & ص \end{vmatrix}$$

بتبديل ص٢ ، ص٣

$$= -٢ \begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ص & س & ٠ \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix}$$

بتبديل ص٢ / ص٣

$$= ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \\ ص & س & ٠ \end{vmatrix}$$

= الأيسر

اثبت أن $\left(\frac{١ + حاى + ت حتاى}{١ + حاى - ت حتاى}\right)^ن = حتا ن(\frac{١}{٢}π - ى) + ت حا ن(\frac{١}{٢}π - ى)$

الحل

$∵ ١ = حا^٢ى + حتا^٢ى = حا^٢ى - ت^٢ حتا^٢ى$

$= (حاى + ت حتاى)(حاى - ت حتاى)$

$∴ \left(\frac{١ + حاى + ت حتاى}{١ + حاى - ت حتاى}\right)^ن =$

$= \left(\frac{(حاى + ت حتاى)(حاى - ت حتاى) + حاى + ت حتاى}{١ + حاى - ت حتاى}\right)^ن$

$= \left(\frac{(حاى + ت حتاى)(\cancel{حاى - ت حتاى + ١})}{\cancel{١ + حاى - ت حتاى}}\right)^ن$

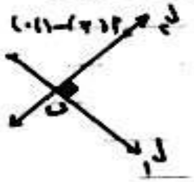
$= (حاى + ت حتاى)^ن$

$= \left(حتا(\frac{π}{٢} - ى) + ت حا(\frac{π}{٢} - ى)\right)^ن$

$= حتا ن(\frac{π}{٢} - ى) + ت حا ن(\frac{π}{٢} - ى)$ = الأيسر

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، -١، ٠) ويقطع المستقيم $\vec{ر} = (٢، ١، ١) + ك(١، ٢، -١)$ على التعامد

الحل



بفرض المستقيمين متقاطعين فى نقطه

$∵ ح ∈ ل$ $∴ ح = (٢ + ك، ١ + ٢ك، ١ - ك)$

متجه اتجاه المستقيم ل٢ $\vec{ه_٢} = \vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ}$

$\vec{ه_٢} = (-١ + ك، ٢ + ٢ك، ١ - ك)$

متجه اتجاه المستقيم المعلوم ل١ هو $\vec{ه_١} = (١، ٢، -١)$

∵ المستقيمان متعامدان $∴ \vec{ه_١} \cdot \vec{ه_٢} = ٠$

$∴ (١، ٢، -١) \cdot (-١ + ك، ٢ + ٢ك، ١ - ك) = ٠$

$-١ + ك + ٤ + ٤ك - ١ + ك = ٠$

$٦ك + ٢ = ٠$ $∴ ك = \frac{-١}{٣}$

$∴ \vec{ه_٢} = (\frac{-٤}{٣}، \frac{٤}{٣}، \frac{٤}{٣})$

∴ معادلة المستقيم ل٢ هى

$\vec{ر} = (٣، -١، ٠) + ك(\frac{-٤}{٣}، \frac{٤}{٣}، \frac{٤}{٣}) = (٣، -١، ٠) + ك'(-١، ١، ١)$